02 평면곡선의 접선

기하와 벡터 교과서 Review

문제 1

곡선 $x^3-2x^2y+y^2=9$ 위의 한 점 $(1,\ a)$에서 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{11}{6}$일 때, a의 값을 구하여라.

문제 2

곡선 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=a$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 구하여라. (단, a는 상수이다.)

문제 3

함수 $\dfrac{\pi}{2}x=y+\sin(xy)$로 주어지는 그래프 위의 점 $(2,\ \pi)$에서 접선의 기울기를 구하는 풀이과정과 답을 서술하여라.

문제 4

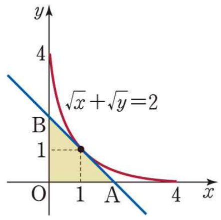
함수 $y=x^x\ (x>0)$에 대하여 $x=1$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.

02 평면곡선의 접선

기하와 벡터 교과서 Review

문제 5

오른쪽 그림과 같이 곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. 이때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라.

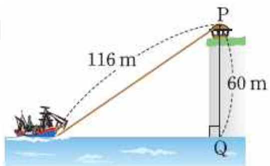


문제 6

곡선 $e^x+e^y=e+1$ 위의 점 P$(1,\ 0)$에서의 접선을 l_1이라 하고, 점 P를 지나고 직선 l_1에 수직인 직선을 l_2라고 하자. 이때 두 직선 l_1과 l_2 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

문제 7

오른쪽 그림과 같이 수면으로부터 높이가 60 m인 P 지점에서 길이가 116 m인 로프로 배를 끌어당기기 시작하였다. 배를 끌어당긴 지 t초 후의 배에서 P 지점까지의 거리를 x m, 배에서 Q 지점까지의 거리를 y m라고 하자. $\dfrac{dx}{dt}=-8$로 일정할 때, 배를 끌어당긴 지 2초 후의 $\dfrac{dy}{dt}$의 값을 구하여라.



문제 8

다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ -\sqrt{3})$에서의 접선

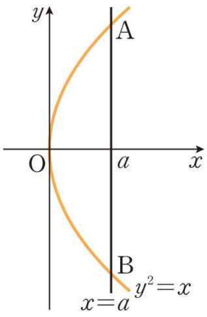
(3) 쌍곡선 $2x^2-y^2=4$ 위의 점 $(-2,\ 2)$에서의 접선

02 평면곡선의 접선

기하와 벡터 교과서 Review

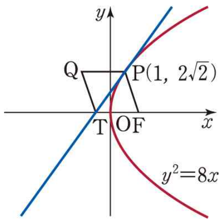
문제 9

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = x$와 직선 $x = a$ $(a > 0)$가 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. 두 점 A, B에서의 접선에 각각 수직인 직선을 l_1, l_2라고 하면 l_1과 l_2가 서로 수직으로 만난다. 이때 a의 값을 구하여라.



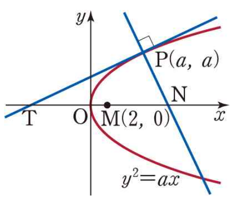
문제 10

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 2\sqrt{2})$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 T라고 하자. 포물선 $y^2 = 8x$의 초점 F와 제2사분면 위의 점 Q에 대하여 사각형 TFPQ가 평행사변형일 때, 점 Q의 x좌표를 구하여라.



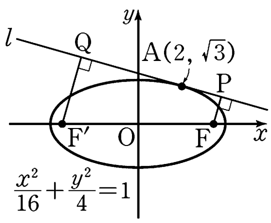
문제 11

오른쪽 그림에서 직선 PT는 포물선 $y^2 = ax\,(a > 0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, a)$에서의 접선이고, 직선 PN은 직선 PT에 수직이다. 선분 TN의 중점이 $\mathrm{M}(2, 0)$일 때, 실수 a의 값을 구하여라.



문제 12

오른쪽 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 $\mathrm{A}(2, \sqrt{3})$에서의 접선을 l이라 하고, 이 타원의 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자. 이때 $\overline{\mathrm{FP}} \cdot \overline{\mathrm{F'Q}}$의 값을 구하여라.



