5회수학 나형 정답

1	⑤	2	③	3	④	4	④	5	④
6	④	7	①	8	②	9	②	10	②
11	②	12	①	13	②	14	③	15	②
16	③	17	⑤	18	①	19	②	20	②
21	①	22	21	23	16	24	1	25	105
26	50	27	13	28	175	29	32	30	12

해 설

1. 답 ⑤

[등차수열]

$a_n = a+(n-1)d$라 하면

$a_1+a_2 = a+a+d = 2a+d = 10$ …… ㉠

$a_3+a_4+a_5 = a+2d+a+3d+a+4d$

$= 3a+9d = 45$ …… ㉡

㉠, ㉡를 연립하면 $a=3,\ d=4$

$\therefore\ a_{10} = 3+(10-1)4 = 3+36 = 39$

2. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 3$$

3. [출제의도] 무한등비급수의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{5}{1-\frac{3}{4}} = 20$$

4. [출제의도] 독립사건의 성질을 이해하여 확률의 곱셈정리를 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(A^C\cap B) = \mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{7}{9}\mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}$

$\mathrm{P}(B) = \frac{2}{7}\ \ \therefore \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}\times\frac{2}{7} = \frac{4}{63}$

5. [출제의도] 극한값의 성질을 이해하여 미정계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{b}{n}\right) = a = 2,\ \ \sum_{n=1}^{5}(2n+b) = 30+5b = 60$

$\therefore a+b = 2+6 = 8$

6. 정답 ④

$[0,\ 1]$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 확률밀도함수이므로 $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$이고

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$$

① $\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx = 0$

② $\int_0^1\{f(x)+g(x)\}dx = 2$

③ $\int_0^1\frac{1}{2}\{f(x)-g(x)\}dx = 0$

④ $\int_0^1\frac{1}{3}\{2f(x)+g(x)\}dx$

$= \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{3}\int_0^1 g(x)dx$

$= \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$ <참>

⑤ $\int_0^1\{2f(x)-g(x)\}dx = 1$이지만

$2f(x)-g(x) < 0$일 수도 있다.

7. 최소 : 9 ($A\cup B = B$ 일 때)

최대 : $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서 $n(A\cap B) = 3$일 때) 즉, $6+9-3 = 12$

$\therefore M+m = 12+9 = 21$

8. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하고 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+2} = 3a_{n+1}-3$ …㉠, $a_{n+1} = 3a_n-3$ …㉡

㉠−㉡ : $a_{n+2}-a_{n+1} = 3(a_{n+1}-a_n)$

$a_2-a_1 = 1$ 에서 $a_{n+1}-a_n = 3^{n-1}$

$\therefore a_6-a_5 = 81$

9.[출제의도] 미분가능성을 이해한다.

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0) = a+b = 1$ … ㉠

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$f'(0) = \lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

그런데 $\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$,

$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 2a(0-1) = -2a$ 이므로

$-1 = -2a$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 $b = \frac{1}{2}$ $\therefore\ f(1) = b = \frac{1}{2}$ 이다.

10. [출제의도] 로그함수와 관련된 실생활 문제를 해결한다.

$10 = C\log\frac{10(30-6)}{6(30-10)}$ 에서 $C = \frac{10}{\log 2}$

$T = \frac{10}{\log 2}\cdot\log\frac{15(30-6)}{6(30-15)} = 20$

11. 정답 ②

Ⅰ) <거짓> $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$,

$P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$이므로

일반적으로 $P(A|B)) \neq P(B|A)$

Ⅱ) <참> $A,\ B$가 배반사건이면 $P(A\cap B) = 0$이므로

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

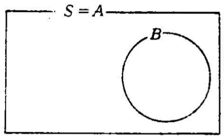
$P(A)+P(B)\leq 1$

Ⅲ) <거짓>

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A\cap B)\neq 0$인 경우 $P(A)+P(B)\neq 1$이므로

B는 A의 여사건이라 할 수 없다.



12. **[출제의도] 함수의 연속성 추론하기**

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0}f(x) = 1,\ \lim_{x\to 1-0}g(x) = 2$이므로

$\lim_{x\to 1-0}f(x)g(x) = 2$ (참)

ㄴ. $f(3)g(3) = 1\times 2 = 2$,

$\lim_{x\to 3-0}f(x)g(x) = 3,\ \lim_{x\to 3+0}f(x)g(x) = 3$에서

$\lim_{x\to 3}f(x)g(x) = 3$

$\lim_{x\to 3}f(x)g(x)\neq f(3)g(3)$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0}f(x)g(x) = 4$

