9회수학 가형 정답

1	②	2	①	3	②	4	⑤	5	①
6	③	7	①	8	①	9	③	10	⑤
11	①	12	②	13	②	14	②	15	②
16	⑤	17	④	18	⑤	19	④	20	③
21	④	22	13	23	2	24	16	25	23
26	11	27	84	28	32	29	50	30	27

해 설

1. 답 ②

$5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{5}{3}}$

$= 5^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

2. 정답 ①

$\vec{a} + \vec{b} = (1,\ 4)$이므로

$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-1,\ 3) \cdot (1,\ 4) = -1 + 12 = 11$

3. 정답 ②

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로

준식은 $4(1-\sin^2 x) + 4\sin x = 5$이고

정리하여 고치면 $(2\sin x - 1)^2 = 0$이므로

$\sin x = \frac{1}{2}$

4. 정답 ⑤

$y = \frac{1}{2}x - 1$에서 $F(2,\ 0)$, $A(0,\ -1)$이므로

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$에서 $F(2,\ 0)$이고, $b = 1$이다.

$k^2 = a^2 - b^2$에서 $4 = a^2 - 1$이므로 $a^2 = 5$

$a > 0$이므로

$a = \sqrt{5}$ 에서 장축의 길이는 $2a = 2\sqrt{5}$

5. 정답 ①

준식을 x에 대해 미분하면

$f'(x) = (x^2+1)' e^x + (x^2+1)(e^x)'$

$= 2xe^x + (e^x + 1)e^x$

$= x^2 e^x + 2xe^x + e^x$

$\therefore f'(0) = e^0 = 1$

6. 답 ③

벡터 $\overrightarrow{OP} = (a,\ b)$, $\overrightarrow{OQ} = (c,\ d)$라 하면

$\overrightarrow{OP'} = (a+3,\ b+1)$, $\overrightarrow{OQ'} = (c+3,\ d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = (a,b) - (a+3, b+1) = (-3, -1)$ 이므로

$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (a,\ b) - (c,\ d) = (a-c,\ b-d)$

$\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'} = (a+3,\ b+1) - (c+3,\ d+1)$

$= (a-c,\ b-d)$이 므로

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'}|$ (참)

ㄷ. (반례)

$\overrightarrow{OP} = (1,1)$, $\overrightarrow{OQ} = (1,2)$일 때,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$이다.

그런데, $\overrightarrow{OP'} = (4,2)$, $\overrightarrow{OQ'} = (4,5)$이므로

$\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'} = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 26$

$\therefore\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \neq \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

7. 답 ①

i) $F(x) = xg_1(x)$라 하면

$F(x) = \begin{cases} |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$이므로

$F(x) = xg_1(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_1 = N(g_1) = 1$

ii) $F(x) = xg_2(x)$라 하면

$F(x) = \begin{cases} -x^3 + x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$이므로

$F(x) = xg_2(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_2 = N(g_2) = 1$

iii) $F(x) = xg_3(x)$라 하면

$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \to 0} F(x) = (\text{발산})$이므로

$F(x) = xg_3(x)$는 $x = 0$에서 불연속이다.

또, $F(x) = x^2 g_3(x)$라 하면

$F(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \to 0} F(x) = 1 \neq 0 = F(0)$이므로

$F(x) = x^2 g_3(x)$는 $x = 0$에서 불연속이다.

$F(x) = x^3 g_3(x)$라 하면

$F(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$이므로

$F(x) = x^3 g_3(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_3 = N(g_3) = 3$

$\therefore\ a_1 = a_2 < a_3$

8. 정답 ①

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3 + 5x^2 + 4x)}{3x^3 + 5x^2 + 4x} \times \frac{3x^3 + 5x^2 + 4x}{2x^3 + 2x^2 + x}$

$= 1 \times \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 2x + 1} = 4$

9. 답 ③

좌표공간은 xy평면, yz 평면, zx평면에 의해 다음과 같이 8개의 영역으로 나누어진다.

