

05 평면운동

기하와 벡터 교과서 Review

문제 1

시각 t 에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 x 좌표와 y 좌표가

$$x = \ln t, \quad y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

일 때, 시각 $t = \frac{1}{e}$ 에서 $t = e$ 까지 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하여라.

문제 2

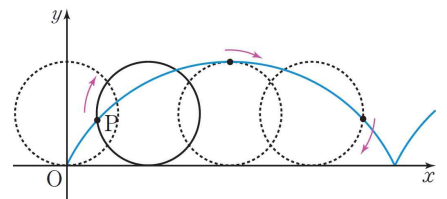
시각 t 에서 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 속도 \vec{v} 가

$$\vec{v} = (e^t (\sin t + \cos t), e^t (\sin t - \cos t))$$

일 때, 시각 $t = 0$ 에서 $t = \pi$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

문제 3

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10 cm인 원이 좌표평면에서 x 축을 따라 매초 1 라디안씩 회전하며 굴러간다. 원 위의 한 점 P가 원점에서 x 축과 접한 상태로 출발할 때, t 초 후 점 P의 속력을 구하여라.



문제 4

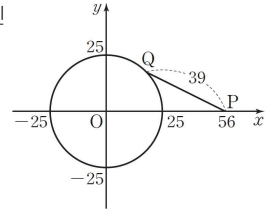
북동쪽 방향으로 $10\sqrt{2}$ km/h의 속력으로 움직이고 있는 배 A와 서쪽 방향으로 10 km/h의 속력으로 움직이고 있는 배 B가 있다. 배 A에 타고 있는 동훈이가 배 B를 바라보고 있을 때 동훈이가 관찰하는 배 B의 속력을 구하여라. (단, 강물이 흐르는 방향과 속력은 무시한다.)

05 평면운동

기하와 벡터 교과서 Review

문제 5

다음 그림과 같이 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 25 cm인 원 위에 길이가 39 cm인 선분 PQ가 걸쳐 있다. 선분 PQ가 원 위에 걸치면서 미끄러질 때, 한 끝점 Q는 원 위에 있고, 다른 한 끝점 P는 x 축의 양의 방향을 따라 매초 2 cm의 속도로 움직인다. 점 P가 (56, 0)에 위치하는 순간 점 Q의 속력을 구하여라. (단, 단위길이 1은 1 cm로 한다.)



문제 6

좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

$$x = 2 \cos^2 t - 1, \quad y = 2 \sin t \cos t$$

로 나타날 때, $t = 0$ 에서 $t = 2\pi$ 까지 점 P의 이동거리를 구하여라.

문제 7

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $f(1) = 0$, $f(2) = \sqrt{3}$ 을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

의 최솟값을 구하여라.

문제 8

좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t$$

로 나타난다. 점 P의 $t = 0$ 에서 $t = a$ 까지 이동 거리를 $S(a)$ 라고 할 때, $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ 를 구하여라.

05 평면운동

기하와 벡터 교과서 Review

문제 9

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 좌표 (x, y) 가

$$x = -1 + 2\sin t, \quad y = t + 2\cos t$$

로 나타내어질 때, 점 P의 속력의 최댓값을 구하여라.

문제 10

곡선 $y = \frac{1}{3}(4x^2 - 1)\sqrt{4x^2 - 1}$ 의 $x = 1$ 에서 $x = 3$ 까지의 길이를 구하여라.

문제 11

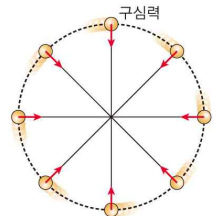
원운동하는 물체 P를 원의 중심이 원점에 오도록 좌표평면 위에 위치시켰을 때, 물체 P의 시간 t 초에서의 위치 $P(x, y)$ 에 대하여

$$x = 3 \cos 2t, \quad y = 3 \sin 2t$$

가 성립한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 물체 P의 시간 t 초에서의 가속도의 크기 $|\vec{a}|$ 를 구하여라.