02 평면곡선의 접선

기하와 벡터 교과서 Review

문제 13

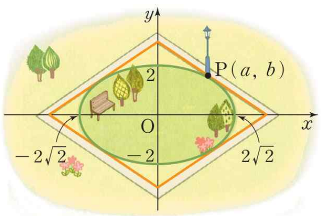
포물선 $y^2=4x$와 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 만나는 점에서 두 곡선에 각각 그은 접선이 서로 수직일 때, 상수 b에 대하여 b^2의 값을 구하여라.

문제 14

타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

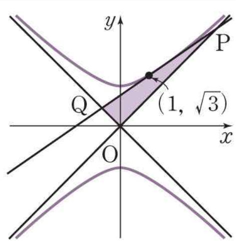
문제 15

다음 그림과 같이 타원 모양의 공원에 접하는 직선 도로를 만들어 도로와 공원이 접하는 지점에 가로등을 세우려고 한다. 타원의 중심을 원점으로 하는 좌표축을 정하면 도로로 둘러싸인 부분의 넓이는 $16\sqrt{2}\,\text{km}^2$이다. 가로등이 세워질 지점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라고 할 때, 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라. (단, 도로의 폭은 생각하지 않는다.)



문제 16

다음 그림과 같은 쌍곡선 $x^2-y^2=-2$ 위의 한 점 $(1,\ \sqrt{3})$에서의 접선과 이 쌍곡선의 점근선의 교점을 각각 P, Q라 하고 원점을 O라고 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하여라.

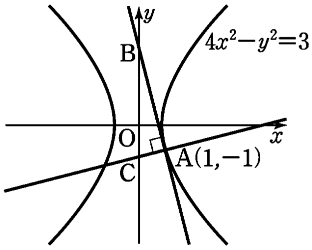


02 평면곡선의 접선

기하와 벡터 교과서 Review

문제 17

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $4x^2-y^2=3$ 위의 점 A$(1,\ -1)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라고 한다. 이 접선에 수직이고 점 A를 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



문제 18

매개변수로 나타낸 곡선 $x=t^4,\ y=2t^2+kt-2k^2$에서 $t=1$일 때, 곡선의 접선의 기울기가 2이다. 상수 k의 값과 접선의 방정식을 구하고 그 과정을 서술하여라.

문제 19

매개변수로 나타낸 함수 $x=\cos^3\theta,\ y=2\sin^3\theta$에 대하여 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.

문제 20

두 함수 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\alpha \\ y=2\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$ 와 $\begin{cases} x=a\tan\beta \\ y=b\sec\beta \end{cases}$가 나타내는 곡선이 점 P$(1,\ 2)$에서 만나고 점 P에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직일 때, 두 양수 $a,\ b$에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라. (단, $0\le\alpha<2\pi,\ 0\le\beta<2\pi$이다.)

02 평면곡선의 접선

기하와 벡터 교과서 Review

문제 21

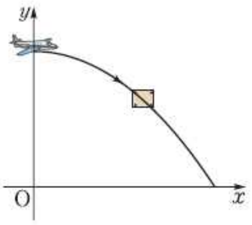
매개변수 t로 나타낸 함수

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

에 대하여 $t=\sqrt{2}-1$에 대응하는 점에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하여라. (이 때 점 O는 원점이다.)

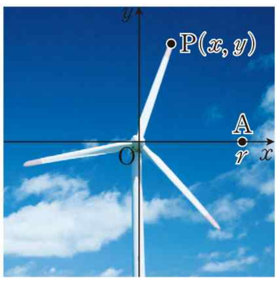
문제 22

어느 구호 단체에서 비행기를 이용하여 사람들에게 보급품을 공급하려고 한다. 비행기에서 떨어진 지 t초 후의 보급품의 경로가 오른쪽 그림과 같이 곡선 $x=36t$, $y=-4.9t^2+150$일 때, 이 보급품이 땅에 떨어지는 순간의 $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하여라.



문제 23

풍력 발전기의 날개가 매초 θ 라디안만큼 시계 반대 방향으로 회전하고 있다. 오른쪽 그림과 같이 날개의 중심이 원점이 되도록 좌표평면을 잡고, 한 날개의 끝점을 점 P라고 하자. $\overline{OP}=r$이고, 점 $A(r,\ 0)$에서 출발한 점 P의 t초 후의 좌표를 $(x,\ y)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) x, y를 각각 매개변수 t로 나타내어라.

