02 조합과 이항정리

확률과 통계 교과서 Review

문제 1

10명의 학생을 3명, 3명, 4명씩 나누어 세 개의 모둠을 만들려고 한다. 이들 중 특정한 2명을 같은 모둠에 배정하려고 할 때, 그 경우의 수를 구하여라. (풀이 과정을 자세히 써라.)

문제 2

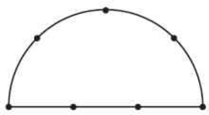
바닐라, 초콜릿, 딸기, 민트, 녹차의 5종류 맛의 아이스크림을 판매하는 가게에서 8개의 아이스크림을 고를 때, 5종류 각각의 맛이 적어도 한 개는 포함되는 경우의 수를 구하여라.

문제 3

오른쪽 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있다. 다음을 구하여라.

(1) 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수

(2) 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수



문제 4

원소가 3개인 집합 X에 대하여

$A \subset B \subset X$가 성립하도록 하는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하여라.

02 조합과 이항정리

확률과 통계 교과서 Review

문제 5

부등식 $x+y+z+w \leq 4$에 대하여 x, y, z, w가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

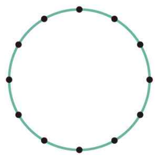
문제 6

서로 다른 5종류의 분수 연출이 있고, 각각의 연출 시간은 10초라고 한다. 5종류의 분수 연출을 모두 사용하여 60초짜리 분수 공연을 만들려고 할 때, 가능한 분수 공연의 가짓수는? (단, 같은 종류의 분수 연출이 연속되지 않게 하고, 각 연출 사이에는 쉬는 시간이 없게 한다.)

① 50 ② 120 ③ 240 ④ 600 ⑤ 1200

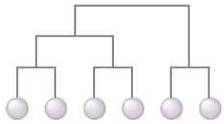
문제 7

오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 12개의 점 중에서 4개의 점을 이어서 만들 수 있는 직사각형의 개수를 구하여라.



문제 8

6개의 학급이 참가한 줄다리기 시합의 대진표가 오른쪽 그림과 같을 때, 대진표를 작성하는 방법의 수를 구하여라.



02 조합과 이항정리

문제 9

한 개의 주사위를 5번 던질 때, k번째 나오는 눈의 수를 a_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라고 하자. 이때 다음을 만족하는 경우의 수를 구하여라. (풀이 과정을 자세히 써라.)

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$

(2) $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$

(3) $a_1 \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$

문제 10

방정식 $x+y+z=8$에 대하여 물음에 답하여라.

(1) 음이 아닌 정수해는 모두 몇 가지인가?

(2) 양의 정수해는 모두 몇 가지인가?

(3) $x \ge 1,\ y \ge 2,\ z \ge 3$인 정수해는 모두 몇 가지인가?

문제 11

방정식 $x+y+z+w=22$에 대하여 그 해가 모두 홀수인 경우의 수를 구하여라. (풀이 과정을 자세히 써라.)

문제 12

서로 같은 종류의 초콜릿 4개와 사탕 5개가 있다. 초콜릿을 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 준 후, 초콜릿을 1개 받은 아이에게만 사탕을 1개 이상씩 나누어 주려고 한다. 초콜릿과 사탕을 남김없이 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.

02 조합과 이항정리

확률과 통계 교과서 Review

문제 13 6개의 바둑돌을 3개의 서로 다른 통에 나누어 담는 방법의 수를 a, 3개의 서로 같은 통에 나누어 담는 방법의 수를 b라고 할 때, $a-b$의 값을 구하여라. (단, 빈 통이 없도록 나누어 담는다.)

문제 14 등식 ${}_{4}\mathrm{C}_{4}+{}_{5}\mathrm{C}_{4}+{}_{6}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_{4}={}_{n}\mathrm{C}_{5}$를 만족시키는 n의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

문제 15 $\left(x^{7}+\frac{1}{x^{4}}\right)^{n}$의 전개식에서 상수항이 나오도록 하는 자연수 n의 값을 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a^{k}$의 값은?

