2025
미적

Ch① 수열의 극한과 급수

TH①. 등차수열 (공차 추론)

2025년 6월 평가원모의고사 30번

2025년 Trend

1. 함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n{}^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오.

2025년 9월 평가원모의고사 29번

2025년 Trend

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1+a_{10}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

TH②. 등비수열 (공비 추론)

2024년 5월 교육청모의고사 30번

3. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\dfrac{5}{a_n} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases}$$

(α는 양의 상수)라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은
>
> p이고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n = 51$, $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64}$이다.

$32 \times (a_3 + p)$의 값을 구하시오.

2024년 7월 교육청모의고사 29번

4. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|\right) = 0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1 \times \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하시오.

TH③. 공비가 미지수로 표현된 함수 (극한)

2024년 3월 교육청모의고사 30번

5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le 0$이다.
(나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
(다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오.

2025학년도 사관학교 30번

6. 양수 k와 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{2n+1}+f(x)}{|x-2|^{2n}+k} & (|x-2|\ne 1)\\ \dfrac{|f(x+1)|}{k+1} & (|x-2|=1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(g(x))$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $10(M+m)$의 값을 구하시오.

TH④. ETC

2024년 3월 교육청모의고사

7. 자연수 n에 대하여 직선

$$y=2nx$$

가 곡선

$$y=x^2+n^2-1$$

과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 A_nB_nP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $A_nB_nP_n$의 넓이를 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

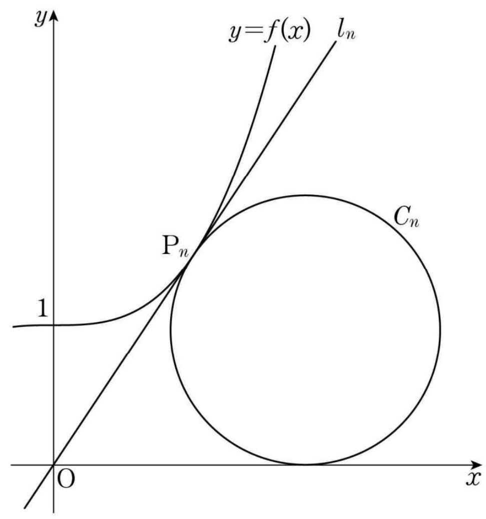
④ 8 ⑤ 10

2024년 3월 교육청모의고사

8. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오.

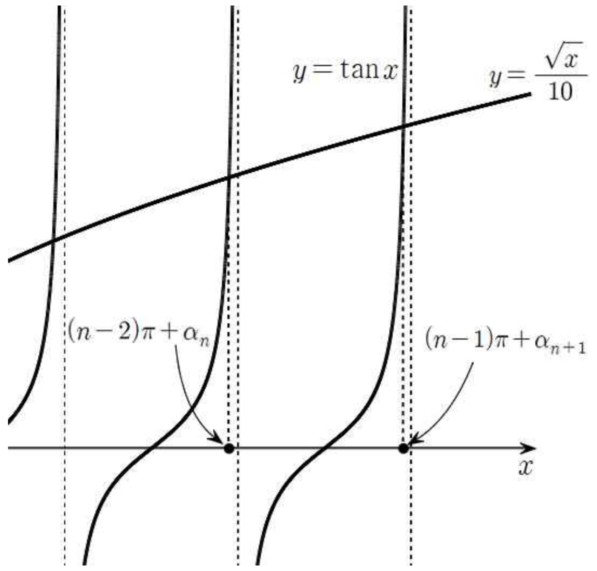


1. [정답] 25

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 30 [4.00점]

[해설]

함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 a_n이므로 아래 그림에서처럼



$\dfrac{\sqrt{x}}{10}=\tan x$에서 $(n-2)\pi\le\ x<(n-2)\pi+\dfrac{\pi}{2}$의 근을

$x=(n-2)\pi+\alpha_n$이라 하자. $\left(\text{단, } 0\le\ \alpha_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$a_1=\alpha_1=0,\ a_2=\alpha_2,\ a_3=\pi+\alpha_3,\ a_4=2\pi+\alpha_4,\ \cdots$$

$$a_n=(n-2)\pi+\alpha_n\ \left(\text{단, } 0\le\ \alpha_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$$

이므로 $\quad a_{n+1}=(n-1)\pi+\alpha_{n+1}$

$\alpha_n<\alpha_{n+1}$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)=0$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\pi+\alpha_{n+1}}{(n-2)\pi+\alpha_n}=1$$

이므로

$$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+a_{n+1}a_n}$$
$$=\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10}}{1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}}$$
$$=\frac{10\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}$$
$$=\frac{10(a_{n+1}-a_n)}{\left(100+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)}$$
$$=\frac{10(\pi+\alpha_{n+1}-\alpha_n)}{\left(100+\sqrt{a_{n+1}a_n}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}\right)}$$

$$a_n\sqrt{a_n}\times\tan(a_{n+1}-a_n)$$
$$=\frac{10(\pi+\alpha_{n+1}-\alpha_n)}{\left(\dfrac{100}{a_n}+\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}+1\right)}$$

따라서

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10(\pi+\alpha_{n+1}-\alpha_n)}{\left(\dfrac{100}{a_n}+\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}+1\right)}\right)^2$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\times\left(\frac{10\pi}{(0+1)(1+1)}\right)^2$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\times25\pi^2$$
$$=25$$

2. [정답] 57

[해설]

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=m+2}^{n+m+1}\frac{1}{k}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+m+1}\frac{1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

$m=1$일 때 $\quad a_1=S_1=\sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{1}{k}=\dfrac{3}{2}$

$$a_{10}=S_{10}-S_9=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}=\frac{1}{11}$$

$a_1+a_{10}=\dfrac{35}{22}$ 이므로 $\quad p=22,\ q=35$

$\therefore\ p+q=57$

3. **정답** 138

$|\alpha_k|>\alpha,\ |a_{k+1}|<\alpha$라 할 때,

$b_n:\ -\dfrac{5}{a_1},\ -\dfrac{5}{a_2},\ -\dfrac{5}{a_3},\ \cdots,\ -\dfrac{5}{a_k},\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots$

$\dfrac{a_n}{b_n}:\ -\dfrac{(a_1)^2}{5},\ -\dfrac{(a_2)^2}{5},\ -\dfrac{(a_3)^2}{5},\ \cdots,\ -\dfrac{(a_k)^2}{5},\ 1,\ 1,\ ,1,\ \cdots$

$\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 할 때, $-\dfrac{(a_n)^2}{5}$가 더해질수록 값이 작아지므로 $k=p$

등비수열 a_n의 첫 항이 a, 공비가 r일 때, $a_n = ar^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때, $\frac{a}{1-r} = 4$, $a = 4-4r$

$\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \frac{ar^p}{1-r} = \frac{1}{64}$, $ar^p = \frac{1}{64}(1-r) = 4(1-r)r^p$

$r^p = \frac{1}{256}$

$\sum_{n=1}^{p} b_n = -\sum_{n=1}^{p} \frac{5}{a}\left(\frac{1}{r}\right) = 51$,

$\frac{\frac{5}{a}\left(1-\frac{1}{r^p}\right)}{1-\frac{1}{r}} = -51$, $\frac{5}{a} \times (1-256) = -51\left(\frac{r-1}{r}\right)$, $5 \times 5r = a(r-1)$

$a = 4-4r$이므로 $4(1-r)(r-1) = 25r$, $4r^2 + 17r + 4 = 0$

$(4r+1)(r+4) = 0$에서 $r = -\frac{1}{4}$, $a = 4-4r = 5$, $a_n = 5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_3 = \frac{5}{16}$ $r^p = \left(-\frac{1}{4}\right)^p = \frac{1}{256}$, $p = 4$

$\therefore$ $32 \times (a_3 + p) = 32 \times \left(\frac{5}{16} + 4\right) = 10 + 128 = 138$

4. [정답] 12

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1 = 1$이므로 $a_n = r^{n-1}$ (단, n은 자연수)

급수 $\sum_{n=1} a_n$이 수렴하므로

$-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$

$\sum_{n=1} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) = 0$에서

$0 < r < 1$이면

$\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) > 0$이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $-1 < r < 0$

$\{a_{2n}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이고

$\{|a_{3n-1}|\}$은 공비가 $-r^3$인 등비수열이다.

