다정 [多征]

항함수
복하기

다정

초판 1쇄 인쇄 2024년 07월 08일
초판 1쇄 발행 2024년 07월 19일

지은이 김동우, 곽희윤

펴낸이 김지홍
디자인 최이서

펴낸곳 도서출판 북트리
주소 서울시 금천구 서부샛길 606 30층
등록 2016년 10월 24일 제2016-000071호

전화 0505-300-3158
팩스 0303-3445-3158
이메일 booktree11@naver.com
홈페이지 www.booktree11.co.kr

저자 소개

『다정 : 다항함수 정복하기』의 공동 저자

김동우
수학을 가르치고 있는 수학 강사이다. 대치동과 여러 지역을 오가며 지역 간 교육 편차를 몸소 체험하였고, 더 이상 수학 II 과목에서 사용하는 실전 도구들이 특정 집단의 전유물이 되지 않기를 바라며 본 책『다정 : 다항함수 정복하기』를 집필하였다.

곽희윤 서강대학교 컴퓨터공학과
수능 수학 만점을 받고 입시를 마친 후, 문항 출제 연구에 전념하여 현재는 수능 수학 콘텐츠 출제·연구팀의 팀장으로 활동 중이다. 팀에서는 주로 출판 모의고사 외주 및 강사 콘텐츠 제작을 담당하고 있다. 출제 연구 중에 발견한, 다항함수와 관련된 여러 가지 문제 풀이 기술들을 모아 본 책『다정 : 다항함수 정복하기』를 집필하였다.

다정북스
smartstore.naver.com/dajeongbook

본 책 다정: 다항함수 정복하기 책을 판매하는 사이트입니다. 이 책을 필두로 수능을 정복하기 위한 다양한 책들을 판매할 예정입니다.

수정 : 수능 정복하기
cafe.naver.com/kicejeong

수험생과 선생님들이 함께하는 수능 커뮤니티입니다. 본 교재의 오탈자 제보 및 QnA를 할 수 있으며 정오표가 업로드됩니다. 수학뿐만이 아닌 다양한 과목에서 실전 도구 및 풀이를 공유하며 수능을 정복해보세요.

다정한 수능 수학방
open.kakao.com/o/gYU5Ltog

교재 관련 질문을 포함한 수능 수학 관련 문제들을 저자에게 자유롭게 질문할 수 있는 카카오톡 오픈채팅방입니다.

다정 유튜브
www.youtube.com/@dajeongmath

다정 저자의 모의고사 풀이, 교재 보충 설명 영상 등을 업로드하는 유튜브 채널입니다. 수학2가 아닌 다른 과목의 실전 도구들도 이 채널에 업로드될 예정입니다.

검수해주신 선생님들

고영준 / 울산 비엠더블유수학
김나영 / 대치 새움, snt
김아름 / 압구정 메이드학원
김예건 / UDTeacher
김효상 / 부산 코스터디학원
나효명 / 대전 열린아카데미
남영준 / 아르베수학학원
박 경 / 원주 강장섭수학전문학원
박정빈 / 부산 LUX(럭스) 수학
백지현 / 대치 소자수학
손성준 / 생각만큼수학
심동주 / 아르베수학학원
이경환 / 학문당입시학원
이명섭 / 울산 퍼센트수학
이민하 / 과천 보듬교육학원
이정섭 / 대치 의치한약수
이창윤 / 수청초등학교 교사
이현석 / 서초 뉴파인
장원호 / 대치 의치한약수, 대치 SNT 영과고관
전승원 / 대치 출강
조동일 / 하남 매쓰온 에듀케이션
조원진 / 평촌 RTS학원, 안산 SNT학원
진혜원 / 마포 더올라수학
최광은 / 부산 LUX(럭스) 수학
최준원
한은주 / 코치클래스 수학
현혜수 / 문해전학원, 대치명인학원
홍석태 / 대전 오르고수학학원
황성필 / 부산 라임라잇수학학원,
대전 일인주의학원

검수해주신 학생분들

문수아 / 가톨릭대학교
문정민 / 국민대학교 기계공학과
민지홍 / 단국대학교 기계공학과
배정연 / 서울대학교 전기전자공학부
서태민 / 연세대학교 경제학부
서현진 / 고려대학교
신지환 / 숭실대학교 기계공학과
정우빈 / 연세대학교 원주의과대학

일러스트 및 검수

박세진 / 연세대학교 전기전자공학부

多征

수기

정우빈

연세대학교 원주의과대학

수학에 있어 가장 중요한 것은 풀이법, 즉 도구라고 생각합니다. 시간이 정해져 있는 시험인 수능에서, 풀이 시간을 줄여줄 수 있는 실전 도구는 수험생에게 있어 가장 배우고 싶고, 얻고 싶은 존재일 것입니다. 그렇지만 이런 실전 도구를 모든 수험생이 쉽게 배우고, 이해할 순 없었습니다. 저 또한 김동우 선생님을 만나 뵙기 전까지는 존재 자체를 모르던 것들도 있었으니깐요. '다정'은 그러한 실전 도구를, 특히나 무의미한 계산에 빠지기 쉬운 다항함수 문제에 적용할 수 있는 것들을 제일 쉽게 풀어둔 책이라고 생각합니다. 과외선생님이 옆에서 설명해주시는 것처럼 잘 풀어진 사고과정, 하나하나 체화할 수 있게 예제를 적용하는 과정까지 다항함수 풀이의 행동영역을 정립하는데 있어 가장 큰 도움이 될 것이라고 강조하고 싶습니다. '다정'을 통해 다항함수를 정복하는 경험을, 저처럼 풀이에 있어 눈이 떠지는 느낌을 받으셨으면 좋겠습니다.

배정연

서울대학교 전기전자공학부

준킬러 메타로 바뀐 수능 수학에서, 한 문제 한 문제를 빠르게 푸는 능력이 중요해졌습니다. 그리고 문제를 빠르게 푸는 능력은 '문제를 해석하는 능력'과 '효율적인 계산'에서 옵니다. <다정>은 이러한 기본기를 다져줄 정말 좋은 책이라고 생각합니다. 책을 통해 다양한 스킬을 문제에 적용하는 연습을 하다 보면, 어느샌가 수능 수학을 보는 시각이 달라질 것이라 자부합니다.

