**8.** 함수 $f(x)=(x+a)e^{-x}$ 와 실수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.
함수 $h(t)$를

$$h(t)=\lim_{h\to 0+}\frac{|f(t+h)-g(t+h)|}{f(t+h)-g(t+h)}$$

이라 할 때, $\lim_{t\to -1-}(h\circ h)(t)=1$이다. $a$의 최솟값을 구하시오.

[4점]

먼저 $h(t)$를 분석해보면, $h(t)=\begin{cases}1 & (f(t+h)-g(t+h)>0)\\ -1 & (f(t+h)-g(t+h)<0)\end{cases}$인 상황입니다.

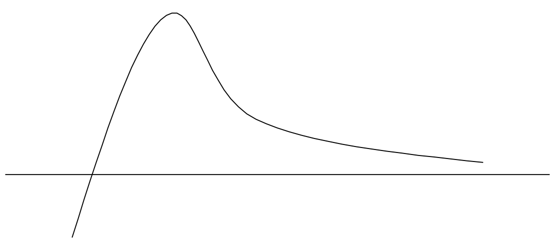
$g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로, $f(t+h)-g(t+h)=f(t+h)-f(t)-hf'(t)$라고 할 수 있습니다.

즉 $f(t+h)-g(t+h)>0$은 $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}>f'(t)$라고 해석할 수 있습니다. (극한을 취할 때, $h>0$이 자명하므로 부등호의 방향은 바뀌지 않습니다.)

$f(t+h)-g(t+h)<0$은 위와 같은 원리로 $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}<f'(t)$라고 볼 수 있습니다.

위로 볼록과 아래로 볼록의 정의에 의해 $f(t+h)-g(t+h)>0$은 함수 $f(x)$가 아래로 볼록이라는 의미로, $f(t+h)-g(t+h)<0$은 함수 $f(x)$가 위로 볼록이라는 의미로 파악할 수 있습니다.

$f(x)=(x+a)e^{-x}$, $f'(x)=(-x-a+1)e^{-x}$, $f''(x)=(x+a-2)e^{-x}$ 이므로, $f(x)$의 개형은



대략적으로 이런 형태일 것이고 $-a$에서 $x$절편 $-a+1$에서 극댓값 $-a+2$에서 변곡점을 갖는 형태일 것입니다.

변곡점을 기준으로 위로 볼록과 아래로 볼록이 바뀌므로 $-a+2$를 기준으로 함수가 바뀜을 알 수 있습니다.

여기서 문제는 $h(-a+2)$에서의 함숫값이 얼마가 되느냐 입니다.

직관적으로 보면 변곡접선을 그었을 때, 변곡점에서 함수 위의 어느 점으로 직선을 그어도 기울기가 이 변곡접선의 기울기보다 클 수 없다는 걸 알 수 있으므로, $h(-a+2)=1$이 쉽게 나옵니다.

좀 더 논리적으로 접근해보자면, 변곡접선은 $(-a+2, f(-a+2))$을 관통하므로 이 점을 기준으로 $f(x)$의 왼쪽은 위로 볼록한 함수보다 위쪽에, $f(x)$의 오른쪽은 아래로 볼록한 함수보다 아래쪽에 위치하게 됩니다. 따라서 위로 볼록과 아래로 볼록의 정의에 의해 변곡접선의 기울기는 항상 변곡점에서 $f(x)$위의 어느 임의의 한 점으로 그은 직선의 기울기보다 작을 수 밖에 없습니다.

따라서, $h(x)=\begin{cases}1 & (x \geq -a+2) \\ -1 & (x < -a+2)\end{cases}$입니다. 문제에서는 $\lim_{t\to -1^-} h(h(t))=1$일 때 $a$의 최솟값을 요구 했습니다.

$-a+2 > -1$이라면, 연속이므로 주어진 극한값이 1이 될 수 없습니다. 따라서 $-a+2 > -1$일 수 없습니다. $-a+2 < -1$이라면, 연속이므로 주어진 극한값은 항상 1입니다. 마지막으로, $-a+2 = -1$이라면, $h(-1)=1$이므로, 성립합니다. 위에 의해 $-a+2 \leq -1$이어야 하므로, $-a+2 = -1$일 때, $a$는 최소를 갖습니다. 따라서 $a$의 최솟값은 3입니다.