$0 < r^2 < 1$, $-1 < -r^3 < 0$이므로

두 급수 $\sum_{n=1} a_{2n}$, $\sum_{n=1} |a_{3n-1}|$은 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|)$

$= \frac{20r}{1-r^2} + \frac{21|a_2|}{1-(-r^3)} = \frac{20r}{1-r^2} + \frac{21 \times (-r)}{1+r^3} = 0$

$20(1-r+r^2) - 21(1-r) = 0$

$20r^2 + r - 1 = 0$

$(5r-1)(4r+1) = 0$

$-1 < r < 0$이므로 $r = -\frac{1}{4}$

$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 수렴하므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면

$\frac{b_n}{a_n} = b_1 \times (-4s)^{n-1}$이므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$

$= \lim_{n \to \infty} \{3 \times (-1)^{n-1} + b_1 \times (-4s)^{n-1}\}$

$= \lim_{n \to \infty} [(-1)^{n-1}\{3 + b_1 \times (4s)^{n-1}\}]$

(ⅰ) $-1 < 4s < 1$인 경우

$\lim_{n \to \infty} (4s)^{n-1} = 0$이므로

$\lim_{n \to \infty} \{3 + b_1 \times (4s)^{n-1}\} = 3$

그러므로 $\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅱ) $4s < -1$ 또는 $4s > 1$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \{3 + b_1 \times (4s)^{n-1}\}$은 발산하므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅲ) $4s = -1$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$

$= \lim_{n \to \infty} \{3 \times (-1)^{n-1} + b_1\}$

$\lim_{n \to \infty} \{3 \times (-1)^{n-1}\}$은 발산하므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 발산한다.

$\lim_{n \to \infty} \{3 \times (-1)^{n-1}\}$은 발산하므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅳ) $4s = 1$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$

$= \lim_{n \to \infty} \{(-1)^{n-1} \times (3 + b_1)\}$

$b_1 = -3$일 때,

모든 자연수 n에 대하여

$\frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0$이므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n} = 0$

(ⅰ)~ (ⅳ)에 의하여

$b_1 = -3$, $s = \frac{1}{4}$

$b_n=(-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}=-4$

따라서 $b_1\times\sum_{n=1}b_n=12$

5. [정답] 84

[해설]

$x>0$일 때, 함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $0<x<m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n=0$이므로 $g(x)=x$

(ⅱ) $x=m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n=1$이므로

$g(m)=\frac{f(m)+m}{2}$

(ⅲ) $x>m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{x}\right)^n=0$이므로

$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+x\times\left(\frac{m}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{m}{x}\right)^n}=f(x)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

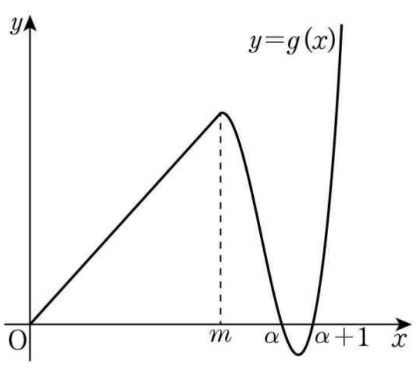
$$g(x)=\begin{cases}x & (0<x<m)\\ \frac{f(m)+m}{2} & (x=m)\\ f(x) & (x>m)\end{cases}$$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x=m$에서 미분가능하고 연속이므로

$1=f'(m)$, $m=f(m)$

조건 (나)에서 $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로 $g(x)=0$을 만족시키는 자연수 x는 연속된 2개의 자연수이다.

이 두 자연수를 α, $\alpha+1$이라 하면 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, $\alpha+1$, β라 하자.

(ⅰ) $g(m)<g(m+1)$일 때,

$g'(m+1)\le 0$이므로 조건 (다)에서 $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은 $m+1$, $m+2$, $m+3$이므로 $\alpha=m+3$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta)\\&=(x-m-3)(x-m-4)(x-\beta)\\&=\{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}(x-\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)=&(2x-2m-7)(x-\beta)\\&+\{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}\end{aligned}$$

$f'(m)=-7(m-\beta)+12$

$f'(m)=1$이므로 $-7(m-\beta)+12=1$, $m-\beta=\frac{11}{7}$

$m=f(m)=12(m-\beta)=\frac{132}{7}$이므로 모순이다.

(ⅱ) $g(m)\ge g(m+1)$일 때,

조건 (다)에서 $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은 m, $m+1$, $m+2$이므로 $\alpha=m+2$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta)\\&=(x-m-2)(x-m-3)(x-\beta)\\&=\{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}(x-\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)=&(2x-2m-5)(x-\beta)\\&+\{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}\end{aligned}$$

$f'(m)=-5(m-\beta)+6$

$f'(m)=1$이므로 $-5(m-\beta)+6=1$, $m-\beta=1$

$m=f(m)=6(m-\beta)=6$

$m=6$일 때, $f(x)=(x-5)(x-8)(x-9)$에서

$g'(m+1)=f'(m+1)=-4$이므로 조건 (가)를 만족시키고,

$g(m)=f(m)\ge f(m+1)=g(m+1)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=(x-5)(x-8)(x-9)$이므로

$g(12)=f(12)=7\times4\times3=84$

6. [정답] 30

7. [정답] ③

[해설]

$x^2+n^2-1=2nx$에서

$x^2-2nx+(n+1)(n-1)=0$

$(x-n-1)(x-n+1)=0$이므로

$\mathrm{A_n}(\mathrm{n}-1,\ 2\mathrm{n}^2-2\mathrm{n})$, $\mathrm{B_n}(\mathrm{n}+1,\ 2\mathrm{n}^2+2\mathrm{n})$이라 하자.

$\overline{\mathrm{A_nB_n}}=\sqrt{2^2+(4n)^2}=\sqrt{16n^2+4}=2\sqrt{4n^2+1}$

원의 중심 $(2,\ 0)$과 직선 $2nx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}$이므로 점 P와 직선 $2nx-y=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}-1\le h\le\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1$

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A_nB_n}}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)\\&=\frac{1}{2}\times2\sqrt{4n^2+1}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)\\&=4n+\sqrt{4n^2+1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+\sqrt{4n^2+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1}\\&=4+\sqrt{4}=6\end{aligned}$$

8. [정답] 270

[해설]

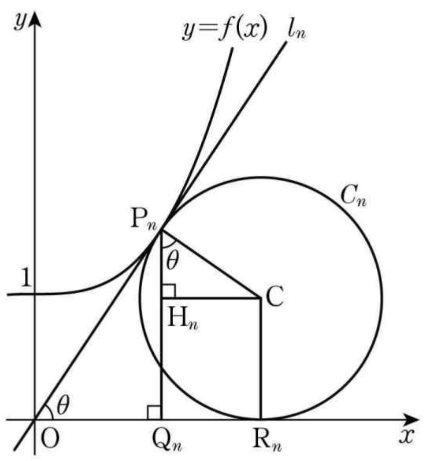
양의 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P_n}(\mathrm{t},\ \mathrm{f(t)})$라 하면

$f'(t)=\dfrac{f(t)}{t}$, $\dfrac{12t^3}{n^3}=\dfrac{4t^3}{n^3}+1$, $t^3=\dfrac{n^3}{8}$, $t=\dfrac{n}{2}$