서태민

연세대학교 경제학부

저는 고등학교 3년 동안 여러 수학 문제들을 풀어보며 "나의 풀이가 최선일까", "답을 더 간편하고 정확하게 맞출 수는 없을까"와 같은 생각을 정말 많이 해왔습니다. 이는 저뿐만 아니라 수학 등급 향상에 관심이 있는 학생이라면 누구나 한 번쯤은 해봤을 고민이라 생각합니다. '다정' 교재는 한마디로 앞서 말한 모든 고민에 대한 답을 집약해놓았다 할 수 있습니다. 수학 풀이에 대한 새로운 사고를 제공하여 문제들을 바라보는 시각이 달라지고, 정답을 도출하는 과정을 면밀하게 이해시켜 문제의 의도를 파악하는 힘을 키울 수 있게 합니다.

또한, 수능 수학은 시간과의 싸움이라 해도 과언이 아닙니다. 만약 풀이의 방향성과 답의 도출 과정을 제대로 설정하여 시간을 아낄 수 있다면, 그만큼 다른 어려운 문제에 자신의 정신력을 더 많이 투자할 수 있는 것입니다. 그렇기에 '다정'은 고등 및 수능 수학을 준비하는 학생의 입장에서 당연히 필수적이며, 여러분들의 수학 실력 향상에 정말 큰 도움이 되리라고 확신합니다.

서현진

고려대학교 재학

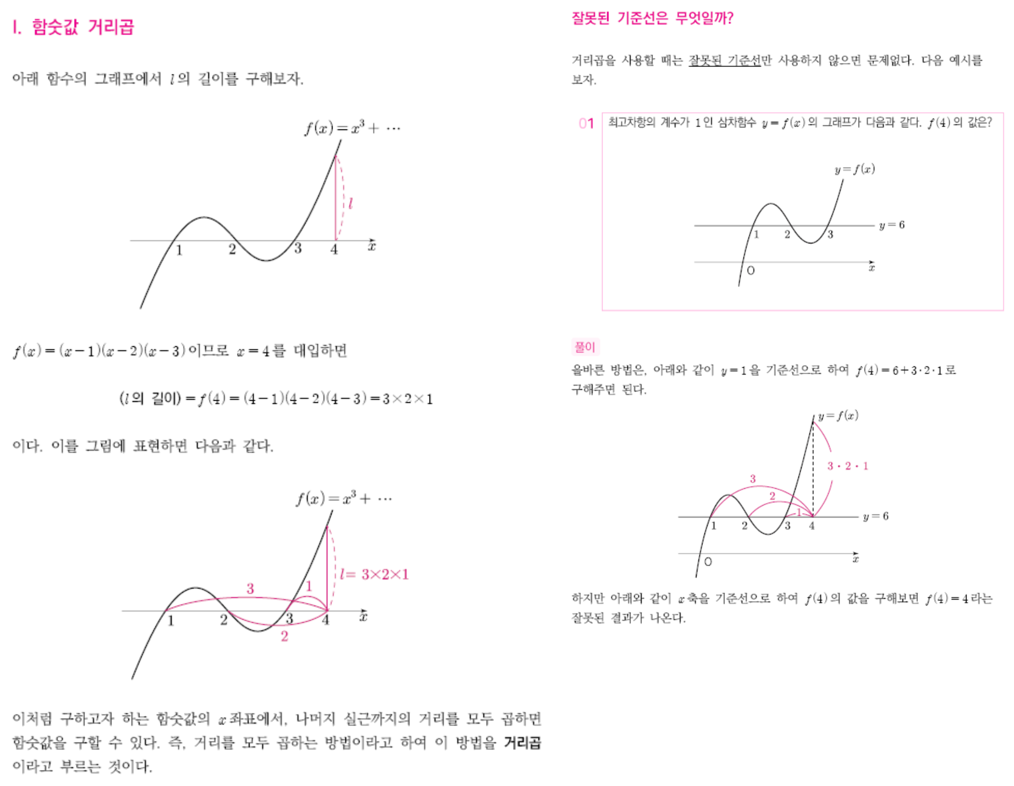
여러분들도 한 번쯤은 수학을 공부하다 수학과 권태가 왔나 하고 생각해본 적 있을 겁니다. 분명히 나는 열심히 하는데 왜 점수가 늘지 않을까? 그렇다면 당신은 '다정'을 공부해야 할 때입니다. 책을 읽기 전의 저를 생각해보면, 모든 문제를 다 정직하게 고집을 피우며 풀어나갔습니다. 그러다 보니 문제를 똑똑하게 푸는법을 몰라 항상 시간에 허덕이기 마련이였죠. 하지만, 책에 있는 많은 실전 도구들의 설명과 기출문제들의 풀이를 하나하나 뜯어보며 공부하다 보니 어느 순간 주변 친구들 사이에선 수학 좀 하는 애로 자리 잡아 있었습니다. 저같은 평범한 학생의 잠재력을 최고로 끌어내는 '다정'. 분명히 여러분의 멘토가 될 거라 장담합니다.

책 구성

본 책『다정 : 다항함수 정복하기』는 다항함수에 관한 실전 도구들을 모아 다정하게 설명합니다. 다양한 도구들을 통해 기존의 딱딱한 풀이에서 벗어난 새로운 풀이 관점을 터득할 수 있습니다.

본 책은 3단계로 구성되어 있습니다.

1. 실전 도구 개념 설명



I. 함숫값 거리곱

아래 함수의 그래프에서 l의 길이를 구해보자.

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로 $x=4$를 대입하면

(l의 길이)$=f(4)=(4-1)(4-2)(4-3)=3\times2\times1$

이다. 이를 그림에 표현하면 다음과 같다.

이처럼 구하고자 하는 함숫값의 x좌표에서, 나머지 실근까지의 거리를 모두 곱하면 함숫값을 구할 수 있다. 즉, 거리를 모두 곱하는 방법이라고 하여 이 방법을 **거리곱**이라고 부르는 것이다.

잘못된 기준선은 무엇일까?