ㄱ에 의하여 $\lim_{x\to 1-0}f(x)g(x) = 2$

$\lim_{x\to 1-0}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to 1+0}f(x)g(x)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ에 의해 $x=3$에서도 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1,\ x=3$에서 불연속이다. (거짓)

13. [출제의도] 등차수열과 조합을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

1위 팀의 승리한 경기 수를 x라 하면

총 경기 수가 ${}_5\mathrm{C}_2\times 9$ 이므로

${}_5\mathrm{C}_2\times 9 = \frac{5(x+10)}{2}$

$\therefore\ x = 26$

14. [출제의도] 중복 조합을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

총 경기 수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times 9 = 90$,

주어진 두 팀(A와 B)가 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 60이고 나머지 3개의 팀의 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 30이므로

$x+y+z = 30$

$x,\ y,\ z$가 모두 5이상 이므로

$x = x'+5,\ y = y'+5,\ z = z'+5$라 하면

$x'+y'+z' = 15\,(x'\geq 0, y'\geq 0, z'\geq 0)$

$\therefore\ {}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15} = {}_{17}\mathrm{C}_{15} = {}_{17}\mathrm{C}_2 = 136$

15. 정답 ②

$v(t) = 0$인 t의 값은 $t = 2,\ 4$이고 이 시각에 $v(t)$의 부호가 바뀌었으므로 운동방향이 바뀐 것이다.

또, $\int_0^t v(t)dt = 0$ 이므로 $t = 4$인 순간의 동점 P의 위치는 원점이다.

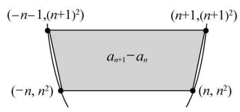
16.[출제의도] 규칙성을 찾아 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+1}-a_n = (2n+1)^2$

$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)^2$

$= \frac{4n^3-n}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3} = \frac{4}{3}$



17. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

T_n의 면의 개수를 a_n, 꼭짓점의 개수를 b_n이라 하면,

$b_1 = 4,\ b_{n+1} = 3b_n$에서 $b_n = 4\cdot 3^{n-1}$

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n+b_n = a_n+4\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_6 = 4+\sum_{k=1}^{5}4\cdot 3^{k-1} = 488$

18. [출제의도] 순열을 이해하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(1) $f(1)=1$이면 $f(2)=3$이므로 $4!=24$

(2) $f(1)=3$이면 $f(3)=1$, $f(2)=5$이므로 $3!=6$

(3) $f(1)=4$이면 $f(4)=1$, $f(2)=6$이므로 $3!=6$

(4) $f(1)=2$ 또는 $f(1)=5$ 또는 $f(1)=6$이면 주어진 조건을 만족하는 함수 f는 존재하지 않는다.

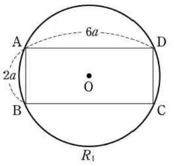
따라서 구하는 함수 f의 개수는 36이다.

19. [출제의도] 조건부 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

임의로 선택한 상자에서 공을 하나 꺼낼 때, 상자 A에서 공을 꺼낼 사건을 X, 상자 B에서 공을 꺼낼 사건을 Y, 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 Z라 하면, 구하는 값은

$$\mathrm{P}(Y|Z)=\frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(Z)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(X\cap Z)+\mathrm{P}(Y\cap Z)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{5}$$

20. 정답 ②



R_1의 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $6a$, $2a$라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10}\,a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{\sqrt{10}}$

R_n의 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_1=1,\ r_2=\frac{1}{\sqrt{10}},\ r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{10}}r_n$

각 원에서 색칠된 부분의 넓이는 첫 항이 $\pi-\frac{12}{10}$, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이고, 개수는 1개, 2개, 4개, $\cdots$의 등비수열을 이루므로

$$S_n=\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+2^2\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+\cdots+2^{n-1}\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi-\frac{6}{5}}{1-\frac{2}{10}}=\frac{5\pi-6}{4}=\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$$

21. 답 ①

[이항분포와 정규분포]

받은 사람 100명 중 참석자의 비율을 2라고 하면

구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.43\le\hat{p}\le0.56)$이다.

모비율은 $p=0.5$이고 $nq=50$, $np=50$은 모두 5보다 크므로

$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(0.43\le\hat{p}\le0.56)=\mathrm{P}\left(\frac{0.43-0.5}{0.05}\le Z\le\frac{0.56-0.5}{0.05}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{0.07}{0.05}\le Z\le\frac{0.06}{0.05}\right)=\mathrm{P}(-1.4\le Z\le1.2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.2)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.4)$$
$$=0.3849+0.4192=0.8041$$

22.[출제의도] 등차수열의 성질을 이해한다.