$\mathrm{P_n}\left(\dfrac{\mathrm{n}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이므로 직선 l_n의 방정식은 $y=\dfrac{3}{n}x$

원 C_n의 중심을 C라 하고 두 점 $\mathrm{P_n}$, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{Q_n}$, $\mathrm{R_n}$이라 하자. 점 C에서 선분 $\mathrm{P_nQ_n}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

$\angle\mathrm{CP_nO}=\angle\mathrm{OQ_nP_n}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{P_nOQ_n}=\angle\mathrm{CP_nH_n}$



$\overline{\mathrm{OP_n}}=\sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{n^2+9}}{2}$이고,

$\angle\mathrm{P_nOQ_n}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ_n}}}{\overline{\mathrm{OP_n}}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+9}}$

$\overline{\mathrm{P_nC}}=\overline{\mathrm{CR_n}}=\overline{\mathrm{H_nQ_n}}=r_n$, $\overline{\mathrm{P_nQ_n}}=\dfrac{3}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{P_nQ_n}}=\overline{\mathrm{P_nH_n}}+\overline{\mathrm{H_nQ_n}}=r_n\times\cos\theta+r_n=\dfrac{3}{2}$

$r_n=\dfrac{3}{2(1+\cos\theta)}=\dfrac{3\sqrt{n^2+9}}{2\left(\sqrt{n^2+9}+n\right)}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)&=\lim_{n\to\infty}n^2\times\left(\frac{6\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{n^2+9}+n}-3\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3\sqrt{n^2+9}-3n}{\sqrt{n^2+9}+n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}3n^2\left\{\frac{9}{\left(\sqrt{n^2+9}+n\right)^2}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+1\right)^2}=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

이므로 $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=270$

Ch② 함수의 극한

TH①. 함수의 극한

2025학년도 6월 평가원모의고사

1. 양수 t에 대하여 곡선

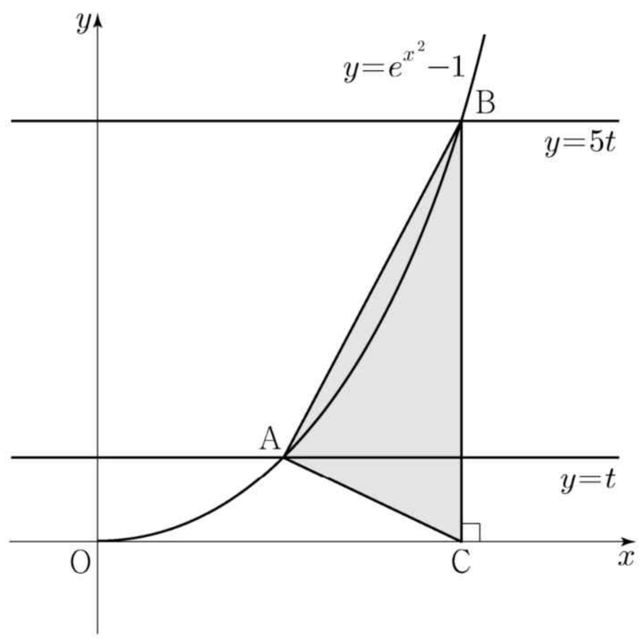
$$y=e^{x^2}-1\ (x\geq 0)$$

이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은?

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$

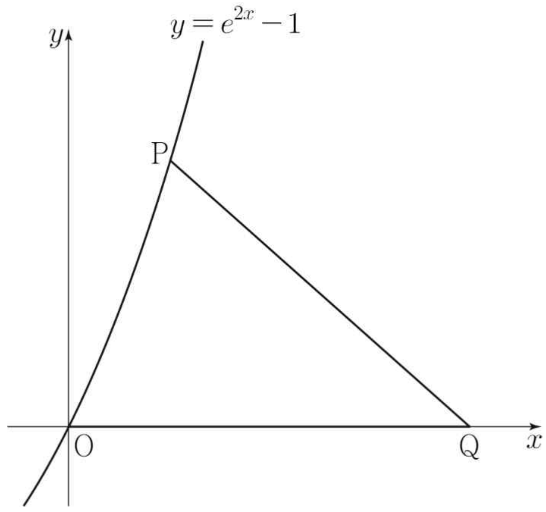
③ $5(\sqrt{5}-1)$ ④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$

⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



2024년 7월 교육청모의고사

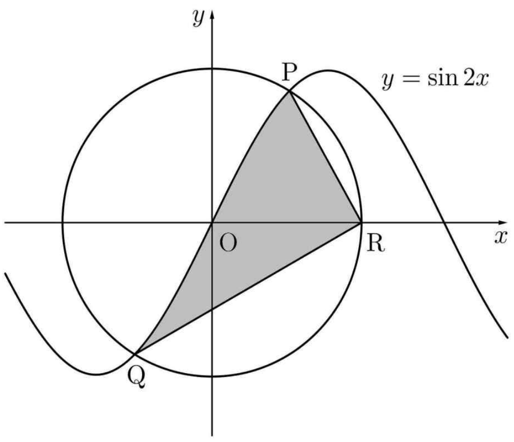
2. 곡선 $y=e^{2x}-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)$ $(t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값은?(단, O는 원점이다.)



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

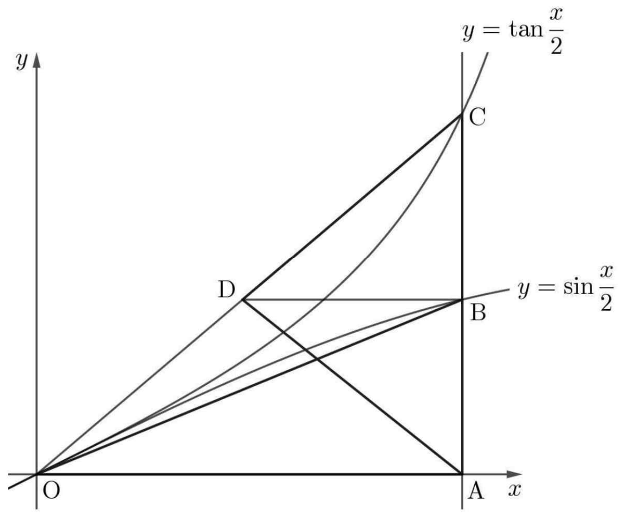
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. $0 < t < \dfrac{\pi}{6}$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \sin 2x$ 위의 점 $(t,\ \sin 2t)$를 P라 하자. 원점 O를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원이 곡선 $y = \sin 2x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 이 원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 R라 하자. 곡선 $y = \sin 2x$와 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{S(t)}{t^2} = k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



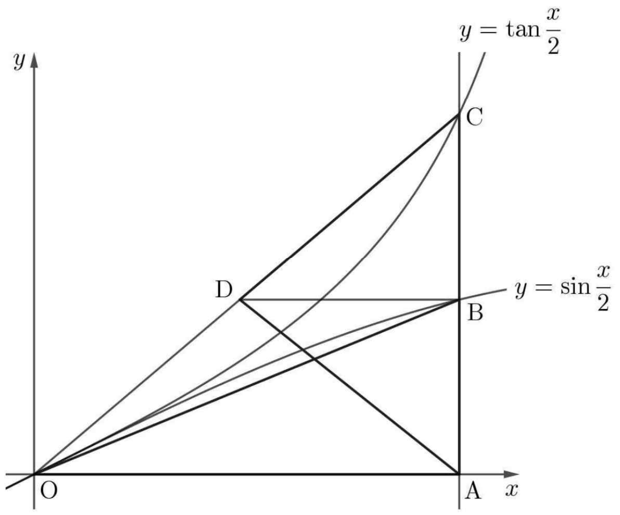
4. $0 < t < \pi$인 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{A}(t,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y = \sin \dfrac{x}{2}$, $y = \tan \dfrac{x}{2}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $f(t)$, 삼각형 ACD의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{g(t)}{\{f(t)\}^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$