① $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$인 영역,

② $x > 0,\ y > 0,\ z < 0$인 영역,

③ $x > 0,\ y < 0,\ z > 0$인 영역,

④ $x > 0,\ y < 0,\ z < 0$인 영역,

⑤ $x < 0,\ y > 0,\ z > 0$인 영역,

⑥ $x < 0,\ y > 0,\ z < 0$인 영역,

⑦ $x < 0,\ y < 0,\ z > 0$인 영역,

⑧ $x < 0,\ y < 0,\ z < 0$인 영역,

한편, 주어진 구

$C:\ (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 24$

의 중심은 $(-2,\ 3,\ 4)$이므로

구 C의 중심은 ⑤의 영역에 있다.

따라서 구 C는 ⑤의 영역을 지난다.

또, 구의 반지름의 길이 r는 $r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 이고,

$|-2| < r,\ 3 < r,\ 4 < r$이므로

구 C는 yz 평면, zx평면, xy평면에 의하여 두 부분으로 나누어진다.

따라서 구 C는 ①, ⑦, ⑥의 영역을 지난다.

한편, $\sqrt{(-2)^2 + 3^2} < r$이므로 구 C는 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ③의 영역을 지난다.

또, $\sqrt{(-2)^2 + 4^2} < r$이므로

구 C는 y축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ②의 영역을 지난다.

하지만, $\sqrt{3^2 + 4^2} > r$이므로

구 C는 x축과 만나지 않는다.

따라서 ⑧의 영역을 지나지 않는다.

또, $\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2} > r$이므로

원점의 구 C의 외부에 있다.

따라서 ④의 영역을 지나지 않는다.

따라서 구 C가 지나는 영역은 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦의 6개이다.

10. 정답 ⑤

$f(x) = [x[x]]$이므로

① $x \geq 0$일 때, $[x] \geq 0$이므로 $x[x] \geq 0$

$\therefore\ f(x) = [x[x]] \geq 0$

$x < 0$일 때, $[x] < 0$이므로 $x[x] > 0$

$\therefore\ f(x) = [x[x]] \geq 0$

∴옳다.

② $n \le x < n+1$일 때, $[x]=n$

또 $n^2 \le x[x] < n^2+n$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]=n^2$ 또는 n^2+1 또는 ⋯ 또는

n^2+n-1

즉, $n(\{f(x) \mid n \le x < n+1\})=n$

∴ 옳다.

③ $-n \le x < -n+1$(n은 자연수일 때) $[x]=-n$

또 $n^2 \ge x[x] > n^2-n$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]$

$=n^2-n,\ n^2-n+1,\ \cdots,\ n^2-1,\ n^2$

즉, $n(\{f(x) \mid -n \le x < -n+1\})=n+1$

∴ 옳다.

따라서, ①, ②, ③ 모두 옳다.

11. 정답 ①

ⅰ) 흰공을 꺼낸 경우 $\frac{2}{4}\times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$

ⅱ) 검은 공을 꺼낸 경우 $\frac{2}{4}\times {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$

ⅰ), ⅱ)에서 $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$

12. 정답 ②

Ⅰ. 10이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $f(10)=4$

Ⅱ. $f(x)<[x]\le x$이므로 $f(x)<x$

Ⅲ. $x=2$인 경우 $f(3)=2,\ f(2)=1$

$f(3)\ne f(2)$

따라서 옳은 것은 Ⅰ, Ⅱ이다.

13. 답 ②

크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는

정규분포 $\mathrm{N}\left(11,\ \left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$ 즉, $\mathrm{N}(11,\ 1^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(10 \le \overline{X} \le 14)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{10-11}{1} \le \frac{\overline{X}-11}{1} \le \frac{14-11}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 3)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)$

$=0.3413+0.4987=0.84$

이 때, A, B 두 사람이 각각 독립적인 표본을 임의추출하였으므로 두 사람이 뽑은 표본의 표본평균이 10 이상 14 이하일 확률은 모두 0.84로 같고, 두 사건은 서로 독립이다.

따라서 두 표본평균이 모두 10 이상 14 이하일 확률은

$0.84\times 0.84=0.7056$이다.

14. 정답 2

$f(0)=\frac{1}{3+4\sin^2\theta}+\frac{1}{3+4\cos^2\theta}$

$=\frac{1}{3+4\frac{1-\cos2\theta}{2}}+\frac{1}{3+4\frac{1+\cos2\theta}{2}}$

$=\frac{1}{5-2\cos2\theta}+\frac{1}{5+2\cos2\theta}$

$=\frac{10}{25-4\cos^2 2\theta}$

그러므로 $f(\theta)$의 최소값은 (분모)$=25-4\cos^2 2\theta$가 최대일 때이다.