(2) 원운동을 하는 물체를 원의 중심쪽으로 잡아당기는 힘을 구심력이라고 하며, 이때 물체에 작용하는 힘의 크기는 물체의 질량과 가속도의 크기의 곱이다. 물체 P의 질량이 5 kg일 때, 구심력의 크기를 구하여라. (단, 좌표평면의 한 눈금의 크기는 1 m이고, 힘의 단위는 N(뉴턴)이다.)



05 평면운동

기하와 벡터 교과서 Review

문제 12

좌표평면 위의 점 (x, y) 가 다음과 같을 때, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 의 범위에서 이 점이 그리는 곡선의 길이를 구하여라.

$$\begin{cases} x = \theta \cos \theta - \sin \theta \\ y = \cos \theta + \theta \sin \theta \end{cases}$$

문제 13

좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)에서의 위치가

$$x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t$$

일 때, 점 P의 속력이 최대가 될 때까지 점 P가 실제로 움직인 거리를 구하여라.

문제 14

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치벡터가 $\vec{p} = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)$ 일 때, 옳은 것만을 보기에서 모두 고른 것은?

—| 보 기 |—

- ㄱ. $t=0$ 에서 벡터 \vec{p} 와 점 P의 속도 \vec{v} 는 서로 수직이다.
- ㄴ. 임의의 시각 t 에 대하여 벡터 \vec{p} 의 크기와 점 P의 속도 \vec{v} 의 크기는 서로 같다.
- ㄷ. 임의의 시각 t 에 대하여 벡터 \vec{p} 와 점 P의 가속도 \vec{a} 는 서로 같다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

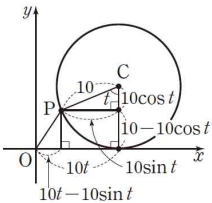
05 평면운동

기하와 벡터 교과서 Review

<정답 및 해설> 기하와 벡터 -

5단원. 평면운동

1.
 $e - \frac{1}{e}$
2.
 $|\vec{v}| = \sqrt{\{e^t(\sin t + \cos t)\}^2 + \{e^t(\sin t - \cos t)\}^2}$
 $= e^t \sqrt{2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{2} e^t$
 따라서 점 P가 움직인 거리는
 $\int_0^\pi |\vec{v}| dt = \int_0^\pi \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} [e^t]_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$

3.
 오른쪽 그림과 같이 원 위의 한 점 P가 원점 O에 있다가 t초 후에 t라디안만큼 회전하므로 점 P의 좌표는
- 

$$P(10t - 10 \sin t, 10 - 10 \cos t)$$

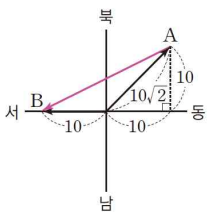
점 P의 속도를 \vec{v} 라고 하면

$$\vec{v} = (10 - 10 \cos t, 10 \sin t)$$

따라서 $|\vec{v}|$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(10 - 10 \cos t)^2 + (10 \sin t)^2} \\ &= \sqrt{100 - 200 \cos t + 100(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 10\sqrt{2(1 - \cos t)} \text{ (cm/s)} \end{aligned}$$

4.
 배 A에 타고 있는 동훈이가 관찰하는 배 B의 진행 방향은 오른쪽 그림과 같다. (가)



따라서 구하는 속력은

$$\begin{aligned} &\sqrt{20^2 + 10^2} \\ &= 10\sqrt{5} \text{ (km/h)} \end{aligned}$$

..... (나)

