09 로그

수학Ⅱ 교과서 Review

문제 1

다음은 실수 $m,\ n\ (m \neq 0)$에 대하여 $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b\ (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$가 성립함을 증명한 것이다.

| 증 명 |

$x = \log_{a^m} b^n$으로 놓으면

$b^n = \boxed{\quad(\text{가})\quad} = (a^x)^{\boxed{(\text{나})}}$이므로

$a^x = \boxed{\quad(\text{다})\quad}$

따라서 $x = \log_a \boxed{\quad(\text{다})\quad} = \dfrac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣어라.

문제 2

$\log_2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log_2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\log_2\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(1-\dfrac{1}{32}\right)$의 값을 구하여라.

문제 3

집합 $A=\{(x,\ \log_2 x)\mid x>0\text{인 실수}\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $(a,\ b)\in A$이면 $(2a,\ b+1)\in A$

ㄴ. $\left(\dfrac{a}{2},\ b\right)\in A$이면 $(a,\ b-1)\in A$

ㄷ. $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면 $(ac,\ b+d)\in A$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 4

다음 등식을 만족하는 상수 a의 값은?

$$\log_a(\log_2 3)+\log_a(\log_3 5)+\log_a(\log_5 8) = -\frac{1}{2}$$

① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{1}{8}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

09 로그

수학Ⅱ 교과서 Review

문제 5

이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\log(\alpha+1)+\log(\beta+1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

문제 6

$a>0$, $a\neq1$인 실수 a와 세 양의 실수 x, y, z에 대하여 $x^2=y^3=z^4=a$일 때, $\log_a xyz$의 값을 구하여라.

문제 7

이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값을 구하고 그 과정을 서술하여라.

문제 8

자연수 N에 대하여 $\log N$의 정수 부분을 $f(N)$이라고 할 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(1024)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

09 로그

수학II 교과서 Review

문제 9

$\log 2 = 0.3010$임을 이용하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 5^{24}은 몇 자리 자연수인가?

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$은 소수 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는가?

문제 10

$\log A = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)에서 n, α가 이차방정식 $5x^2 - 16x + k = 0$의 두 근일 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

문제 11

$\log_2 6$의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라고 할 때, $2^x + 2^y$의 값을 구하여라.

문제 12

$1 < x < 1000$이고, $\log x$와 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분이 서로 같을 때, x의 값을 구하여라.

09 로그

수학II 교과서 Review

문제 13

$\log x$의 정수 부분이 2이고 $\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1일 때, $\log\sqrt{x}$의 소수 부분을 구하여라.

문제 14

2006년 매출액 5억 원이었던 한 인터넷 쇼핑몰의 2014년 매출액은 500억 원이 되었다고 한다. 매년 일정한 비율로 매출액이 증가하였다고 할 때, 이 쇼핑몰의 매출액이 매년 몇 %씩 증가하였는지 구하여라. (단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 계산한다.)

문제 15

밀폐된 용기 속의 액체에서 증발과 응축이 계속하여 같은 속력으로 일어나는 상태일 때의 증기압을 포화 증기압이라고 한다. 밀폐된 용기 속에 있는 어떤 액체의 경우 포화 증기압 $P\,\mathrm{mmHg}$와 용기 속의 온도 t℃ 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log P = 8.11 - \frac{1750}{t+235} \quad (\text{단, } 0 < t < 60)$$

용기 속의 온도가 15℃일 때의 포화 증기압을 P_1, 45℃일 때의 포화 증기압을 P_2라고 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$의 값을 구하여라. (단, mmHg는 압력을 나타내는 단위이다.)

문제 16

기상청에서 A지역에 폭우가 내린 날의 10시간 동안의 강우량을 분석해 보았더니 비가 내리기 시작하여 t시간 동안 내린 비의 양 $P\,\mathrm{mm}$는 다음과 같았다.

$$P = 21t + 10\log\frac{t}{10}$$

이때, 10시간 동안 내린 비의 양은 처음 1시간 동안 내린 비의 양의 몇 배인지 구하여라.