(2) $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

02 평면곡선의 접선

기하와 벡터 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 기하와 벡터 – 2단원. 평면곡선의 접선

1. -2

2. 점 $(1,\ 2)$가 곡선 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=a$ 위의 점이므로

$$a=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{5}{2}$$

$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}$의 양변에 xy를 곱하여 정리하면

$$x^2+y^2-\frac{5}{2}xy=0\ (\text{단, } x\neq 0,\ y\neq 0)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-\frac{5}{2}y-\frac{5}{2}x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(2y-\frac{5}{2}x\right)\frac{dy}{dx}=-2x+\frac{5}{2}y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+\frac{5}{2}y}{2y-\frac{5}{2}x}\ \left(\text{단, } 2y\neq\frac{5}{2}x\right)$$

위의 식에 $x=1,\ y=2$를 대입하면 구하는 접선의 기울기는

$$\frac{-2\times1+\frac{5}{2}\times2}{2\times2-\frac{5}{2}\times1}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

3.
주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{\pi}{2}=\frac{dy}{dx}+\cos(xy)\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$x=2,\ y=\pi$를 대입하면

$$\frac{\pi}{2}=\frac{dy}{dx}+\cos 2\pi\cdot\left(\pi+2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\pi}{6}$$

4. $y=x^x$의 양변에 밑이 e인 로그를 취하면

$$\ln y=\ln x^x,\ \ln y=x\ln x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$$

따라서 $x=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$1\times(1+\ln 1)=1$$

5. 2

6. $e^x+e^y=e+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x+e^y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^x}{e^y}$$

점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$에서의 접선 l_1의 기울기는

$$-\frac{e^1}{e^0}=-e$$

이므로 접선 l_1의 방정식은

$$y=-e(x-1)$$

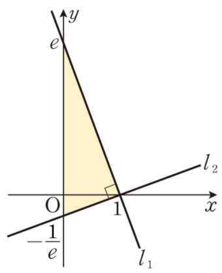
점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$을 지나고 접선 l_1에 수직인 직선 l_2의 기울기는

$$\frac{1}{e}$$

이므로 직선 l_2의 방정식은

$$y=\frac{1}{e}(x-1)$$

두 직선 $l_1,\ l_2$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$$\frac{1}{2}\times\left(e+\frac{1}{e}\right)\times1\ =\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$$

7. $y^2+60^2=x^2$이므로

$$2y\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{8x}{y}\ \ (y\neq 0)$$

$t=2$일 때, $x=116-8\cdot2=100$이므로 $y=80$

따라서 구하는 $\dfrac{dy}{dt}$의 값은

$$-\frac{8\cdot100}{80}=-10$$

8. (1) $x-2y+2=0$

(2) $x-2\sqrt{3}y-8=0$

(3) $2x+y+2=0$

9. $y^2=x$에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}$

두 점 $\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a}),\ \mathrm{B}(a,\ -\sqrt{a})$에서의 접선의 기울기를 각각 $m_1,\ m_2$라고 하면

$$m_1=\frac{1}{2\sqrt{a}},\ m_2=-\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

따라서 직선 l_1과 직선 l_2의 기울기는 각각 $-2\sqrt{a},\ 2\sqrt{a}$이고 l_1과 l_2가 서로 수직이므로

$$-2\sqrt{a}\times2\sqrt{a}=-1$$

$$4a=1,\ a=\frac{1}{4}$$

10. -2

11. 8

12.
타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$위의 점 $\mathrm{A}(2,\ \sqrt{3})$에서의 접선 l의 방정식은

$$\frac{2x}{16}+\frac{\sqrt{3}y}{4}=1,\ x+2\sqrt{3}y-8=0$$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(2\sqrt{3},\ 0),\ \mathrm{F}'(-2\sqrt{3},\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{FP}}\cdot\overline{\mathrm{F'Q}}=\frac{8-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\cdot\frac{8+2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=4$$

02 평면곡선의 접선

13. $y^2=4x$에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{16y}\ (\text{단, } y\neq 0) \quad \cdots\cdots ㉮$$

포물선과 타원의 교점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 교점에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{2}{y_1}\times\left(-\frac{b^2x_1}{16y_1}\right)=-1$$

$$b^2=\frac{8y_1^2}{x_1} \quad \cdots\cdots ㉯$$

이때 점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=4x_1$$

즉, $\frac{y_1^2}{x_1}=4$이므로

$$b^2=\frac{8y_1^2}{x_1}=8\times 4=32 \quad \cdots\cdots ㉰$$

14. 타원 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $y=x+5$ 사이의 거리가 최대라고 하면 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기 는 1이다.