5.
 P(s, 0), Q(x, y)라고 하면
 $x^2 + y^2 = 25^2$ ①
 $(x-s)^2 + y^2 = 39^2$ ②
 ①, ②에서 y를 소거하면
 $s^2 - 2xs = 896$ ③
 s=56일 때, ①, ③에서
 $x=20, y=15$
 점 P가 매초 2 cm의 속도로 움직이므로 시각 t초에 대하여

$$\frac{ds}{dt} = 2$$

③의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2s \frac{ds}{dt} - 2s \frac{dx}{dt} - 2x \frac{ds}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{s-x}{s}\right) \frac{ds}{dt}$$

s=56, x=20, $\frac{ds}{dt} = 2$ 일 때, $\frac{dx}{dt}$ 의 값은

$$\left(\frac{56-20}{56}\right) \times 2 = \frac{9}{7}$$

①의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

x=20, y=15이고, $\frac{dx}{dt}$ 의 값이 $\frac{9}{7}$ 일 때, $\frac{dy}{dt}$ 의 값은

$$-\frac{20}{15} \times \frac{9}{7} = -\frac{12}{7}$$

따라서 구하려는 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(-\frac{12}{7}\right)^2} = \frac{15}{7} \text{ (cm/초)}$$

6.
 $\frac{dx}{dt} = -4 \sin t \cos t, \frac{dy}{dt} = 2(\cos^2 t - \sin^2 t)$
 이므로 점 P의 속력은 2이다. 따라서 t=0부터 t=2π까지 이동거리는 4π이다.

05 평면운동

기하와 벡터 교과서 Review

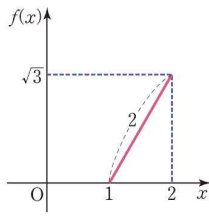
7.

1. $\int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$ 는 구간

$1 \leq x \leq 2$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 의미한다.

$f(1)=0, f(2)=\sqrt{3}$ 을 만족하는 곡선의 길이의 최솟값은 오른쪽 그림과 같이 직선일 때이다.

따라서 최솟값은 $\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ 이다.



8.

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t}(-\cos t - \sin t),$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-t}(-\sin t + \cos t)$$

이므로 속력은

$$e^{-t} \sqrt{(-\cos t - \sin t)^2 + (-\sin t + \cos t)^2} = \sqrt{2}e^{-t}$$

따라서

$$S(a) = \int_0^a \sqrt{2}e^{-t} dt = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{e^a}\right)$$

이므로

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{e^a}\right) = \sqrt{2}$$

9.

$\frac{dx}{dt} = 2\cos t, \frac{dy}{dt} = 1 - 2\sin t$ 이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 \vec{v} 라고 하면

$$\vec{v} = (2\cos t, 1 - 2\sin t)$$

즉, 점 P의 시각 t에서의 속력 $|\vec{v}|$ 는

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(2\cos t)^2 + (1 - 2\sin t)^2} \\ &= \sqrt{5 - 4\sin t} \end{aligned}$$

이므로 $\sin t = -1$ 일 때, $|\vec{v}|$ 는 최대이다.

따라서 점 P의 속력의 최댓값은

$$\sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

답 3

10.

$$y = \frac{1}{3}(4x^2 - 1)\sqrt{4x^2 - 1} = \frac{1}{3}(4x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \text{ 이므로}$$

$$y' = 4x(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

이때, 주어진 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + \{4x(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\}^2} dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1 + 16x^2(4x^2 - 1)} dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{64x^4 - 16x^2 + 1} dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{(8x^2 - 1)^2} dx$$

$$= \int_1^3 (8x^2 - 1) dx$$

$$= \left[\frac{8}{3}x^3 - x \right]_1^3$$

$$= \left(\frac{8}{3} \times 3^3 - 3 \right) - \left(\frac{8}{3} - 1 \right)$$

$$= 69 - \frac{5}{3}$$

$$= \frac{202}{3}$$

답 $\frac{202}{3}$

11.

$$(1) \frac{dx}{dt} = -6 \sin 2t, \frac{dy}{dt} = 6 \cos 2t$$

이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -12 \cos 2t, \frac{d^2y}{dt^2} = -12 \sin 2t$$

따라서 구하는 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(-12 \cos 2t)^2 + (-12 \sin 2t)^2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$(2) 5 \times 12 = 60(\text{N})$$

$$12. \frac{\pi^2}{18}$$

$$13. \frac{3}{2}$$

$$14. \textcircled{5}$$