거리곱을 사용할 때는 잘못된 기준선만 사용하지 않으면 문제없다. 다음 예시를 보자.

01 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다. $f(4)$의 값은?

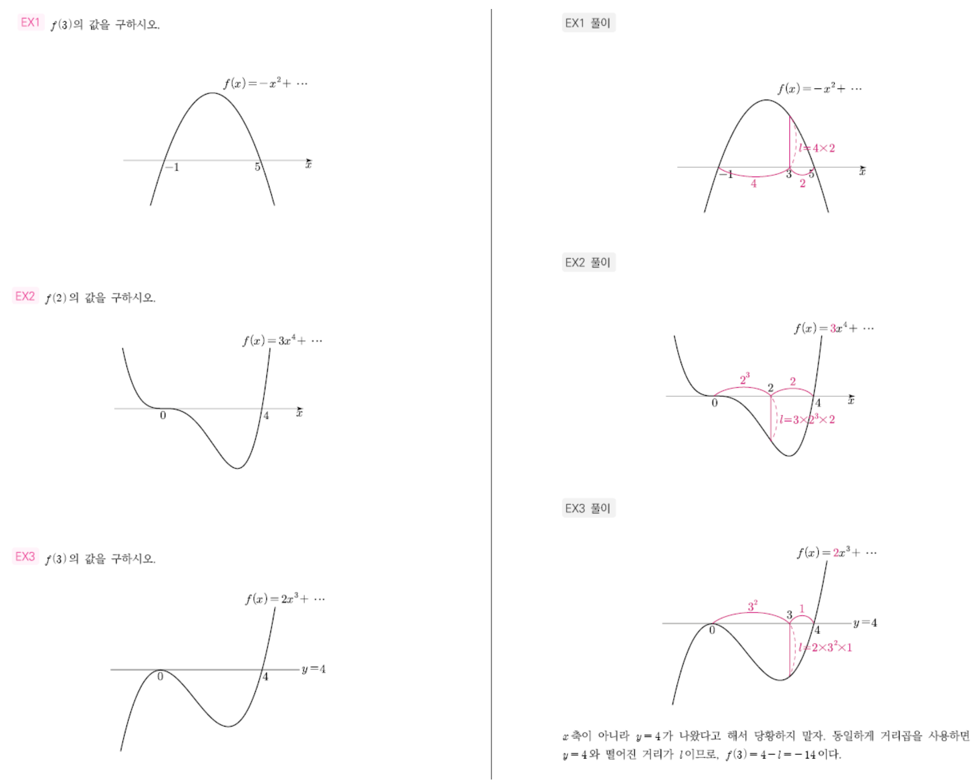
풀이

올바른 방법은, 아래와 같이 $y=1$을 기준선으로 하여 $f(4)=6+3\cdot2\cdot1$로 구해주면 된다.

하지만 아래와 같이 x축을 기준선으로 하여 $f(4)$의 값을 구해보면 $f(4)=4$라는 잘못된 결과가 나온다.

실전 도구와 관련 개념을 상세하게 설명했습니다. 도구를 사용할 때 주의할 점과 유용한 배경지식들도 담았습니다.

2. 예제 연습



EX1 $f(3)$의 값을 구하시오.

EX2 $f(2)$의 값을 구하시오.

EX3 $f(3)$의 값을 구하시오.

EX1 풀이

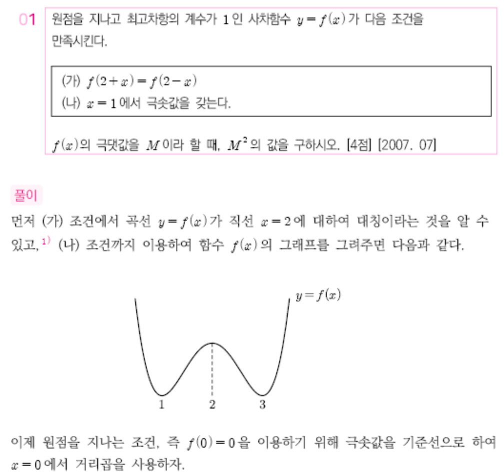
EX2 풀이

EX3 풀이

x축이 아니라 $y=4$가 나왔다고 해서 당황하지 말자. 동일하게 거리곱을 사용하면 $y=4$와 떨어진 거리가 l이므로, $f(3)=4-l=-14$이다.

간단한 예제를 풀며 도구를 쉽게 체화할 수 있습니다.

3. 문제 적용



01 원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2+x)=f(2-x)$
(나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$의 극댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점] [2007. 07]

풀이

먼저 (가) 조건에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이라는 것을 알 수 있고,[1] (나) 조건까지 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프를 그려주면 다음과 같다.

이제 원점을 지나는 조건, 즉 $f(0)=0$을 이용하기 위해 극솟값을 기준선으로 하여 $x=0$에서 거리곱을 사용하자.

기출문제 및 다정 제작 문제를 통해 실전에 적용하는 연습을 할 수 있습니다.
본 책은 모든 단원이 유기적으로 연결되어 있습니다. 앞 단원부터 순서대로 읽어보시길 권장합니다. 지금부터 저희와 함께 다항함수를 정복하러 떠나봅시다.

다정 : 다항함수 정복하기

CHAPTER 0.
거리곱

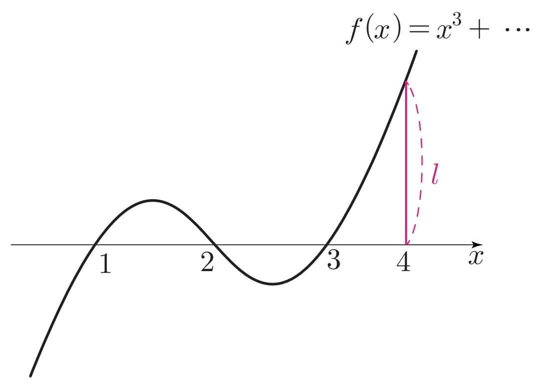
거리곱은 다항함수의 그래프가 있을 때, **함숫값**과 **미분계수**를 가장 간단하게 구할 수 있는 도구이다. 수학II 문제는 결국 이 둘을 구해야 하는 문제가 대부분이므로, 그래프를 이용하는 문제라면 거리곱은 항상 강력한 도구가 된다. 거리곱이 숙달되면 단순히 계산 속도에서 이점을 얻는 것뿐만 아니라, 문제 풀이에서 새로운 관점을 터득할 수 있다.