$a_n=1+(n-1)\cdot3=3n-2$에서

$a_3=7,\ a_5=13$이므로 $a_1+a_3+a_5=21$

23. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수열의 합에 관한 문제를 해결한다.

$64=2^6$이므로 $[\log_2 64]=6$

$3^3=27<64<3^4=81$이므로 $[\log_3 64]=3$

$4^3=64$이므로 $[\log_4 64]=3$

$5^2=25<64<5^3=125$이므로 $[\log_5 64]=2$

$6^2=36<64<6^3=216$이므로 $[\log_6 64]=2$

그러므로 $\sum_{n=2}^{6}[\log_n 64]=16$

24. [출제의도] 함수의 극한을 이해하고 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$이므로 $f(x)=x^2+2x+c$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{x}+c$

$\lim_{x\to+0}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}(1+2x+cx^2)=1$

[다른 풀이]

$\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to+0$일 때, $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to+0}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t+c}{t^2}=1$

25. 답 105

[확률분포]

$E(X)=\frac{0+3+6+6}{10}=\frac{3}{2}$

$V(X)=\frac{0+1^2\times3+2^2\times3+3^2\times2}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{20}$

$V(Y)=V(10X+5)=10^2\,V(X)=\frac{100\times21}{20}=105$

26. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

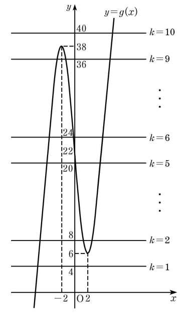
반지름의 길이가 가장 긴 원판을 A라 할 때, A 위에 원판이 1개, 2개, 3개, 4개 놓이는 경우는 각각 ${}_4\mathrm{C}_1\times3!=24$, ${}_4\mathrm{C}_2\times2!=12$, ${}_4\mathrm{C}_3\times2!=8$, ${}_4\mathrm{C}_4\times3!=6$이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $24+12+8+6=50$

27. [출제의도] 도함수를 활용하여 양의 실근의 개수를 추측한다.

$g(x)=x^3-12x+22$라 하면 $g'(x)=3(x-2)(x+2)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	38	$\searrow$	6	$\nearrow$



삼차방정식의 양의 실근의 개수 $f(k)$는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4k$가 제1사분면에서 만나는

교점의 개수와 같다.

ⅰ) $k=1$일 때 $f(k)=0$

ⅱ) $k=2,3,4,5$일 때 $f(k)=2$

ⅲ) $k=6,7,\cdots,10$일 때 $f(k)=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}f(k)=0\times1+2\times4+1\times5=13$

28. 답 175

[여러 가지 수열]

$f(5)=4$

$f(5^2)=f(5\cdot5)=f(5)+3=4+3$

$f(5^3)=f(5\cdot5^2)=f(5^2)+3=4+3+3$

$\vdots$

이므로 $f(5^k)=4+(k-1)\cdot3=3k+1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sum_{k=1}^{10}(3k+1)=175$

29. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에서 연속이 되기 위해서는 $x=2$에서 연속이 되어야 하므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=f(2)g(2)$를 만족하여야 한다.

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=\lim_{x\to2}\frac{2g(x)}{x-2}=f(2)g(2)$이므로

$g(2)=0$

$g(x)=a(x-2)(x-\alpha)$라고 하면,

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=\lim_{x\to2}2a(x-\alpha)=f(2)g(2)=0$

$\therefore\alpha=2$

$g(x)=a(x-2)^2$ 이고 $g(0)=8$

$\therefore a=2$

$g(x)=2(x-2)^2$

$\therefore\ g(6)=2(6-2)^2=32$

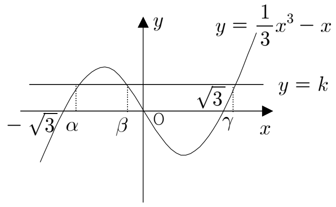
30. 답 12

[다항함수의 미분]

$y=\frac{1}{3}x^3-x$라 놓으면 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x$과 직선

$y=k$의 교점의 x좌표가 주어진 삼차방정식의 세 실근

이다.



곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x$는 원점에 대하여 대칭이며

$\frac{1}{3}x^3-x=0$에서 $x=-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$

이 때, $\alpha<\beta<\gamma$ 라 해도 문제의 뜻에 어긋나지 않으며

$-\sqrt{3}\leq\alpha<\beta\leq 0<\sqrt{3}\leq\gamma$

한편,

$\frac{1}{3}x^3-x-k=\frac{1}{3}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$에서

$\alpha+\beta+\gamma=0$

$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=2\gamma\ \geqq\ 2\sqrt{3}$

$\therefore\ m^2=(2\sqrt{3})^2=12$