따라서, $\cos^2 2\theta=0$일 때 분모는 최대이므로

$f(\theta)$의 최소값은 $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$이다.

15. 답 ②

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는

θ이므로 다음 그림에서

$\overline{OA'}=\overline{OA}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\sin\theta,$

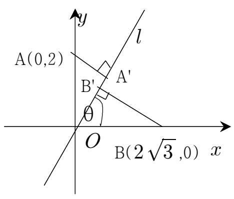
$\overline{OB'}=\overline{OB}\cos\theta=2\sqrt{3}\cos\theta$

$\therefore\ \overline{OA'}+\overline{OB'}=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$

$=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\le 4$

(단, 등호는 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 즉, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 성립한다.)



따라서 $\overline{OA'}+\overline{OB'}$이 최대가 되는 θ의 값은 $\frac{\pi}{6}$이다.

16. 답 ⑤

ㄱ. $f(x)>0$이므로 $\int_n^{n+1} f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와

두 직선 $x=n$, $x=n+1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의

넓이와 같다.

두 점 P_n, Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 각각

P'_n, Q'_n이라 하면 직사각형 $P_nP'_nQ'_nQ_n$의 넓이는

$(n+1-n)\times f(n)=f(n)$이다.

$\therefore\ \int_n^{n+1} f(x)dx=f(n)-(A_n-B_n)$ (참)

ㄴ. $A_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\{f(n)-f(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}(e^{-n}-e^{-n-1})=\frac{e^{-n-1}}{2}(e-1)$

$=\frac{e-1}{2}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}$

따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{e-1}{2e^2}$, 공비가 $\frac{1}{e}$인

등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n=\frac{\frac{e-1}{2e^2}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{2e}$ (참)

ㄷ.

$\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1} e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}$

$=-e^{-n-1}+e^{-n}=2A_n$

이므로 ㄱ에서 $B_n=f(n)-3A_n$

그런데,

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)-3\sum_{n=1}^{\infty} A_n=\frac{1}{e-1}-\frac{3}{2e}$

$=\frac{2e-3(e-1)}{2e(e-1)}=\frac{3-e}{2e(e-1)}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 답 ④

ㄱ. $n=100$, $\hat{p}=\frac{1}{5}$일 때, 비율 p를 신뢰도 95%로

추정하면 신뢰구간은

$\frac{1}{5}-1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}\le p$

$\le\frac{1}{5}+1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}$

$\therefore\ 0.1216\le p\le 0.2784$ (참)

ㄴ. 표본의 크기가 n이고

$\mathrm{P}\left(\hat{p}-k\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+k\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$인 경우에

신뢰도 $(a\times 100)$%에 대한 최대 허용 표본오차는

$k\sqrt{\frac{1}{4n}}$이므로

신뢰도 95%일 때,

$n=400$인 경우 최대 허용 표본오차 l은

$l = 1.96\sqrt{\frac{1}{1600}} = 1.96\times\frac{1}{40}$

$n=100$인 경우 최대 허용 표본오차 l'는

$l' = 1.96\sqrt{\frac{1}{400}} = 1.96\times\frac{1}{20}$

따라서 l은 l'의 $\frac{1}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. $n=50$인 표본을 100번 임의추출하여 비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간 100개를 구해보면
이 중 약 95개는 비율 p를 포함한다.
이는 신뢰구간의 의미를 설명하는 옳은 내용이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18. 답 ⑤

ㄱ. (반례) $a_{3k} = \frac{1}{2^{3k-1}}cos\frac{(3k-1)\pi}{2}$에
$k=2$를 대입하면

$a_6 = \frac{1}{2^5}cos\frac{5\pi}{2} = \frac{1}{2^5}\cdot 0 = 0$ (거짓)

ㄴ. $a_{4k-1} = \frac{1}{2^{4k-2}}cos\frac{(4k-2)\pi}{2}$

$= \frac{1}{2^{4k-2}}cos(2k-1)\pi = -\frac{1}{2^{4k-2}}$,

$b_{4k-1} = \frac{1+(-1)^{4k-2}}{2^{4k-1}} = \frac{2}{2^{4k-1}} = \frac{1}{2^{4k-2}}$이므로