① 605 ② 575 ③ 385 ④ 121 ⑤ 55

02 조합과 이항정리

문제 16 21^{41}을 400으로 나눈 나머지를 구하여라.

문제 17 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}-{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}-{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+(-1)^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{n}=0$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_{0}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_{1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=2^{2n-1}$

문제 18 $(1+x)^{5}(1+x)^{5}$의 전개식과 $(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{5}의 계수를 비교하여 $({}_{5}\mathrm{C}_{0})^{2}+({}_{5}\mathrm{C}_{1})^{2}+({}_{5}\mathrm{C}_{2})^{2}+\cdots+({}_{5}\mathrm{C}_{5})^{2}$의 값을 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ 꼴로 나타내어 보자.

02 조합과 이항정리

문제 19

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하여라.

문제 20

$(1+x)^n$의 전개식에서 x^8, x^9, x^{10},의 계수가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 양의 정수 n의 값을 모두 구하여라.

문제 21

다음은 두 자연수 m, n $(m<n)$에 대하여 ${}_mC_m+{}_{m+1}C_m+{}_{m+2}C_m+\cdots+{}_nC_m$의 값을 이항정리를 이용하여 구하는 과정이다.

> x가 0이 아닌 실수라고 하면 ${}_mC_m$은 다항식 $(1+x)^m$의 전개식에서 x^m의 계수이다.
> ⋮
> ${}_nC_m$은 다항식 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^m의 계수이다.
> 따라서 ${}_mC_m+{}_{m+1}C_m+{}_{m+2}C_m+\cdots+{}_nC_m$은 다항식 $\boxed{(가)}$의 전개식에서 x^m의 계수이므로
> ${}_mC_m+{}_{m+1}C_m+{}_{m+2}C_m+\cdots+{}_nC_m=\boxed{(나)}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}$, ${}_{n+1}C_{m+1}$

② $\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}$, ${}_{n+1}C_m$

③ $(1+x)^{n+1}-(1+x)^m$, ${}_{n+1}C_m$

④ $\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$, ${}_{n+1}C_{m+1}$

⑤ $\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$, ${}_{n+1}C_m$

02 조합과 이항정리

확률과 통계 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 확률과 통계 - 2단원. 조합과 이항정리

1. 특정한 2명의 학생을 3명의 모둠에 배정하는 경우의 수는

$${}_8C_1 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 280$$

특정한 2명의 학생을 4명의 모둠에 배정하는 경우의 수는

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 280$$

따라서 구하는 경우의 수는

$280 + 280 = 560$

2. 35

3. [정답] (1)16 (2) 31

[풀이]

(1) 직선이 되려면 7개의 점 중에서 두 점을 택해야 한다. 이때 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 두 점을 택하여 만들어지는 직선은 1개뿐이다. 따라서 구하는 직선의 개수는

$${}_7C_2 - {}_4C_2 + 1 = 16$$

(2) 삼각형이 되려면 7개의 점 중에서 세 점을 택해야 한다. 이때 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우는 제외해야 한다. 따라서 구하는 삼각형의 개수는

$${}_7C_3 - {}_4C_3 = 31$$

4. [정답] 27

[풀이]

(ⅰ) $n(B)=3$인 경우

집합 B의 개수는 ${}_3C_3 = 1$이고, 집합 A의 개수는 $2^3 = 8$이므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$1 \times 8 = 8$

(ⅱ) $n(B)=2$인 경우

집합 B의 개수는 ${}_3C_2 = 3$이고, 그 각각에 대하여 집합 A의 개수는 $2^2 = 4$이므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$3 \times 4 = 12$

(ⅲ) $n(B)=1$인 경우

집합 B의 개수는 ${}_3C_1 = 3$이고, 그 각각에 대하여 집합 A의 개수는 $2^1 = 2$이므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$3 \times 2 = 6$

