2. 2017 7월 30번 교육청

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 좌표평면 위의 두 직선 l, m은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 l, m은 서로 평행하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 θ이다. (나) 두 직선 l, m은 곡선 $y = \sqrt{2-x^2}\ (-1 \le x \le 1)$과 각각 만난다.

두 직선 l과 m 사이의 거리의 최댓값을 $f(\theta)$라 할 때,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta = a + b\sqrt{2}\pi$이다. $20(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

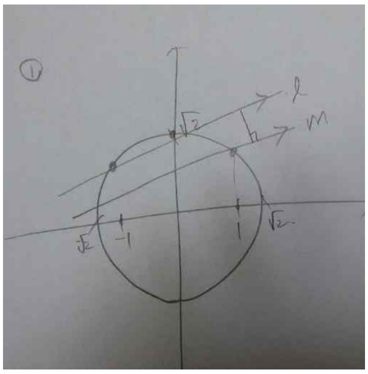
2번해설입니다.

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$**이므로** $\theta = 0$**부터** $x = \frac{\pi}{2}$**까지 변할때까지 두 직선** l**과** m**사이의 거리의 최댓값을 관찰해야 합니다.**

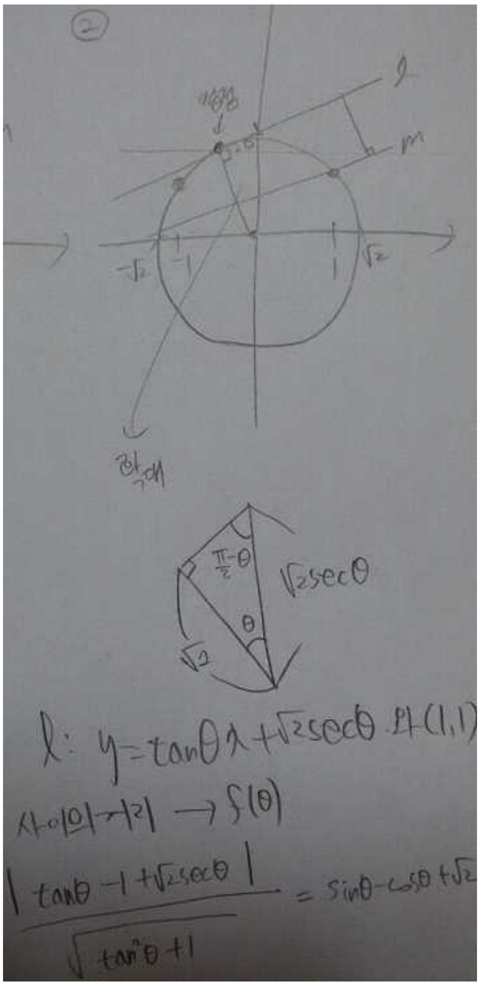
일단 최댓값을 구하라고 했죠????
이것은 '언제가 최대가 될 지를' 생각하고 문제를 봐야 합니다.

(나) 조건에서 곡선 $y = \sqrt{2-x^2}$**은 원의 일부입니다. 따라서 원이 나왔다는 것은 사실 '접하는 것'이 중요하다는 것은 아실거에요**

θ**가 작을 때 생각해 봅니다.**
$(-1,1)$**을 지나는 직선(**l**) 과 평행한 직선(**m**) 사이의 거리가 최대가 되려면 직선** m**은 (1,1)을 지난다고 접근이 됩니다. (1번그림)**

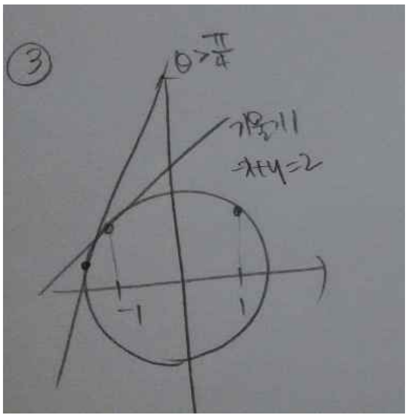


그런데 그림상에서 보면 직선 l은 저 위치에 있는 것보다 원에 접하게 될 때 두 직선 사이의 거리가 최대가 됩니다. (2번 그림)

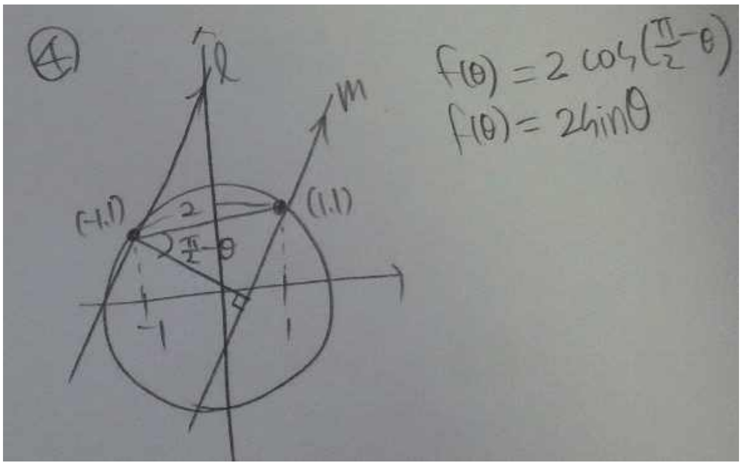


결국 θ가 작을 때는, 원 위의 점에서 접하는 직선과 (1,1)사이의 거리가 $f(\theta)$ 됩니다.

이제 θ를 점점 키우면서 관찰합니다.
θ를 크게하면, 접점이 범위 밖으로 밀려나게 됩니다. (3번그림)



원 위의 점 (-1,1)에서의 접선의 기울기(1)보다 커지게 되면, 접점은 범위 밖으로 밀리게 됩니다.
따라서, 점 (-1,1)에서의 접선이 아닌 (-1,1)을 지나는 직선의 방정식과 (1,1)사이의 거리가 $f(\theta)$가 됩니다. (4번그림)



$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$에서 $f(\theta) = \sin\theta - \cos\theta + \sqrt{2}$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$**에서** $f(\theta) = 2\sin\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

답 25