5. $0<t<\pi$인 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{A}(t,\,0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=\sin\dfrac{x}{2}$, $y=\tan\dfrac{x}{2}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $f(t)$, 삼각형 ACD의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{\{f(t)\}^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$

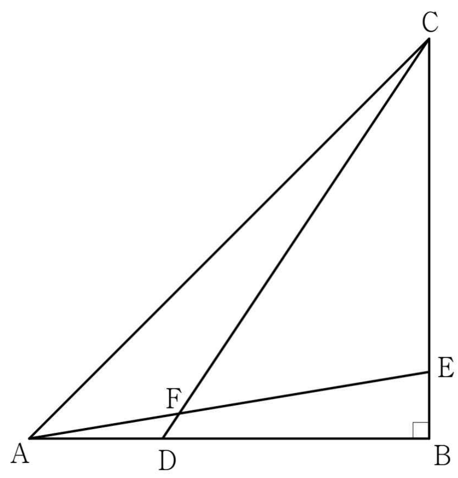


TH②. 삼각함수의 덧셈정리

6. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=1$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E가

$$\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{BE}}\ \ (0<\overline{\mathrm{AD}}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD가 만나는 점을 F라 하자.
$\tan(\angle\mathrm{CFE})=\dfrac{16}{15}$일 때, $\tan(\angle\mathrm{CDB})$의 값은?
$\left(\text{단, } \dfrac{\pi}{4}<\angle\mathrm{CDB}<\dfrac{\pi}{2}\right)$



① $\dfrac{9}{7}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{7}{5}$
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

TH③. 미분

2024년 7월 교육청모의고사 28점

7. 두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x)=a\sin x-\cos x$, $g(x)=e^{2x-b}-1$ 이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은?

> (가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.
>
> (나) 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 방정식
>
> $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$ 의 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{4}$이다.

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$

④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

2025학년도 9월 평가원모의고사 27점

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}sinx\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은?

① $-\frac{5}{6}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

1. [정답] ②

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 26 [3.00점]

[해설]
함수

$$y=e^{x^2}-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

와 직선 $y=t$ 와의 교점 A 의 좌표는

$$t=e^{x^2}-1, \quad e^{x^2}=1+t, \quad x=\sqrt{\ln(1+t)}$$

$$\therefore\ \mathrm{A}\left(\sqrt{\ln(1+t)},\ t\right)$$

곡선 ㉠과 직선 $y=5t$와의 교점 B의 좌표는

$$5t=e^{x^2}-1, \quad e^{x^2}=1+5t, \quad x=\sqrt{\ln(1+5t)}$$

$$\therefore\ \mathrm{B}\left(\sqrt{\ln(1+5t)},\ 5t\right)$$

삼각형 ABC의 넓이가 $S(t)$ 이므로 점 A 에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times 5t\times\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$$

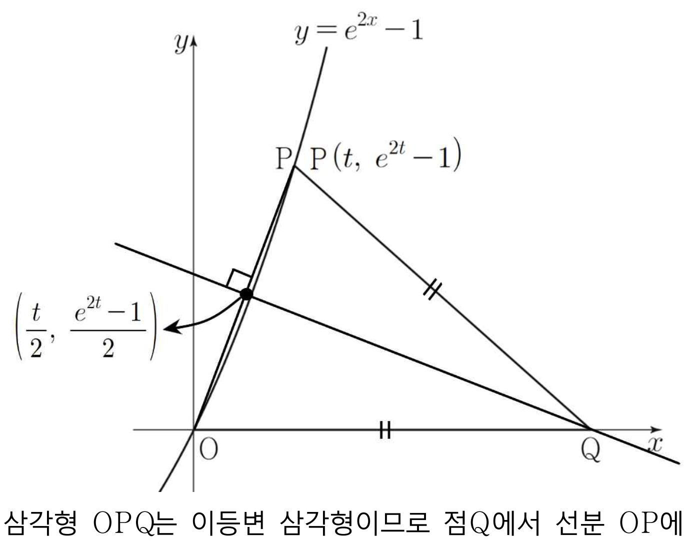
$$\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}=\frac{5}{2}\times\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{5}{2}\times\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$$

$$=\frac{5}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

2. **정답** ④



삼각형 OPQ는 이등변 삼각형이므로 점Q에서 선분 OP에 내린 수선은 밑변을 이등분하므로 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{e^{2t}-1}{2}\right)$을 지난다.

선분 OP의 기울기는 $\frac{e^{2t}-1}{t}$ 이고 점 Q를 지나는 직선은 수직이므로

$y=-\frac{t}{e^{2t}-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{e^{2t}-1}{2}$, $y=0$을 대입하면

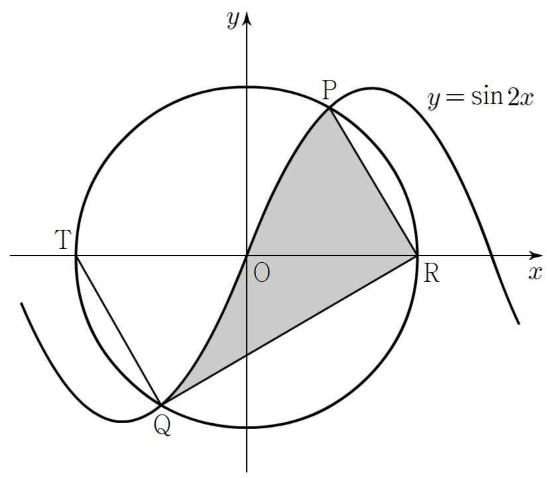
$$\frac{t}{e^{2t}-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)=\frac{e^{2t}-1}{2},\ x-\frac{t}{2}=\frac{e^{2t}-1}{2}\times\frac{e^{2t}-1}{t},$$

$$x=\frac{t}{2}+\frac{\left(e^{2t}-1\right)^2}{2t},\ \frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}+\frac{\left(e^{2t}-1\right)^2}{2t^2}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{e^{2t}-1}{t}\times\frac{e^{2t}-1}{t}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{5}{2}$$

3. [정답] 20

[해설]



곡선 $y=\sin 2x$는 원점에 대하여 대칭이므로 곡선과 두 선분 PR, OR로 둘러싸인 부분의 넓이는, 곡선과 두 선분 QT, OT로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 구하는 넓이는 삼각형 QRT의 넓이와 같다.

$$\overline{\mathrm{TR}}=2\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{t^2+\sin^2 2t}$$

점 P 의 좌표가 $(t,\ \sin 2t)$ 이므로 $\quad \mathrm{Q}(-t,\ -\sin 2t)$

따라서 선분 TR 을 밑변으로 하는 삼각형 QRT의 높이는 $\sin 2t$ 이다.

$$\therefore\ S(t)=\frac{1}{2}\times\sin 2t\times 2\sqrt{t^2+\sin^2 2t}$$

$$=\sin 2t\sqrt{t^2+\sin^2 2t}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin 2t\sqrt{t^2+\sin^2 2t}}{t^2}$$

$$=2\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)\sqrt{1+4\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2}$$

$$=2\times 1\times\sqrt{1+4\times 1^2}$$

$$=2\sqrt{5}$$

$k=2\sqrt{5}$ 이므로 $\quad k^2=20$

4. [정답] ④

5. [정답] ④

6. [정답] ④

[해설]
$\angle\,\mathrm{EAB}=\alpha,\ \angle\,\mathrm{CDB}=\beta$
$\overline{\mathrm{BE}}=x\ \left(0<x<\frac{1}{2}\right)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=2x,\ \overline{\mathrm{DB}}=1-2x$