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{3}+\frac{by}{6}=1$

$y=-\frac{2a}{b}x+\frac{6}{b}$

따라서 $-\frac{2a}{b}=1$이므로

$b=-2a \quad \cdots\cdots ㉠$

점 $(a,\ b)$가 타원 위에 있으므로

$\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{6}=1,\quad b^2=6-2a^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$ 또는 $a=-1,\ b=2$

점 $(1,\ -2)$와 직선 $y=x+5$ 사이의 거리는

$\frac{|1+2+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$

점 $(-1,\ 2)$와 직선 $y=x+5$ 사이의 거리는

$\frac{|-1-2+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

15. 타원의 장축의 길이는 $4\sqrt{2}$이고, 단축의 길이는 4이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$이다. 이 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$ (단, $y\neq 0$)

즉, 타원 위의 한 점 $P(a,\ b)$에서의 접선을 l이라고 하면 기울기가 $-\frac{a}{2b}$이므로 직선 l의 방정식은

$y-b=-\frac{a}{2b}(x-a)$

$y=-\frac{a}{2b}x+\frac{a^2+2b^2}{2b}$

이때 점 $P(a,\ b)$는 타원 위의 점이므로

$\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{4}=1,\ a^2+2b^2=8$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-\frac{a}{2b}x+\frac{8}{2b}$

$y=-\frac{a}{2b}x+\frac{4}{b}$

직선 l의 x절편, y절편이 각각 $\frac{8}{a}$, $\frac{4}{b}$이고 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$16\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=4\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{a}\times\frac{4}{b}=4\sqrt{2},\ ab=2\sqrt{2}$

16. 주어진 식에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$이므로 점 $(1,\ \sqrt{3})$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

즉, 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 점 $(1,\ \sqrt{3})$을 지나는 접선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1),\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

이 접선과 두 점근선 $y=x,\ y=-x$의 교점은

$\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}=x$에서 $x=\sqrt{3}+1$

또, $\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}=-x$에서 $x=-\sqrt{3}+1$

$P(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}+1),\ Q(-\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1)$

$\overline{OP}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\overline{OQ}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

두 점근선이 서로 수직이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{OP}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2$

17. $\frac{17}{8}$

18. $\frac{dx}{dt}=4t^3,\ \frac{dy}{dt}=4t+k$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t+k}{4t^3}\ (t\neq 0)$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$\frac{4+k}{4}=2,\ k=4$

$t=1$일 때 $x=1,\ y=2\times 1^2+4\times 1-2\times 4^2=-26$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+26=2(x-1)$, 즉 $2x-y-28=0$이다.

19. -2

02 평면곡선의 접선

20. 6

21.

· $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}}=-\dfrac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{x}{y}\ (y\neq 0)$

$t=\sqrt{2}-1$일 때, $x=y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=-1$

$t=\sqrt{2}-1$에 대응하는 점에서의 접선의 방정식은

$y=-\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y=-x+\sqrt{2}$

따라서 $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ \sqrt{2})$이고 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$

22. $\dfrac{dx}{dt}=36$, $\dfrac{dy}{dt}=-9.8t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{49}{180}t$

보급품이 땅에 떨어지는 순간은 $y=0$일 때이므로

$-4.9t^2+150=0$, $\quad t^2=\dfrac{150}{4.9}$

$t=\dfrac{10\sqrt{15}}{7}\ \ (t\geq 0)$

따라서 구하는 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$-\dfrac{49}{180}\cdot\dfrac{10\sqrt{15}}{7}=-\dfrac{7\sqrt{15}}{18}$

23. (1) t초 후의 $\angle\mathrm{POA}$의 크기는 θt이므로

$$\begin{cases} x=r\cos\theta t \\ y=r\sin\theta t \end{cases}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-r\theta\sin\theta t$

$\dfrac{dy}{dt}=r\theta\cos\theta t$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{r\theta\cos\theta t}{r\theta\sin\theta t}=-\cot\theta t$