I. 함숫값 거리곱
II. 미분계수 거리곱
III. 도함수 거리곱
IV. 차함수 거리곱(함숫값)
V. 차함수 거리곱(미분계수)
VI. 상대곱

多征

I. 함숫값 거리곱

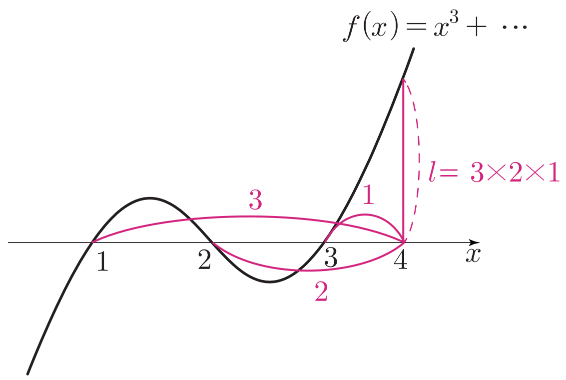
아래 함수의 그래프에서 l 의 길이를 구해보자.



$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로 $x = 4$ 를 대입하면

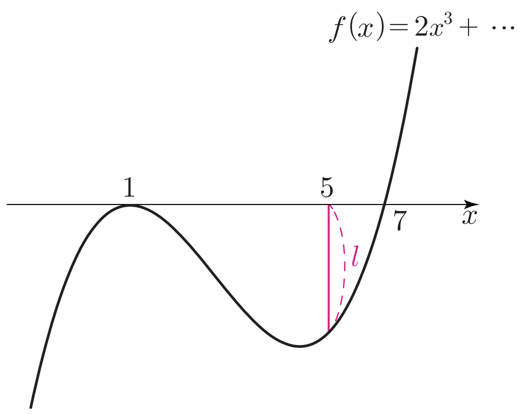
$$(l \text{ 의 길이}) = f(4) = (4-1)(4-2)(4-3) = 3 \times 2 \times 1$$

이다. 이를 그림에 표현하면 다음과 같다.



이처럼 구하고자 하는 함숫값의 x 좌표에서, 나머지 실근까지의 거리를 모두 곱하면 함숫값을 구할 수 있다. 즉, 거리를 모두 곱하는 방법이라고 하여 이 방법을 **거리곱**이라고 부르는 것이다.

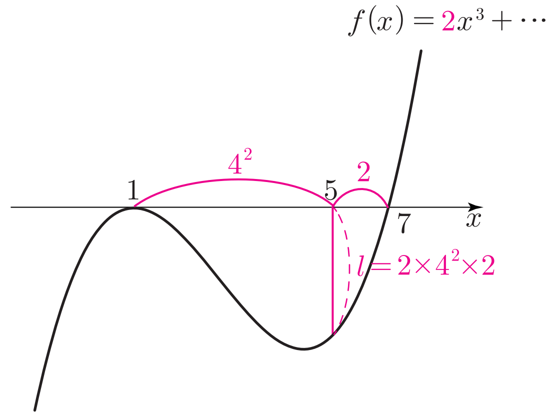
만약 중근이 있을 때는 어떻게 구해야 할까? 아래 함수의 그래프에서 l 의 길이를 구해보자.



$f(x) = 2(x-1)^2(x-7)$ 이므로 이번에도 l 의 길이를 구해보면

$$(l \text{ 의 길이}) = |f(5)| = |2 \times (5-1)^2 \times (5-7)|$$ [1)]

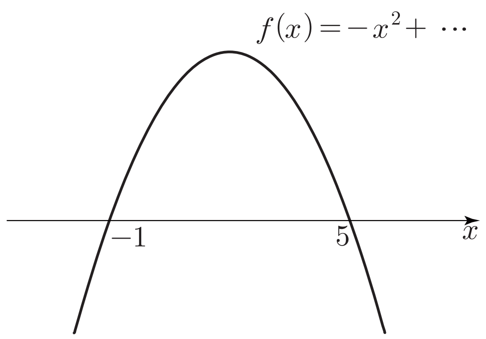
이다. 이를 그림에 표현하면 다음과 같다.



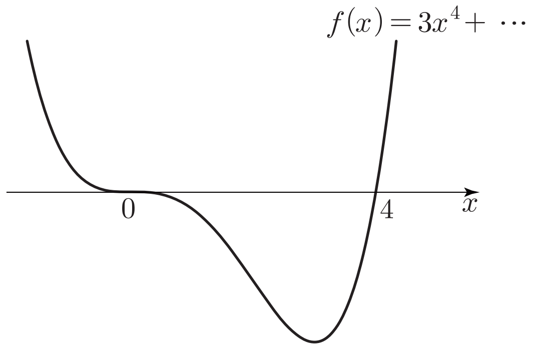
결국 **중근과의 거리는 제곱**해서 곱해주면 되는 것이다. 또한, 같은 방법으로 생각하면 **삼중근과의 거리는 세제곱**, **사중근과의 거리는 네제곱**하여 곱해주면 된다는 것도 알 수 있을 것이다. 다음 장에 있는 예제들로 직접 연습해보자.

1) 거리곱을 사용할 때는 최고차항의 계수를 항상 곱해주어야 한다.

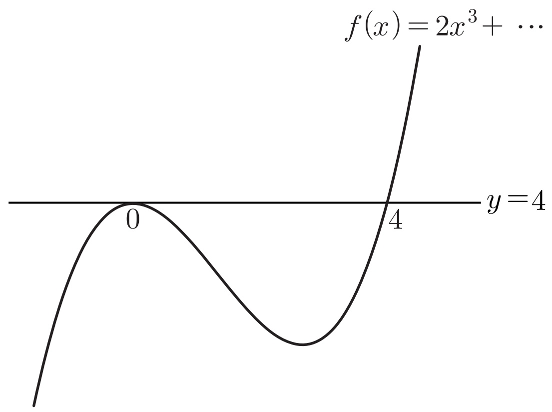
EX1 $f(3)$의 값을 구하시오.