$\tan\alpha=x,\ \tan\beta=\dfrac{1}{1-2x}$

$\tan(\angle\ \mathrm{CFE})=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\times\tan\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{1-2x}-x}{1+\dfrac{1}{1-2x}\times x}$$

$$=\frac{1-x(1-2x)}{(1-2x)+x}$$

$$=\frac{2x^2-x+1}{1-x}=\frac{16}{15}$$

$15(2x^2-x+1)=16(1-x)$

$30x^2+x-1=0$

$(5x+1)(6x-1)=0$

$0<x<\dfrac{1}{2}$이므로 $x=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\tan(\angle\ \mathrm{CDB})=\dfrac{1}{1-2x}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

7. **정답** ②

(i) $g(k)=0$에서 $e^{2k-b}=1,\ k=\dfrac{b}{2},\ f(k)=0$에서

$a\sin\dfrac{b}{2}-\cos\dfrac{b}{2}=0$

$a\sin\dfrac{b}{2}=\cos\dfrac{b}{2}$ 의 양변을 $\cos\dfrac{b}{2}$ 로 나누면 $\tan\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{a}$ … ㉠

(ii) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=2f(x)$

$(a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1)+2e^{2x-b}(a\sin x-\cos x)=2a\sin x-2\cos x$

$(a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1)+2(e^{2x-b}-1)(a\sin x-\cos x)=0$

$(e^{2x-b}-1)(2a\sin x-2\cos x+a\cos x+\sin x)=0$

$2a\sin x-2\cos x+a\cos x+\sin x=0$ 에서

$(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x=0,\ (2-a)\cos x=(2a+1)\sin x$

$\tan x=\dfrac{2-a}{2a+1}$의 근을 α라 할 때, $\tan\alpha=\dfrac{2-a}{2a+1}$

$e^{2x-b}-1=0$에서 $x=\dfrac{b}{2}$,

두 근의 합은 $\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\alpha+\dfrac{b}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

(iii) ㉠에서 $\tan\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{a}$ 이므로 $\tan\left(\alpha+\dfrac{b}{2}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

$$\tan\left(\alpha+\frac{b}{2}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\dfrac{b}{2}}{1-\tan\alpha\tan\dfrac{b}{2}}=\frac{\dfrac{2-a}{2a+1}+\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{2-a}{2a+1}\times\dfrac{1}{a}}=1$$

$\dfrac{2-a}{2a+1}+\dfrac{1}{a}=1-\dfrac{2-a}{a(2a+1)},\ \dfrac{2a-a^2+2a+1}{a(2a+1)}=\dfrac{2a^2+a-2+a}{a(2a+1)}$

$-a^2+4a+1=2a^2+2a-2,\ 3a^2-2a-3=0$

(iv) $\tan b=\tan\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{\dfrac{2}{a}}{\dfrac{a^2-1}{a^2}}=\dfrac{2a}{a^2-1}$

$3(a^2-1)-2a=0,\ 3(a^2-1)=2a,\ \dfrac{2a}{a^2-1}=3$

$\therefore\ \tan b=\dfrac{2a}{a^2-1}=3$

8. [정답] ②

[해설]

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+\frac{1}{2}\cos x\times f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\cos x$$

$x=0$을 대입하면

$$f'(0)+\frac{1}{2}\times f'(0)=1,\qquad f'(0)=\frac{2}{3}$$

$x=\pi$를 대입하면

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1$$

$f'(0)=\dfrac{2}{3}$ 이므로 $\quad f'(\pi)=-\dfrac{2}{3}$

Ch③ 여러 가지 미분

TH①. 역함수 미분법

2025년 6월 평가원모의고사

2025 Trend

1. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x \geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$
④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

2024년 7월 교육청모의고사

2. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 k $(k>0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k)\\ \dfrac{1}{3} & (x=k)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값이 최대일 때, k의 값을 α라 하자.

(가) $h(0)=1$
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k=\alpha$일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$의 값은?

① $\dfrac{1}{84}$ ② $\dfrac{1}{42}$ ③ $\dfrac{1}{28}$
④ $\dfrac{1}{21}$ ⑤ $\dfrac{5}{84}$

2025학년도 사관학교

3. 함수 $f(x)=\ln\left(e^x+2\right)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x)=\{g(x)\}^2$에 대하여 $h'(\ln 4)$의 값은?

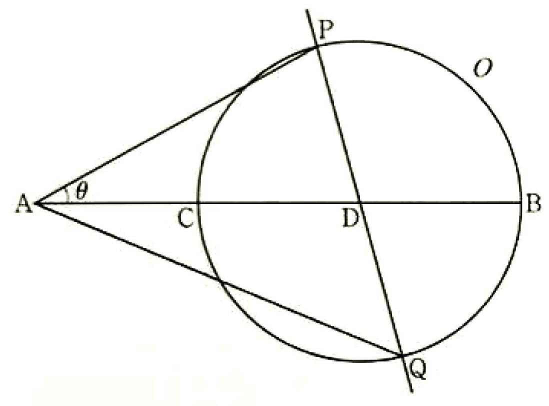
① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $4\ln 2$
④ $5\ln 2$ ⑤ $6\ln 2$

TH②. 매개변수 미분법

2024년 5월 교육청모의고사

2025 Trend

4. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0=\dfrac{7}{8}$ 인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0)=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD}=\dfrac{\pi}{2}$이고 $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{6}$이다.) [4점]



1. [정답] ④

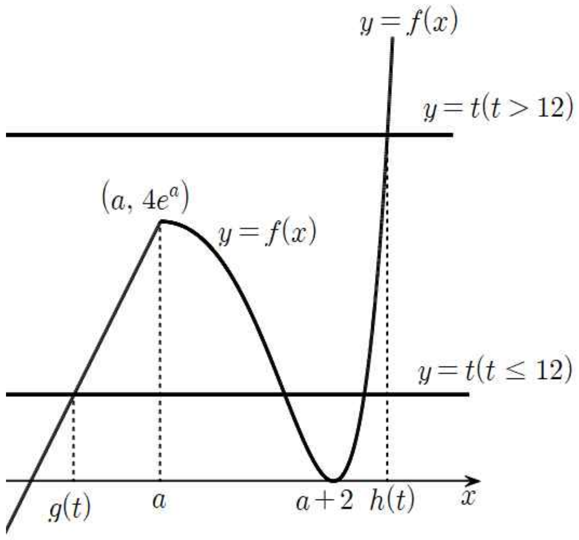
[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 28 [4.00점]

[해설]

함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

의 그래프는 아래와 같다.



함수 $f(x)$는 $f(a)=4e^a$이고 함수 $g(t)$의 그래프는 $t=4e^a$에서만 불연속이므로

$4e^a=12 \quad \therefore\ e^a=3,\ a=\ln 3$ …… ㉠

$t\leq 12$일 때 직선 $y=t$와 함수 $y=e^{2a}(x-a)+4e^a$가 만나는 점의 x좌표는 $x=\dfrac{t-4e^a}{e^{2a}}+a$

이고 ㉠에 의하여 $x=\dfrac{t-12}{9}+\ln 3$

$t>12$일 때 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표를 $h(t)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{t-12}{9}+\ln 3 & (t\leq 12)\\ h(t) & (t>12)\end{cases}$$ …… ㉡

이고

$f(h(t))=t$ …… ㉢

이므로 ㉢의 양변을 t에 관하여 미분하면

$$f'(h(t))h'(t)=1,\ h'(t)=\frac{1}{f'(h(t))}$$

㉡의 양변을 t에 관하여 미분하면

$$g'(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (t\leq 12)\\ \dfrac{1}{f'(h(t))} & (t>12)\end{cases}$$