(ⅳ) $n(B)=0$인 경우

집합 B의 개수는 ${}_3C_0 = 1$이고, 집합 A의 개수는 $2^0 = 1$이므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$1 \times 1 = 1$

이상에서 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$$8+12+6+1=27$$

5. [정답] 70

[풀이]

$x+y+z+w$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(ⅰ) $x+y+z+w=0$의 해의 개수는 ${}_4H_0 = {}_{4+0-1}C_0 = {}_3C_0 = 1$

(ⅱ) $x+y+z+w=1$의 해의 개수는 ${}_4H_1 = {}_{4+1-1}C_1 = {}_4C_1 = 4$

(ⅲ) $x+y+z+w=2$의 해의 개수는 ${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$

(ⅳ) $x+y+z+w=3$의 해의 개수는 ${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$

(ⅴ) $x+y+z+w=4$의 해의 개수는 ${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_4 = 35$

이상에서 구하는 해의 개수는

$1+4+10+20+35=70$

6. [정답] ⑤

[풀이]

5종류의 분수 연출을 1번씩 사용하면 총 연출 시간은 50초이므로 1종류의 분수 연출을 2번 사용해야 한다. 5종류 중에서 2번 사용하는 분수 연출을 선택하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$

이때 같은 종류의 분수 연출이 연속되지 않아야 하므로 1번씩 사용하는 4종류의 분수 연출을 일렬로 배열하고, 양 끝과 그 사이사이의 다섯 자리에 2번 사용하는 분수 연출을 넣는 방법의 수는

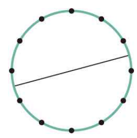
$$4!\times{}_5\mathrm{C}_2=24\times10=240$$

따라서 구하는 가짓수는

$$5\times240=1200$$

7. [정답] 15

[풀이]



오른쪽 그림과 같이 원을 두 개의 반원으로 나누어 생각하자. 하나의 반원에 있는 6개의 점 중에서 2개의 점을 택하면 다른 반원에 있는 6개의 점 중에서 2개의 점이 결정되므로 만들 수 있는 직사각형의 개수는

$${}_6\mathrm{C}_2=15$$

8. [정답] 45

[풀이]

2개의 학급씩 세 조로 나누고 부전승으로 올라갈 한 조를 정하면 되므로

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{3!}\cdot3=45$$

9. (1) $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$인 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 5개를 택하여 작은 수부터 크기순으로 나열하면 되므로

${}_6\mathrm{C}_5=6$

(2) $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$인 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_5={}_{10}\mathrm{C}_5=252$

(3) $a_1\le a_2=a_3\le a_4\le a_5$인 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=126$

10. (1) 45가지 (2) 21가지 (3) 6가지

11. x, y, z, w가 홀수이므로

$x=2i+1$, $y=2j+1$, $z=2k+1$, $w=2l+1$

(단, i, j, k, l은 음이 아닌 정수)

이라고 하면 주어진 방정식은

$2i+1+2j+1+2k+1+2l+1=22$이므로

$i+j+k+l=9$

따라서 해가 모두 홀수인 경우의 수는 i, j, k, l의 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

12. [정답] 12
[풀이]
서로 같은 종류의 초콜릿 4개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주는 방법의 수는
$${}_3\mathrm{H}_{4-3}={}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$$
이고, 이를 순서쌍으로 나타내면
$(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1)$
각 경우에서 1개의 초콜릿을 받은 아이에게만 사탕을 1개 이상씩 나누어 주는 방법의 수는
$${}_2\mathrm{H}_{5-2}={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3=4$$
따라서 구하는 방법의 수는
$$3\times4=12$$

13. [정답] 7
[풀이]
6개의 바둑돌을 3개의 서로 다른 통에 빈 통이 없도록 넣는 방법의 수는
$${}_3\mathrm{H}_{6-3}={}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$$
이므로 $a=10$
또, 6개의 바둑돌을 3개의 서로 같은 통에 빈 통이 없도록 넣는 방법의 수는
$$P(6,\ 3)=3$$
이므로 $b=3$
따라서 $a-b=10-3=7$이다.