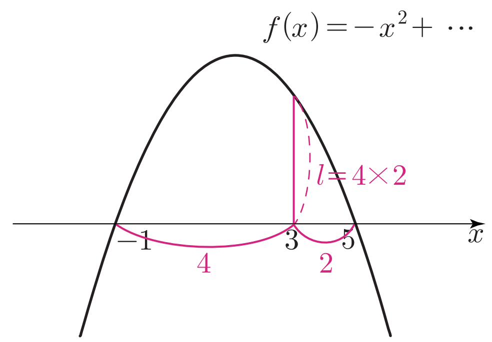
EX2 $f(2)$의 값을 구하시오.



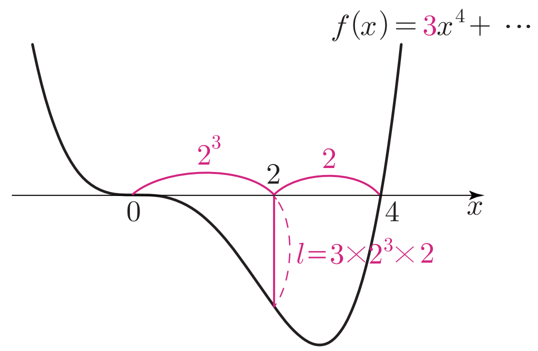
EX3 $f(3)$의 값을 구하시오.



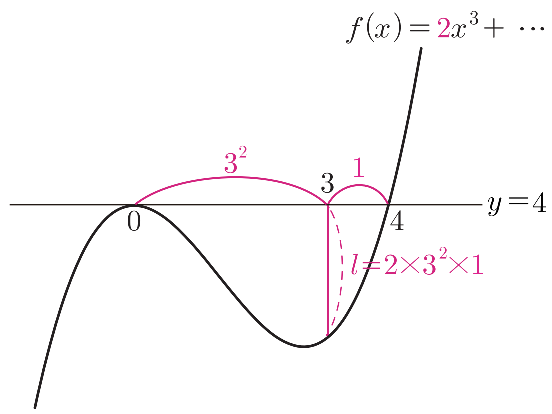
EX1 풀이



EX2 풀이



EX3 풀이



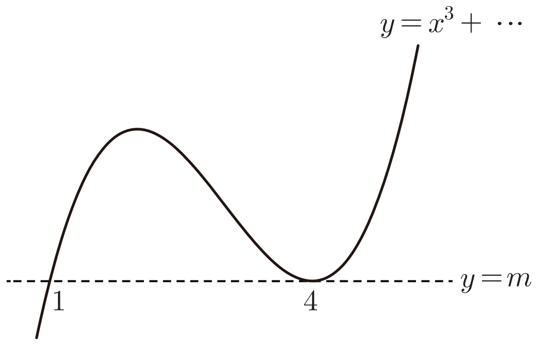
x축이 아니라 $y=4$가 나왔다고 해서 당황하지 말자. 동일하게 거리곱을 사용하면 $y=4$와 떨어진 거리가 l이므로, $f(3)=4-l=-14$이다.

조금 더 실전적인 상황에 적용해보기 위해, 다음 예제를 풀어보자.

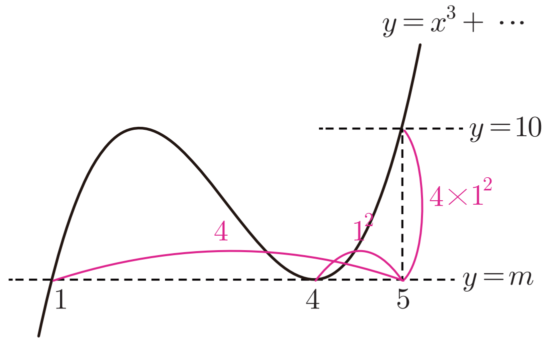
01 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=4$에서 극솟값 m을 가진다.
$f(1)=f(4)$, $f(5)=10$일 때, m의 값은?

풀이

문제의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

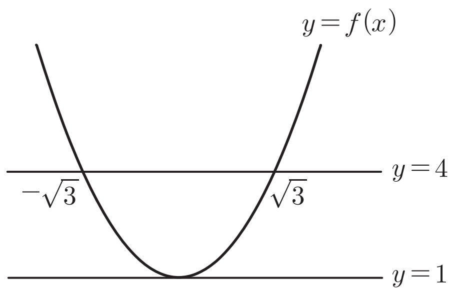


이제, $f(5)=10$을 이용하여 아래 그림과 같이 극솟값을 기준으로 거리곱을 사용하자.



즉, 극솟값 m은 $10-4=6$임을 알 수 있다. 이처럼 거리곱을 사용할 때는 어느 y값을 기준으로 사용할 것인지, **기준선**을 정하는 것이 중요하다. 함숫값 거리곱은 **기준선과 떨어진 거리**를 구하는 것이기 때문이다. 다음 예제도 직접 풀어보자.

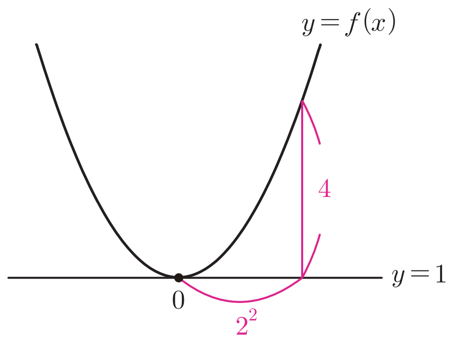
02 다음은 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. $f(2)$의 값을 구하시오.



풀이

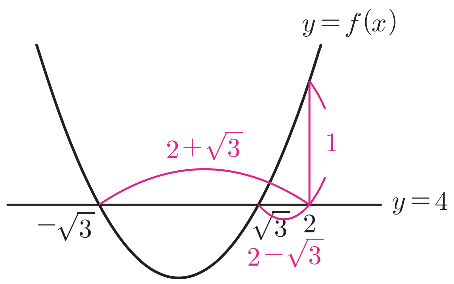
이런 상황에서는 두 가지의 기준선을 사용할 수 있다.