한편,

$f(a+2)=0,\ f(a+6)=16e^{a+6}=48e^6$

이고

$$f'(x)=\begin{cases}(x-\ln 3-2)(x-\ln 3)e^x & (x>\ln 3)\\ 9 & (x<\ln 3)\end{cases}$$

이므로

$$g'(f(a+2))=g'(0)=\frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}g'(f(a+6))&=g'(a+6)\\&=g'(48e^6)\\&=\frac{1}{f'(a+6)}\ (\because\ h(48e^6)=a+6)\\&=\frac{1}{f'(6+\ln 3)}\\&=\frac{1}{4\times 6\times 3\times e^6}=\frac{1}{72}e^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}&=\frac{1}{9}\times 72\times e^6\\&=8e^6\end{aligned}$$

2. [정답] ②

[해설]

조건 (가)에 의하여 $h(0)=\dfrac{g(0)-k}{0-k}=1$

$g(0)=0,\ f(0)=0$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$h(k)=\lim\limits_{x\to k}h(x)=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}$

$g(k)=k,\ f(k)=k$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=\dfrac{1}{3}$

$g'(k)=\dfrac{1}{3}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(k)=\dfrac{1}{f'(g(k))}=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{3}$

$f'(k)=3$

$f(0)=0,\ f(k)=k$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)-x=x(x-k)(x-t)$ (t는 상수)

$f(x)=x(x-k)(x-t)+x$

$f(x)=x^3-(k+t)x^2+(tk+1)x$

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1$

$f'(k)=3$이므로 $k^2-tk-2=0$

$t=k-\dfrac{2}{k}$ …… ㉠

역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1\geq 0$

x에 대한 이차방정식

$3x^2-2(k+t)x+tk+1=0$의 판별식을

D라 하면

$D=4(k+t)^2-12(tk+1)\leq 0$

㉠을 대입하여 정리하면 $k^2-5+\dfrac{4}{k^2}\leq 0$이고

$k>0$이므로 양변에 k^2을 곱하면

$k^4-5k^2+4\leq 0$

$(k^2-1)(k^2-4)\leq 0$

$(k-1)(k+1)(k-2)(k+2)\leq 0$

$k+1>0$, $k+2>0$이므로

$(k-1)(k-2)\leq 0$

$1\leq k\leq 2$

$f'(0)=tk+1=k^2-1$이므로

$k=2$일 때, $f'(0)$의 값이 최대이다.

그러므로 $\alpha=2$이고 이때 $t=1$이므로

$f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$ …… ㉡

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-2}{x-2} & (x\neq 2)\\ \dfrac{1}{3} & (x=2)\end{cases}$$

이다.

$h(9)=\dfrac{g(9)-2}{9-2}$ …… ㉢

$g(9)=p$라 할 때, $f(p)=9$이므로

$p^3-3p^2+3p=9$

$p^3-3p^2+3p-9=0$

$(p-3)(p^2+3)=0$

$p=3$이므로 $g(9)=3$

㉢에 대입하여 정리하면 $h(9)=\dfrac{1}{7}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(9)=\dfrac{1}{f'(g(9))}=\dfrac{1}{f'(3)}$

㉡에 의하여 $f'(3)=12$이므로

$g'(9)=\dfrac{1}{12}$

따라서

$\alpha\times h(9)\times g'(9)=2\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{42}$

3. [정답] ③

4. 정답

[출제 의도]

Ch④ 미분

TH①. 초월함수 Graph (3점)

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

1. 상수 a $(a>1)$과 실수 t $(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2
④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e

TH②. 초월함수 Graph (4점)

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

2. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln\left(1+x^2\right)+a\ (a\text{는 상수})$$

와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq\ b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

3. 두 실수 a, b에 대하여 x에 대한 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하자. $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{34}{3}\pi$일 때, 함수

$$f(x)=\sin\left(x^2+ax+b\right)$$

가 $x=c$에서 극값을 갖도록 하는 c의 값 중에서 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 c_1, c_2, $\cdots$, c_n (n은 자연수)라 하자. $(1-n)\times\sum_{k=1}^{n}f(c_k)$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$)

1. [정답] ②

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 27 [3.00점]

[해설]

함수 $y=a^x$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$y=a^x \ln a$$

점 $\mathrm{A}(t,\ a^t)$에서의 미분계수는 $a^t \ln a$이므로 점 A 를 지나고 점 A 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{a^t \ln a}(x-t)+a^t \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

직선 ㉠과 x 축과 교점 B 는

$$\frac{1}{a^t \ln a}(x-t)=a^t, \qquad x=t+a^{2t}\ln a$$

$$\therefore \ \mathrm{B}(t+a^{2t}\ln a,\ 0)$$

점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 A'라 하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{A'O}}}{\overline{\mathrm{A'B}}}=\frac{t}{a^{2t}\ln a} \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉡에서 $f(t)=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$라 하면

$$f'(t)=\frac{1}{\ln a}\left(a^{-2t}+t\times a^{-2t}\times(-2)\times \ln a\right)$$

$$=a^{-2t}\left(\frac{1}{\ln a}-2t\right)$$

함수 $f(t)$ 는 $t=\dfrac{1}{2\ln a}$ 에서 극댓값을 가지고 이 값이 최댓값이므로

$$\frac{1}{2\ln a}=1, \qquad \ln a=\frac{1}{2} \qquad \therefore \ a=\sqrt{e}$$

2. [정답] 55

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 미적분 29 [4.00점]

[해설]

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2(x-1)^2}{x^2+1} \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>b) \\ -f'(x-c) & (x<b) \end{cases}$$

㉡에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$이므로

함수 $g(x)$ 가 모든 실수에서 미분가능하려면 $x=b$ 에서 함수 $f(x)$와 $-f(x-c)$가 만나야 하고, 그 점에서 미분계수가 모두 0 으로 같아야 한다.

$f'(b)=0$에서 $b>0$ 이므로 $\quad b=1 \qquad \cdots\cdots \ ㉢$

$-f'(1-c)=0$이고 $c>0$이므로 $\quad c=1 \qquad \cdots\cdots \ ㉣$

함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 연속이므로

$$f(b)=-f(b-c), \qquad f(1)=-f(0)$$

$$\frac{1}{3}-1+\ln 2+a=-a, \qquad a=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2 \qquad \cdots\cdots \ ㉤$$

따라서 ㉢, ㉣, ㉤에서

$$a+b+c=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}ln2$$

이므로 $\quad p=\dfrac{7}{3},\ q=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \ 30(p+q)=30\times\frac{11}{6}$$

$$=55$$

3. [정답] 15

Ch⑤ 적분

TH①. 적분 (3점)

2025학년도 9월 평가원모의고사

1. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이다. $f(1)=2e^2+1$일 때, $f(e)$의 값은?

① $2e^{2e}-1$ ② $2e^{2e}$ ③ $2e^{2e}+1$
④ $2e^{2e}+2$ ⑤ $2e^{2e}+3$

TH②. 적분 (4점)

2025학년도 9월 평가원모의고사

2. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$의 값은?

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$
④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

2025학년도 9월 평가원모의고사 30번

3. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.)

TH③. 정적분으로 표현된 함수 (4점)

2025학년도 사관학교

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^{2x}-2x+a$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)

① $2-\frac{6}{e^2}$　② $2-\frac{7}{e^2}$　③ $2-\frac{8}{e^2}$
④ $2-\frac{9}{e^2}$　⑤ $2-\frac{10}{e^2}$

2024년 7월 교육청모의고사 (30번)

5. 상수 a $(0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \ln\left(e^{|t|}-a\right)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.

(나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오.