09 로그

〈정답 및 해설〉

1. ㈎: $(a^m)^x$, ㈏: m, ㈐: $b^{\frac{n}{m}}$

2. -5

3. ③
ㄱ. $(a,\ b)\in A$이면 $b=\log_2 a$이므로
$\log_2 2a=\log_2 a+1=b+1$
따라서 $(2a,\ b+1)\in A$이다. (참)
ㄴ. $\left(\frac{a}{2},\ b\right)\in A$이면 $b=\log_2\frac{a}{2}$이므로
$b=\log_2 a-\log_2 2=\log_2 a-1$
$\log_2 a=b+1$
따라서 $(a,\ b-1)\not\in A$이다. (거짓)
ㄷ. $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면
$b=\log_2 a$,
$d=\log_2 c$
이므로
$\log_2 ac=\log_2 a+\log_2 c=b+d$
따라서 $(ac,\ b+d)\in A$이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4. ①

5. ③

6. $\frac{13}{12}$

7. $x^2+4x+1=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_2 a+\log_2 b=-4$, $\log_2 a\cdot\log_2 b=1$

$$\log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$$
$$=\frac{(-2\cdot\log_2 a+\log_2 b)^2-2\cdot\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$$
$$=\frac{(-4)^2-2\cdot 1}{1}=14$$
따라서 주어진 식의 값은 14이다.

8. (i) $1\le N<10$일 때,
$0\le\log N<1$이므로 $f(N)=0$
(ii) $10\le N<100$일 때,
$1\le\log N<2$이므로 $f(N)=1$
(iii) $100\le N<1000$일 때,
$2\le\log N<3$이므로 $f(N)=2$
(iv) $1000\le N\le 1024$일 때,
$3\le\log N<4$이므로 $f(N)=3$
이상에서
$f(1)+f(2)+\cdots+f(1024)$
$=0\cdot 9+1\cdot 90+2\cdot 900+3\cdot 25=1965$

9. (1) $\log 5^{24}=24\log\frac{10}{2}=24\times(1-0.3010)=16.776$
이므로 $16<\log 5^{24}<17$, 즉 $10^{16}<5^{24}<10^{17}$
따라서 5^{24}은 17자리 자연수이다.
(2) $\log\left(\frac{1}{4}\right)^{20}=-40\log 2=-40\times 0.3010=-12.04$
$-13<\log\left(\frac{1}{4}\right)^{20}<-12$, 즉 $10^{-13}<\left(\frac{1}{4}\right)^{20}<10^{-12}$
따라서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$은 소수 13째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

10. 이차방정식 $5x^2-16x+k=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계로부터
$n+\alpha=\frac{16}{5}=3+\frac{1}{5}$ ……㉠
$n\alpha=\frac{k}{5}$ ……㉡
이때 n은 정수이고 $0\le\alpha<1$이므로 ㉠에서
$n=3$, $\alpha=\frac{1}{5}$
이것을 ㉡에 대입하면
$3\times\frac{1}{5}=\frac{k}{5}$, $k=3$

11. $2=\log_2 4<\log_2 6<\log_2 8=3$이므로
$x=2$, $y=\log_2 6-2$
따라서 $2^x+2^y=2^2+2^{\log_2 6-2}$
$=4+2^{\log_2 6}\times 2^{-2}=4+6\times\frac{1}{4}=\frac{11}{2}$

12. $\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분이 서로 같으므로
$\log x-\log\sqrt{x}=\log x-\frac{1}{2}\log x$
$=\frac{1}{2}\log x$(정수)
주어진 조건에서 $1<x<1000$이므로
$0<\log x<3$, $0<\frac{1}{2}\log x<\frac{3}{2}$
이때 위의 범위를 만족하는 정수는 1이므로
$\frac{1}{2}\log x=1$, $\log x=2$
따라서 $x=100$이다.

13. $\log x$의 소수 부분을 $\alpha\ (0<\alpha<1)$라고 하면
$\log x=2+\alpha$
$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{1}{2}(2+\alpha)=1+\frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{단, } 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{2}\right)$
따라서 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{2}$이므로
$\alpha+\frac{\alpha}{2}=1$, $\alpha=\frac{2}{3}$
$\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$

14. 매년 증가하는 매출액의 비율을 a라고 하면
$5\times 10^8\times(1+a)^8=500\times 10^8$
$(1+a)^8=100$
양변에 상용로그를 취하면
$8\log(1+a)=2$, $\log(1+a)=0.25$
$1+a=10^{0.25}$
$a=10^{0.25}-1=0.778\cdots$
따라서 이 쇼핑몰의 매출액은 매년 78%씩 증가하였다.

15. $10^{\frac{3}{4}}$ 또는 $10^{0.75}$

16. $\frac{210}{11}$배