$a_{4k-1}+b_{4k-1}=0$ (참)

ㄷ. $\{a_n\}$: 1, 0, $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{16}$, 0, ⋯이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}$

b_n : 1, 0, $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{16}$, 0, ⋯이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

따라서 $\frac{4}{5} = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19. 답 ④

[다항함수의 미분]

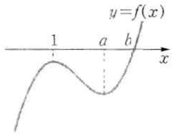
$f(x) = 2x^3-3(a+1)x^2+6ax-4a+2$

$f'(x) = 6x^2-6(a+1)x+6a = 6(x-1)(x-a)$

$a>1$이므로 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

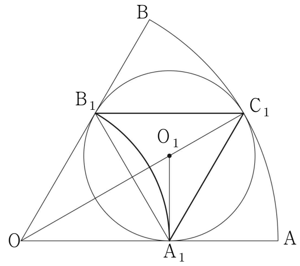
x	⋯	1	⋯	a	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=1$에서 극대값을 가진다.
그런데 $f(1)=1-a<0$이고 $f(b)=0$이므로
$a<b$이다.



20. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

부채꼴 OAB에서 원 O_1의 중심을 O_1이라 하자.

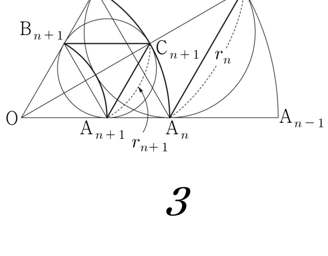


$\overline{OA_1} = \overline{OB_1}$이고 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$이므로
삼각형 OA_1B_1은 정삼각형이다.
직선 OC_1은 점 O_1을 지나므로
$\angle O_1OA_1 = \frac{\pi}{6}$이다.
원 O_1의 반지름의 길이를 a라 하면
$\overline{OA_1} = \sqrt{3}a$, $\overline{OO_1} = 2a$, $\overline{O_1C_1} = a$이므로
$\overline{OC_1} = 3a = 6$, $a = 2$이고
$\overline{OA_1} = 2\sqrt{3}$, $\overline{A_1C_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{B_1A_1} = 2\sqrt{3}$
이다.
▽모양의 도형 $A_1C_1B_1$의 넓이는
두 정삼각형 OA_1B_1, $A_1C_1B_1$의 넓이의 합에서
부채꼴 OA_1B_1의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\therefore S_1 = 2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}$

$= 6\sqrt{3}-2\pi$

부채꼴 $OA_{n-1}B_{n-1}$에 내접하는 원 O_n이
두 선분 OA_{n-1}, OB_{n-1}, 호 $A_{n-1}B_{n-1}$과
만나는 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자.
(단, $A_0 = A$, $B_0 = B$이다.)



▽모양의 도형 $A_nC_nB_n$과
도형 $A_{n+1}C_{n+1}B_{n+1}$에서
$\overline{A_nC_n} = r_n$, $\overline{A_{n+1}C_{n+1}} = r_{n+1}$이라 하자.
$\overline{OC_{n+1}} = \overline{OA_n} = r_n$이고 $\overline{OA_{n+1}} = r_{n+1}$이므로
삼각형 $OA_{n+1}C_{n+1}$에서
$\angle OA_{n+1}C_{n+1} = \frac{2}{3}\pi$이므로
코사인법칙에 의하여

$r_n^2 = r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 - 2r_{n+1}^2\cos\frac{2}{3}\pi$

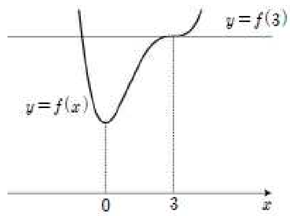
$r_n^2 = 3r_{n+1}^2$

$r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}r_n$

두 도형의 닮음비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$이다.
그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6\sqrt{3}-2\pi$이고
공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{1-\frac{1}{3}} = 9\sqrt{3}-3\pi$