① $y=1$을 기준선으로 선택하는 경우



$\therefore\ f(2)=1+4=5$

② $y=4$를 기준선으로 선택하는 경우



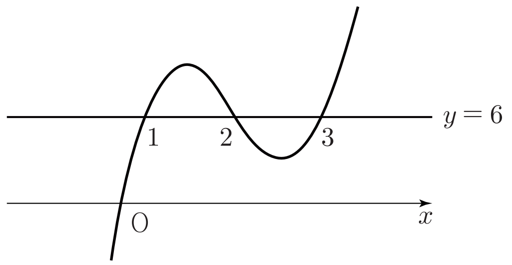
$\therefore\ f(2)=4+1=5$

독자 여러분은 $y=1$과 $y=4$중 어느 것을 기준선으로 정했는가? $y=1$을 기준선으로 정했다면 간단하게 구할 수 있었을 것이고, $y=4$를 기준선으로 정했다면 계산이 약간 더 복잡했을 것이다. 하지만 $y=1$과 $y=4$는 모두 올바른 기준선이므로, 어떤 기준선을 선택하여도 답은 같다. 그렇다면 **잘못된 기준선**도 있을까? 다음 장에서 잘못된 기준선에 대해 알아보자.

잘못된 기준선은 무엇일까?

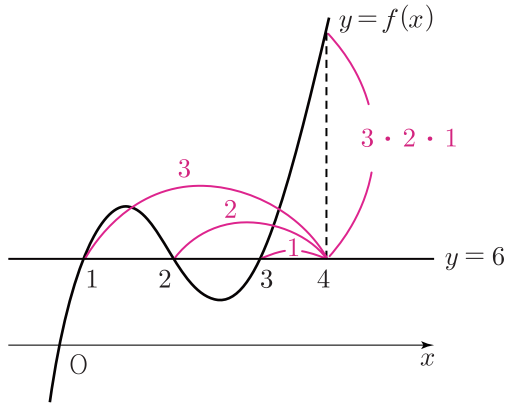
거리곱을 사용할 때는 잘못된 기준선만 사용하지 않으면 문제없다. 다음 예시를 보자.

01 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다. $f(4)$의 값은?

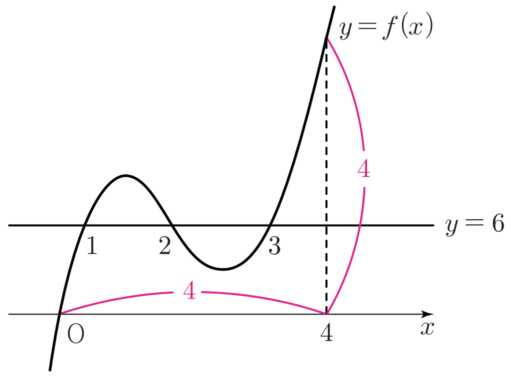


풀이

올바른 방법은, 아래와 같이 $y=1$을 기준선으로 하여 $f(4)=6+3\cdot2\cdot1$로 구해주면 된다.



하지만 아래와 같이 x축을 기준선으로 하여 $f(4)$의 값을 구해보면 $f(4)=4$라는 잘못된 결과가 나온다.

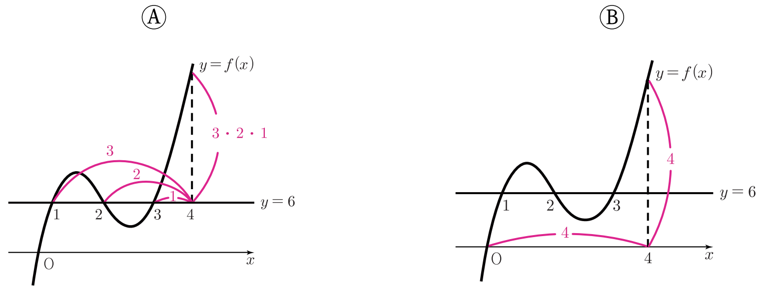


왜 이런 결과가 나오는 것일까? 실제로 삼차함수 $f(x)$의 식을 구해보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)+6 \quad \cdots \text{Ⓐ} \\ &= x(x^2-6x+11) \quad \cdots \text{Ⓑ}^{1)} \end{aligned}$$

1) Ⓐ를 전개하고 x로 묶으면 Ⓑ가 나온다.

Ⓐ의 식에 $x=4$를 대입하면 정상적으로 $f(4)=3\times2\times1+6$이 나오는 것이고, Ⓑ의 식에 $x=4$를 대입하면 $f(4)=4\times3$이 나온다.



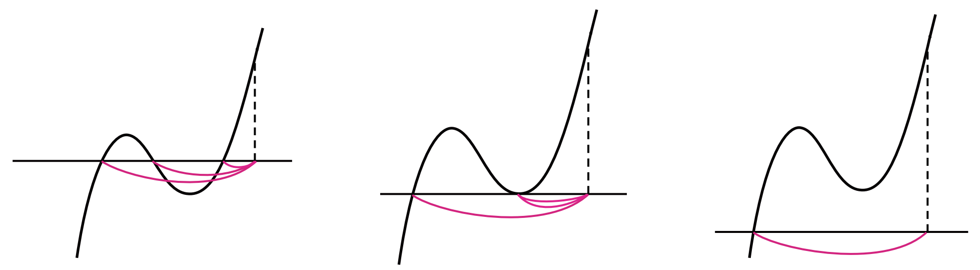
(O) (X)

즉, Ⓑ에서는 기준선을 x축으로 잡고 거리곱을 사용하면 x에 곱해져 있는 이차함수[2]에 $x=4$를 대입한 값을 곱하지 않은 것이므로 오류가 발생한다.

2) $x^2-6x+11$을 말하는 것이다.

결국 삼차함수라면 3개의 실근이 있을 때만 거리곱을 사용할 수 있다.[3] 기준선을 잡을 때는 **허근이 없어야 한다는 것**이다.

3) 마찬가지로 n차 다항함수에서는 n개의 실근이 있어야 한다.