**10.** 함수 $f(x)=e^x(x^2+ax+1)$ 의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 $t$가 한 개가 되도록 하는 정수 $a$의 개수를 구하시오. [4점]

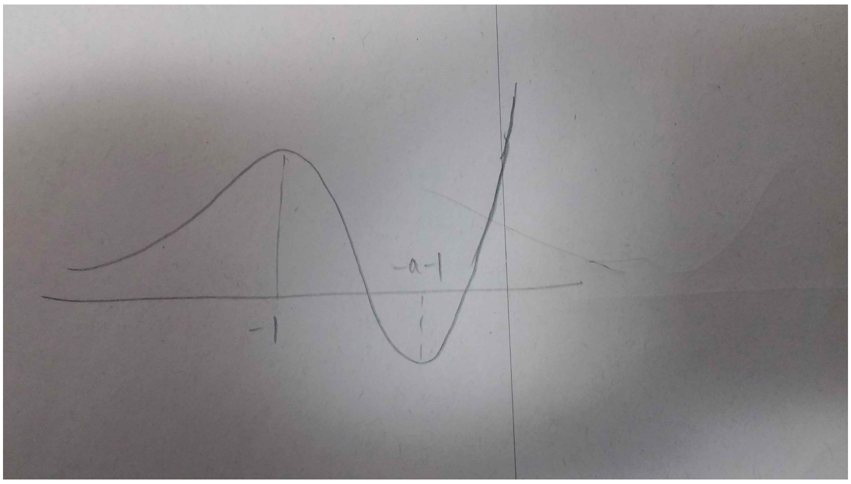
| |
|---|
| (가) $g'(t) \le 0$ |
| (나) 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1개다. |

$g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로, $g'(t)=f'(t)$입니다.
즉, (가)는 $f'(t) \le 0$이라 볼 수 있습니다.

다음으로 (나) 조건을 보면, $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 오직 1개라고 되어 있습니다. $(t,f(t))$에서는 필연적으로 만나므로 그 이후에는 만나지 않는다는 의미가 되겠습니다.

(가), (나) 조건을 종합하면 접하는 점에서의 기울기가 0보다 작거나 같으면서 그 접선이 $f(x)$와 오직 한 점에서 만난다는 얘기가 되겠습니다.

$f(x)=e^x(x^2+ax+1)$, $f'(x)=e^x(x+1)(x+a+1)$를 이용해 그래프를 대략 그리면, (말 그대로 대략)




이 조건을 만족하는 것은 변곡접선과 극소에서의 접선뿐인 게 그래프에서 육안으로 확인 가능하죠?(물론 두 극값 사이에 있는 변곡접선만 조건을 만족합니다.)

그런데 문제에서 보면 이것을 만족하는 $t$가 오직 한 가지만 존재하도록 해야 한답니다.
변곡접선은 그래프가 어떻게 바뀌든 무조건 한 실근을 갖지만 극솟값은 아닙니다.

그 이유는 만약 극솟값이 0보다 크게 되면, 두 점 이상에서 만나게 되므로, (나) 조건을 위배하게 될 수 있기 때문입니다. (0보다 작거나 같게 되면, 함수의 값이 $y=0$으로 점근하므로 만나지 않습니다.)

여기서 문제는 $-1$과 $-a-1$의 위치관계입니다. 어느 것이 더 큰지를 알 수 없기 때문에 세 가지 케이스로 나눠서 분류해야합니다.

먼저 $f(-1)=(2-a)e^{-1}$, $f(-a-1)=(a+2)e^{-a-1}$인 걸 대입해서 찾습니다.

ⅰ) $-1 < -a-1$일 때,
$f(-a-1)=(a+2)e^{-a-1}>0$이면, 조건을 만족합니다. $a > -2$이면 조건을 만족합니다.
$a$는 정수이므로, $a=-1$만 주어진 조건을 만족합니다.

ⅱ) $-1 = -a-1$일 때,
$a=0$이고, 이 때, $f(x)=(x^2+1)e^x$로 극값을 가지지 않는 개형입니다. 따라서 주어진 조건을 만족하므로, $a=0$도 답에 포함됩니다.

ⅲ) $-1 > -a-1$일 때,
$f(-1)=(2-a)e^{-1}>0$이어야 하므로, $a<2$여야 합니다. 오직 $a=1$일 때, 조건을 만족합니다.

따라서 모든 조건을 만족하는 $a$값은 $-1, 0, 1$ 총 3개입니다.