21. 정답 ④



최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)-f(3)|$은 한 점에서만 미분가능하지 않고
$x=0$에서 극솟값을 가지므로 $f'(x) = 4x(x-3)^2$
이것의 부정적분을 구하면
$f(x) = x^4-8x^3+18x^2+C$ (단, C는 적분상수)
조건 (나)에서 $f(0)=5$이므로 $C=5$ ∴
$f(1)=16$

22. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$f'(x) = 3(x+1)^2+\frac{1}{x}$

따라서 $f'(1) = 13$

23. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$

$= \lim_{x\to0}(1+\cos x) = 2$

24. 답 16

$f(x)=x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시키면
$g(x)=(x-a)^3+b$의 그래프가 된다.
$g(0) = -a^3+b = 0$이므로 $b=a^3$ ⋯⋯ ㉠
한편, 그래프의 평행이동에 의해

$\int_a^b g(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} g(x+c)dx$가 성립함을 이용하면

$\int_a^{3a} g(x)dx = \int_a^{3a}\{(x-a)^3+b\}dx$

$=\int_0^{2a}(x^3+b)dx$

$\therefore \int_0^{2a}(x^3+b)dx - \int_0^{2a}x^3dx = \int_0^{2a}bdx$

$=2ab=32$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2ab=2a^4=32$이므로 $a^4=16$

25. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\begin{cases} 2x^{\frac{3}{2}}+C_1 & (x>1) \\ x^2+C_2 & (x<1) \end{cases}$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(4)=16+C_1=13$

$C_1=-3$

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-0}(x^2+C_2)=\lim_{x\to 1+0}\left(2x^{\frac{3}{2}}-3\right)$

$1+C_2=-1$

$C_2=-2$

따라서 $f(-5)=25-2=23$

26.답 11

폐구간 $[-a, a]$에서 정의된 함수

$f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$

에서 $x-5=t$로 놓으면

구하는 함수의 최대값과 최소값은

폐구간 $[-a-5, a-5]$에서 정의된

함수 $f(t)=\dfrac{t}{t^2+36}$의 최대값과 최소값과 같다.

이제 함수 $f(t)=\dfrac{t}{t^2+36}$의 그래프의 개형을 그려보자.

i) $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$이므로

함수 $y=f(t)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

ii) $t>0$일 때 $f(t)>0$이고, $t<0$일 때 $f(t)<0$이다.

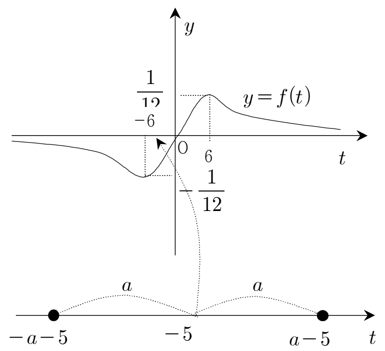
iii) $f(-t)=-f(t)$이므로

$y=f(t)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

iv) $f'(t)=\dfrac{1(t^2+36)-t\cdot 2t}{(t^2+36)^2}=\dfrac{36-t^2}{(t^2+36)^2}=0$에서

$t=6$ 또는 $t=-6$이고 $f'(t)$의 분모는 항상 0보다 크므로 $f(x)$는 $t=-6$에서 극소이고 $t=6$에서 극대이다.

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이 때, 폐구간 $[-a-5, a-5]$은 $t=-5$에 대하여 대칭인 구간이므로

함수 $y=f(t)$의 최대값 M과 최소값 m에 대하여

$M+m=0$ 즉, $m=-M$을 만족하려면

폐구간 $[-a-5, a-5]$은 $t=-6$과 $t=6$을 모두 포함해야 한다.

$\therefore -a-5\le -6$이고 $a-5\ge 6$

$\therefore a\ge 1$이고 $a\ge 11$

$\therefore a\ge 11$

따라서 구하는 a의 최소값은 11이다.

27. 84

$x^2+y^2+z^2=81$ …… ㉠

$x^2+(y-5)^2+z^2=56$ …… ㉡에서

㉠$-$㉡을 계산하여 정리하면 $y=5$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y=5$ 위에 있다.