(O) (O) (X)

위와 같은 원칙만 이해했다면, 즉 허근이 없는 상황이라면 기준선은 어디로 잡든 상관없다. 이 원칙은 앞으로 이 책에서 배울 모든 거리곱에 동일하게 적용된다.[4]

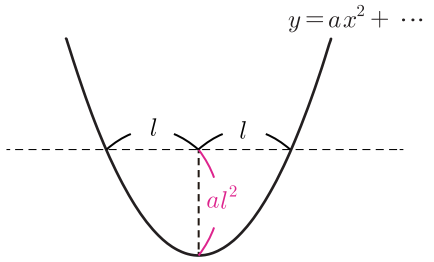
4) 이 책에서 배울 모든 거리곱의 종류는 아래와 같다.

1. 함숫값 거리곱
2. 미분계수 거리곱
3. 도함수 거리곱
4. 차함수 거리곱 (함숫값, 미분계수)
5. 적분 거리곱

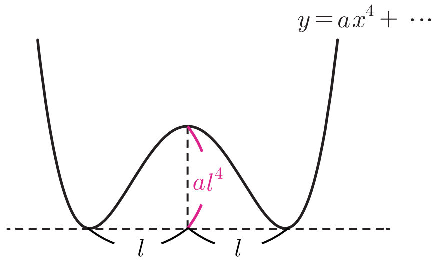
거리곱의 관점으로 바라본 길이 공식들

함숫값 거리곱은 단순히 그래프를 이용하여 함숫값을 간단하게 구할 때도 쓰이지만, 길이 공식을 다룰 때도 유용하게 사용된다. 다음은 다항함수 문제를 풀 때 유용하게 사용되는 두 가지 길이 공식이다.[1]

① 이차함수 길이 공식 al^2

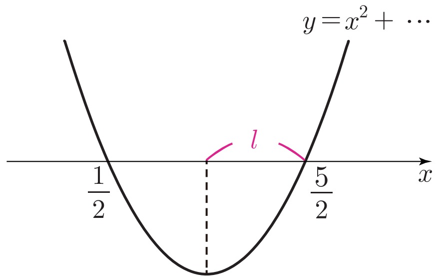


② 사차함수 길이 공식 al^4

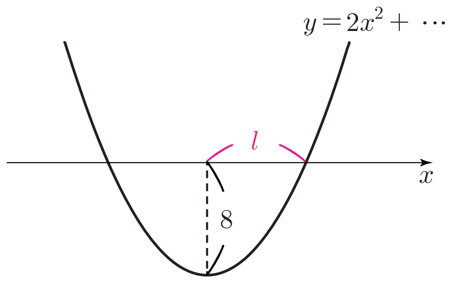


평행이동을 활용하면 ①과 같은 경우 $f(x)=a(x-l)(x+l)$로 놓고 $x=0$을 대입하여 $f(0)=-al^2$으로 길이 공식을 직접 유도할 수 있다.[2] 하지만, 거리곱을 사용하면 식을 생각하지 않아도 이 공식들이 아주 당연하다는 것이 느껴질 것이다.[3]

거리곱을 자유자재로 사용할 수 있다면 위와 같은 길이 공식들을 굳이 암기하지 않아도 그때그때 쉽게 유도해낼 수 있다. 참고로 이차함수 al^2 공식은 다음과 같은 상황에서 유용하게 사용된다.



위 그림과 같은 상황에서 이차함수의 최솟값을 빠르게 구할 수 있고,[4]



혹은 반대로 이차함수의 최솟값이 주어질 때 l을 쉽게 구할 수 있다.[5]

1) 삼차함수를 포함하여 몇 가지의 길이 공식이 더 있지만, 비율 관계와 같은 성질들을 알아야 하므로 이 공식들은 좀 더 뒷부분에 설명되어 있다.

2) ②와 같은 경우에는 $f(x)=a(x+l)^2(x-l)^2$로 놓고 $x=0$을 대입하여 $f(0)=al^4$으로 유도할 수 있다.

3) 거리곱으로도 직접 한 번 구해보자.

4) $l=1$이므로 최솟값은 $-al^2=-1$이다.

5) $2l^2=8$이므로 $l=2$이다.

사차함수 al^4이 직접적으로 이용된 기출문제를 한 번 풀어보자. 풀이는 다음 장에 있다.

01 원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2+x)=f(2-x)$
> (나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$의 극댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점] [2007. 07]

01 원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

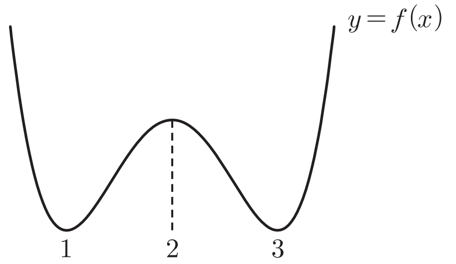
> (가) $f(2+x)=f(2-x)$
> (나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$의 극댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점] [2007. 07]

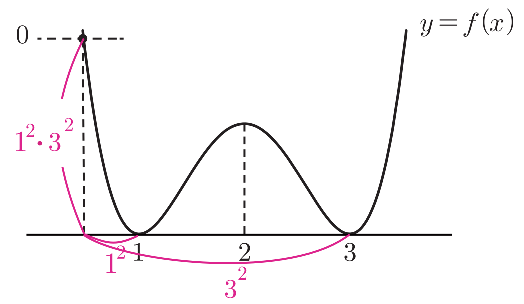
풀이

먼저 (가) 조건에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이라는 것을 알 수 있고,[1] (나) 조건까지 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프를 그려주면 다음과 같다.

1) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(a+x)=f(a-x)$를 만족시키면 곡선 $y=f(x)$는 $x=a$에 대하여 대칭이다. (선대칭 조건)

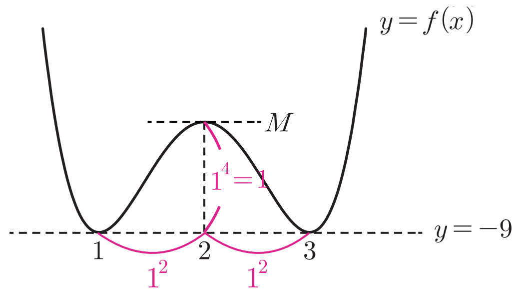


이제 원점을 지나는 조건, 즉 $f(0)=0$을 이용하기 위해 극솟값을 기준선으로 하여 $x=0$에서 거리곱을 사용하자.