TH④. 정적분과 넓이,부피

2024년 7월 교육청모의고사 (27번)

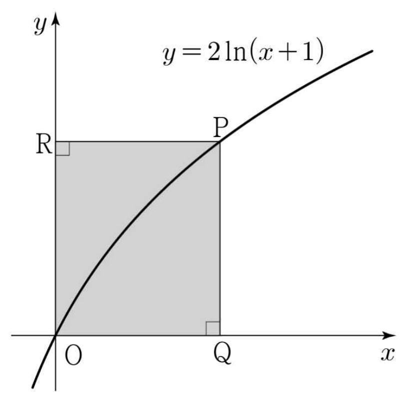
6. 양수 t에 대하여 곡선

$$y=2\ln(x+1)$$

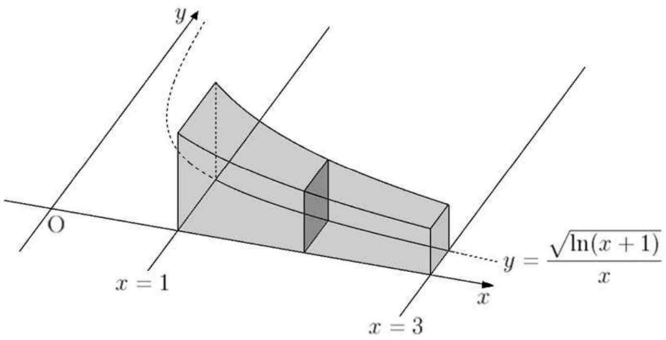
위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자.

$\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-2+12\ln 2$　② $-1+12\ln 2$
③ $-2+16\ln 2$　④ $-1+16\ln 2$
⑤ $-2+20\ln 2$



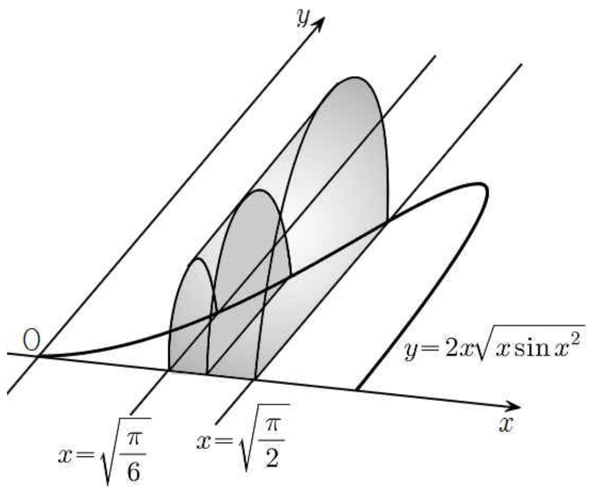
7. 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\dfrac{1}{3}ln\dfrac{9}{8}$ ② $\dfrac{1}{3}ln\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}ln\dfrac{9}{2}$

④ $\dfrac{1}{3}ln\dfrac{27}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}ln\dfrac{27}{2}$

8. 그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}$ $(0\leq x\leq\sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\dfrac{\pi^2+6\pi}{48}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}\pi^2+6\pi}{48}$

③ $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}\pi^2+12\pi}{48}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2+12\pi}{48}$

TH⑤. 급수와 정적분 (3점)

2025학년도 사관학교

9. 함수 $f(x)=e^{x^2}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}e-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}e-\frac{1}{4}$

1. [정답] ④

[해설]

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 기울기가

$\dfrac{1}{t}+4e^{2t}$ 이므로 $\quad f'(t)=\dfrac{1}{t}+4e^{2t}$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}+4e^{2t}\right)dt$$
$$=\ln|t|+2e^{2t}+C\ (C\text{는 상수})$$

$f(1)=2e^2+1$ 이므로

$$\ln 1+2e^2+C=2e^2+1,\qquad C=1$$
$$\therefore\ f(e)=\ln|e|+2e^{2e}+1=2e^{2e}+2$$

2. [정답] ③

[해설]

$g(0)=0,\ g(1)=1$ 이므로 $g^{-1}(0)=0,\ g^{-1}(1)=1$ 이고

$(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$ 이므로

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=\Big[x\times g^{-1}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 x\times(g^{-1})'(x)\,dx$$
$$=1-\int_0^1\frac{x}{g'(g^{-1}(x))}\,dx$$

$x=g(t)$ 라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0,\ x=1$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^1\frac{x}{g'(g^{-1}(x))}\,dx=\int_0^1\frac{g(t)}{g'(g^{-1}(g(t)))}\times g'(t)\,dt$$
$$=\int_0^1 g(t)\,dt$$
$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=1-\int_0^1 g(x)\,dx$$

$\displaystyle\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$ 에서

$$1-\int_0^1 g(x)\,dx=2\int_0^1\{g(x)-x\}\,dx+\frac{1}{4}$$
$$\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\int_0^1 x\,dx=\frac{7}{12}$$
$$\int_0^1\{f'(2x)\sin\pi x+x\}\,dx=\frac{7}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ 이므로 $\qquad\displaystyle\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{12}$

$$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}f(2x)\sin\pi x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\times\pi\cos\pi x\,dx$$
$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(2x)\cos\pi x\,dx$$
$$\int_0^1 f(2x)\cos\pi x\,dx=-\frac{1}{6\pi}$$

$2x=s$ 라 하면 $\dfrac{ds}{dx}=2$ 이고 $x=0$ 일 때 $s=0,\ x=1$ 일 때 $s=2$ 이므로

$$\int_0^1 f(2x)\cos\pi x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(s)\cos\frac{\pi}{2}s\,ds$$
$$\therefore\ \int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=-\frac{1}{3\pi}$$

3. [정답] 25

[해설]

$f(x)=\begin{cases}(k+x)e^{-x} & (x<0)\\(k-x)e^{-x} & (x\geq 0)\end{cases}$ 이고 $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$ 이므로

$$F(x)=\begin{cases}-(x+k+1)e^{-x}+C_1 & (x<0)\\(x-k+1)e^{-x}+C_2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

함수 $F(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0+}F(x)$$
$$\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0-}\left\{-(x+k+1)e^{-x}+C_1\right\}$$
$$=-k-1+C_1$$
$$\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0+}\left\{(x-k+1)e^{-x}+C_2\right\}$$
$$=-k+1+C_2$$

$-k-1+C_1=-k+1+C_2$ 이므로 $\qquad C_2=C_1-2$

(i) $x<0$ 일 때

$F(x)\geq f(x)$ 이므로

$$-(x+k+1)e^{-x}+C_1\geq(k+x)e^{-x}$$
$$(2x+2k+1)e^{-x}\leq C_1$$

$h_1(x)=(2x+2k+1)e^{-x}$ 라 하면

$$h_1'(x)=-(2x+2k-1)e^{-x}$$

$h_1'(x)=0$ 에서 $\qquad x=-\dfrac{2k-1}{2}$

(a) $k\leq\dfrac{1}{2}$ 일 때

$x<0$ 일 때 $h_1'(x)>0$ 이므로 함수 $h_1(x)$ 는 증가한다.

$x<0$ 일 때 부등식 $h_1(x)\leq C_1$ 이 성립하므로

$$h_1(0)\leq C_1,\qquad C_1\geq 2k+1$$

(b) $k>\dfrac{1}{2}$ 일 때

$x<0$ 일 때 함수 $h_1(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{2k-1}{2}$	$\cdots$	(0)
$h_1'(x)$	$+$	0	$-$	
$h_1(x)$	$\nearrow$	$h_1\left(-\dfrac{2k-1}{2}\right)$	$\searrow$	$h_1(0)$

$x<0$ 일 때 부등식 $h_1(x)\leq C_1$ 이 성립하므로

$$h_1\left(-\frac{2k-1}{2}\right) \le C_1, \qquad C_1 \ge 2e^{\frac{2k-1}{2}}$$

(a), (b)에서 $k \le \frac{1}{2}$ 일 때 $C_1 \ge 2k+1$, $k > \frac{1}{2}$ 일 때

$C_1 \ge 2e^{\frac{2k-1}{2}}$ 이다.