14. [정답] ④
[풀이]
${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$를 이용하면
$${}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_4$$
$$={}_5\mathrm{C}_5+{}_5\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_4$$
$$={}_6\mathrm{C}_5+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_4$$
$$={}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_4$$
$$\vdots$$
$$={}_{12}\mathrm{C}_5+{}_{12}\mathrm{C}_4={}_{13}\mathrm{C}_5$$
따라서 $n=13$이다.

15. [정답] ①
[풀이]
$\left(x^7+\dfrac{1}{x^4}\right)^n$의 전개식의 일반항은
$${}_n\mathrm{C}_r(x^7)^{n-r}\left(\frac{1}{x^4}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r x^{7n-11r}$$
이므로 상수항은 $7n-11r=0$, 즉 $n=\dfrac{11}{7}r$
인 경우이다.
이때 7과 11은 서로소이므로 r는 7의 배수이고, n은 11의 배수이다. 따라서
$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}11k=11\times\frac{10\times11}{2}=605$$

16. [정답] 21
[풀이]
이항정리를 이용하여 $(1+x)^{41}$을 전개하면
$$(1+x)^{41}={}_{41}C_0+{}_{41}C_1x+{}_{41}C_2x^2+\cdots+{}_{41}C_{41}x^{41}$$
이 식에 $x=20$을 대입하면
$$21^{41}=(1+20)^{41}$$
$$={}_{41}C_0+{}_{41}C_1\cdot 20+{}_{41}C_2\cdot 20^2+\cdots+{}_{41}C_{41}\cdot 20^{41}$$
이때 세 번째 항부터는 모두 400으로 나누어떨어지므로 21^{41}을 400으로 나눈 나머지는
$${}_{41}C_0+{}_{41}C_1\cdot 20=1+41\cdot 20=821$$
을 400으로 나눈 나머지와 같다.
따라서 구하는 나머지는 **21**이다.

17. [정답] (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
[풀이]
(1) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$
의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$$
(2) $(1+x)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}$ …… ㉡
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
${}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=0$ …… ㉢
㉡+㉢을 하면
$2({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n})=2^{2n}$
이므로
${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$ …… ㉣
㉡−㉣을 하면
${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

18. [정답] ${}_{10}C_5$
[풀이]
$(1+x)^5(1+x)^5$
$=({}_5C_0+{}_5C_1x+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+{}_5C_5x^5)$
$\times({}_5C_0+{}_5C_1x+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+{}_5C_5x^5)$
에서 x^5의 계수는
$${}_5C_0\times{}_5C_5+{}_5C_1\times{}_5C_4+{}_5C_2\times{}_5C_3+\cdots+{}_5C_5\times{}_5C_0$$
이때 ${}_5C_5={}_5C_0$, ${}_5C_4={}_5C_1$, ${}_5C_3={}_5C_2$, $\cdots$, ${}_5C_0={}_5C_5$이므로 x^5의 계수는
$$({}_5C_0)^2+({}_5C_1)^2+({}_5C_2)^2+\cdots+({}_5C_5)^2$$
이다.
한편, $(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^5의 계수는 ${}_{10}C_5$이므로
$$({}_5C_0)^2+({}_5C_1)^2+({}_5C_2)^2+\cdots+({}_5C_5)^2={}_{10}C_5$$

02 조합과 이항정리

19. [정답] 165

[풀이]

주어진 식은 첫째항이 $(1+x)$이고 공비가 $(1+x)$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$$
$$=\frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$$

이때 x^2의 계수는 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^3의 계수와 같고, $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_{11}\mathrm{C}_3$이다.

따라서 x^2의 계수는

$${}_{11}\mathrm{C}_3=165$$

20. 14, 23

21. ①