구의 방정식 ㉠에 $y=5$를 대입하면

$x^2+z^2=56$ …… ㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은

$x^2+z^2=56,\ y=5$

이 원 위의 점 $\mathrm{P}(x, 0, z)$의 xy평면 위로의 정사영은

$\mathrm{P}'(x, 5, 0)$이고, 두 점 Q, R의 좌표는 각각 $(0, 9, 0)$,

$(0, -9, 0)$이므로 삼각형 $QP'R$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{QR}|x|=9|x|$

이 때, 사면체 $PQP'R$의 높이는 $|z|$이므로

이 사면체의 부피 V는 $V=\frac{1}{3}\cdot S|z|=3|xz|$

그런데, 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의해

$x^2+z^2=56\ge 2\sqrt{x^2z^2}=2|xz|$이므로

$|xz|\le 28$

$\therefore V=3|xz|\le 3\cdot 28=84$

따라서 구하는 사면체의 부피의 최대값은 84이다.

28. [출제의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{B}$에서

$\angle \mathrm{OBQ}_k=\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{k\pi}{2n}$이고 $\overline{\mathrm{OB}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_k}=8\sin\frac{k\pi}{2n}$, $\overline{\mathrm{BQ}_k}=8\cos\frac{k\pi}{2n}$

$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}_k}\times\overline{\mathrm{BQ}_k}$

$=\frac{1}{2}\times 8\sin\frac{k\pi}{2n}\times 8\cos\frac{k\pi}{2n}=16\sin\frac{k\pi}{n}$

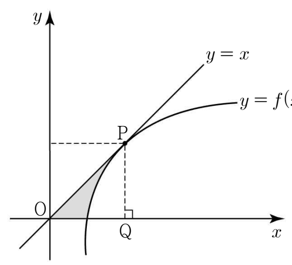
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=16\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

$=16\int_0^1\sin\pi x\,dx=16\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{32}{\pi}$

따라서 $\alpha=32$

29. [출제의도] 정적분과 접선의 기울기를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=k\ln x$라 하자.



접점의 좌표를 $\mathrm{P}(p, p)$라 하면

$f(p)=k\ln p=p$ … ㉠

$f'(x)=\frac{k}{x}$이므로 $f'(p)=\frac{k}{p}=1$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=e$, $k=e$

$f(x)=e\ln x$

구하고자 하는 넓이 S는

$S=$(삼각형 OPQ의 넓이)$-\int_1^e f(x)dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e e\ln x dx$

$=\frac{1}{2}e^2-e[x\ln x-x]_1^e$

$=\frac{1}{2}e^2-e(e\ln e-e+1)$

$=\frac{1}{2}e^2-e$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$이므로

$100ab=50$

30. 답 27

구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=4$에 $z=-1$을 대입하면

$x^2+y^2=3$이므로

원 C는 중심이 $(0,\ 0,\ -1)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고

평면 $z=-1$에 놓인 원이다.

이 때, x축을 포함하고 이 원과 오직 한 점에서 만나는

평면 α는 두 점

$O(0,\ 0,\ 0)$, $A(0,\ \sqrt{3},\ -1)$

(또는 $(0,\ -\sqrt{3},\ 0)$)을 지나야 한다.

따라서 평면 α는 x축과 직선 OA (또는 OB)를 포함

한다.

이 때, x축의 방향벡터는 $\vec{x}=(1,\ 0,\ 0)$이고 직선 OA

의 방향벡터 (또는 직선 OB의 방향벡터)는

$\vec{a}=(0,\ \sqrt{3},\ -1)$

또는 $\vec{b}=(0,\ -\sqrt{3},\ -1)$이므로

평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$은 벡터 $\vec{x}$와 벡터 $\vec{a}$ (또는 $\vec{b}$)와

각각 수직이어야 한다.

그런데 한 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$이므로

$\vec{n}\cdot\vec{x}=(a,\ 3,\ b)\cdot(1,\ 0,\ 0)=0$에서 $a=0$이고,

$\vec{n}\cdot\vec{a}=(a,\ 3,\ b)\cdot(0,\ \sqrt{3},\ -1)=0$에서

$3\sqrt{3}-b=0$

$\therefore\ b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=0+27=27$

[참고]

$\vec{n}\cdot\vec{b}=(a,\ 3,\ b)\cdot(0,\ -\sqrt{3},\ -1)=0$일 경우에도

$3\sqrt{3}+b=0$이므로 $b=-3\sqrt{3}$이다.

$\therefore\ a^2+b^2=0+27=27$