(ⅱ) $x \ge 0$ 일 때

$F(x) \ge f(x)$ 이므로

$$(x-k+1)e^{-x}+C_2 \ge (k-x)e^{-x}$$

$$(2k-2x-1)e^{-x} \le C_2$$

$h_2(x)=(2k-2x-1)e^{-x}$ 라 하면

$$h_2{}'(x)=(2x-2k-1)e^{-x}$$

$h_2{}'(x)=0$ 에서 $\quad x=\frac{2k+1}{2}$

$x \ge 0$ 일 때 함수 $h_2(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h_2{}'(x)$		$-$	0	$+$
$h_2(x)$	$h_2(0)$	↘	$h_2\left(\frac{2k+1}{2}\right)$	↗

$\lim\limits_{x\to\infty} h_2(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2k-2x-1)e^{-x}=0$ 이고,

$h_2(0)=2k-1$ 이다.

(a) $k \le \frac{1}{2}$ 일 때

$x \ge 0$ 에서 부등식 $h_2(x) \le C_2$ 가 성립하므로

$$C_2 \ge 0$$

$C_2=C_1-2$ 이므로 $\qquad C_1 \ge 2$

(b) $k > \frac{1}{2}$ 일 때

$x \ge 0$ 일 때 부등식 $h_2(x) \le C_2$ 가 성립하므로

$$C_2 \ge 2k-1$$

$C_2=C_1-2$ 이므로 $\qquad C_1 \ge 2k+1$

(a), (b)에서 $k \le \frac{1}{2}$ 이면 $C_1 \ge 2$, $k > \frac{1}{2}$ 이면 $C_1 \ge 2k+1$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k \le \frac{1}{2}$ 일 때 $C_1 \ge 2$, $k > \frac{1}{2}$ 일 때

$C_1 \ge 2e^{\frac{2k-1}{2}}$ 이다.

$F(0)=-k-1+C_1$ 이므로 $k \le \frac{1}{2}$ 일 때 $F(0) \ge -k+1$,

$k > \frac{1}{2}$ 일 때 $F(0) \ge -k-1+2e^{\frac{2k-1}{2}}$ 이다.

$$g(k)=\begin{cases} -k+1 & \left(k \le \frac{1}{2}\right) \\ -k-1+2e^{\frac{2k-1}{2}} & \left(k > \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}+\left(2e-\frac{5}{2}\right)=2e-\frac{7}{4}$$

따라서 $p=2$, $q=-\frac{7}{4}$ 이므로

$$100(p+q)=25$$

4. [정답] ⑤

5. [정답] 144

[해설]

$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-a\right)$

조건 (가)에 의하여

$f'\left(\ln\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}-a\right)=0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

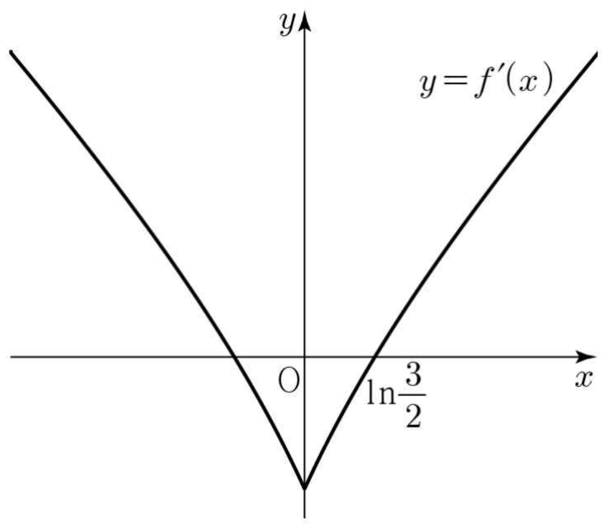
$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-\frac{1}{2}\right)$

모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$ 이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,

$f'(0)=\ln\frac{1}{2}<0$

$x>0$일 때, $f''(x)=\dfrac{e^x}{e^x-\frac{1}{2}}>0$

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$ 이므로 $f(x)=-f(-x)+C$ (단, C는 적분상수) $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$

$x \ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\ln\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극솟값을 m $(m<0)$이라 하면,

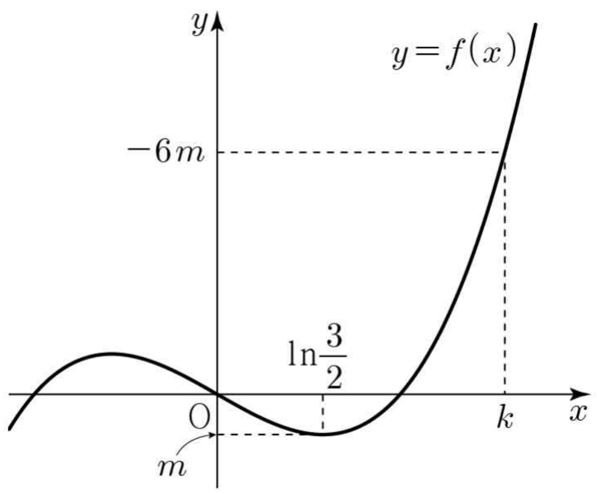
$f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=m$

조건 (나)에 의하여

$f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=-f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=-m$

$f(k)=-6m$ $\left(k>\ln\frac{3}{2}\right)$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx$

$=\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}dx$

$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{-f'(x)}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k \frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$

$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}} \frac{-\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k \frac{\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$

$=-\Big[ln\,|f(x)+f(k)|\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}+\Big[ln\,|f(x)+f(k)|\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$

$=-\Big[ln\,\{f(x)+f(k)\}\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}+\Big[ln\,\{f(x)+f(k)\}\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$

$=-\ln(m-6m)+\ln(0-6m)+\ln(-6m-6m)-\ln(m-6m)$

$=\ln\frac{-6m}{-5m}+\ln\frac{-12m}{-5m}=\ln\frac{6}{5}+\ln\frac{12}{5}=\ln\frac{72}{25}$

이므로 $p=\ln\frac{72}{25}$

따라서 $100\times a\times e^p=100\times\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=144$

6. [정답] ④

[해설]

$\mathrm{Q}(t,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 2\ln(t+1))$이므로

직사각형 OQPR의 넓이는 $f(t)=2t\ln(t+1)$

따라서

$\int_1^3 f(t)dt$

$=\int_1^3 \{2t\ln(t+1)\}dt$

$=\Big[t^2\ln(t+1)\Big]_1^3-\int_1^3 \frac{t^2}{t+1}dt$

$=\Big[t^2\ln(t+1)\Big]_1^3-\int_1^3 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\Big[t^2\ln(t+1)\Big]_1^3-\Big[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\Big]_1^3$

$=(9\ln4-\ln2)-\left(\frac{9}{2}-3+\ln4-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)$

$=-2+16\ln2$

7. [정답] ④

8. [정답] ③

[해설]

직선 $x=t$ $\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\le t\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\pi\left(t\sqrt{t\sin t^2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi t^3\sin t^2$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} S'(t)\,dt=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{2}\pi t^3\sin t^2\,dt$$

$t^2=s$라 하면 $\frac{ds}{dt}=2t$이고 $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ 일 때 $s=\frac{\pi}{6}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 일 때 $s=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$V=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4}\times s\sin s\,ds=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} s\sin s\,ds$$

$u(s)=s$, $v'(s)=\sin s$라 하면 $u'(s)=1$, $v(s)=-\cos s$ 이므로

$$V=\frac{\pi}{4}\times\left\{\Big[-s\cos s\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos s)\,ds\right\}$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\Big[-s\cos s+\sin s\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$$

9. [정답] ③

김지형
대치예섬