따라서 극솟값은 -9임을 알 수 있다. 극댓값은 다음과 같이 al^4 공식을 사용하자.[2]

2) 물론 거리곱으로 구해도 된다.



$M=-9+1=-8$이므로 정답은 $M^2=64$이다.

축은 꼭 그려야 할까?

바로 직전의 예제와 관련된 내용이다. 독자 여러분은 그래프를 그릴 때 항상 x축과 y축을 먼저 그리고 시작하는가? 필자가 가르쳤던 학생 중에는 습관적으로 축을 먼저 그리고 시작하던 학생들이 많았는데, 필자는 이러한 학생들에게

"축을 항상 그릴 필요는 없다."

라고 말하는 편이다. 물론 축을 그리면 편한 문제도 분명히 존재한다.[1] 하지만 조금 전의 예제를 다시 생각해보자.

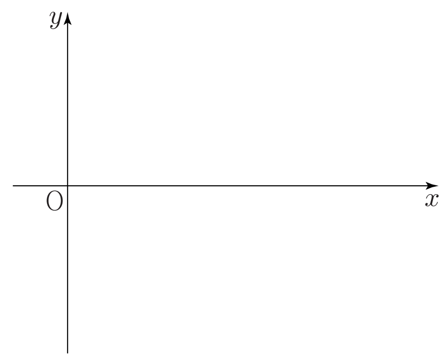
1) y축 대칭 조건, x축과 만나는 조건(=실근 조건), 절댓값 함수 추론 등

01 원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2+x)=f(2-x)$
> (나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$의 극댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점] [2007. 07]

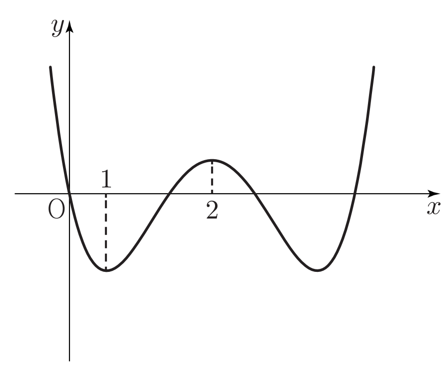
위 문제에서 아래와 같이 x축, y축을 먼저 그려놓고 함수 $f(x)$의 개형을 그려보려고 한다면,



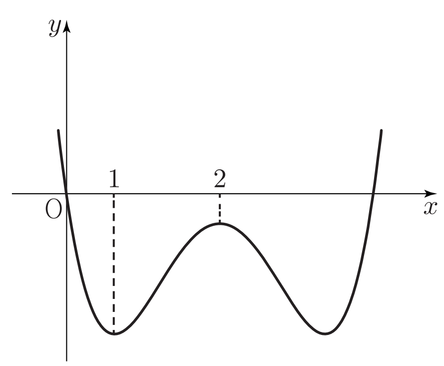
아래와 같이 두 가지 개형 중에 어떤 것을 선택해야 하는지 불필요한 고민을 하게 될 수도 있다.[2]

2) 극댓값의 부호를 고려한 두 가지 개형을 말하는 것이다.

(1)



(2)



다음 문제를 풀어보자. 아래에 풀이가 있지만 최대한 보지 않고 풀어보도록 하자.

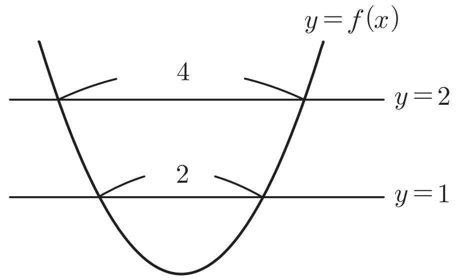
02 최고차항의 계수가 a 인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, a 의 값은? [다정 제작]

(가) 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=1$ 이 만나는 두 점 사이의 거리는 2 이다.
(나) 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2$ 가 만나는 두 점 사이의 거리는 4 이다.

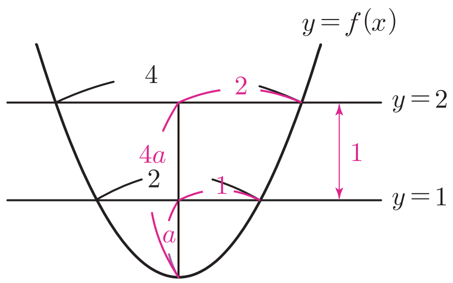
풀이

이 문제도 x 축과 y 축을 먼저 그려놓고 보면, 교점의 위치도 알 수 없으며 이차함수의 최솟값 또한 양수인지 음수인지 알 수 없어 난감하다. 따라서, 축을 그리지 않고 문제의 상황을 그림으로 단순하게 표현해보자.[1)]

1) 엄밀히 풀이하면 최고차항의 계수의 부호를 판단해야 하지만, 그래프를 통해 쉽게 양수임을 확인할 수 있다. 엄밀한 수식 풀이를 원한다면 P. 269를 읽어보자.



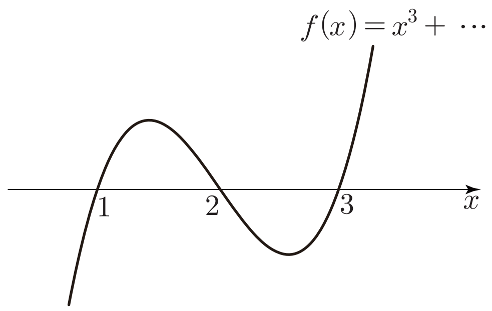
이제 조금 전에 배웠던 이차함수 al^2 공식을 이용하면 문제를 쉽게 풀 수 있다.



즉 $4a-a=1$ 에서 $a=\dfrac{1}{3}$ 이다. 이처럼 축을 그리지 않으면 더욱 간단하게 풀리는 문제가 있으므로, x 축과 y 축은 필요할 때만 그리도록 하자.

II. 미분계수 거리곱

미분계수를 구할 때도 거리곱을 사용할 수 있다. 아래의 그래프에서 $f'(3)$ 의 값을 구해보자.



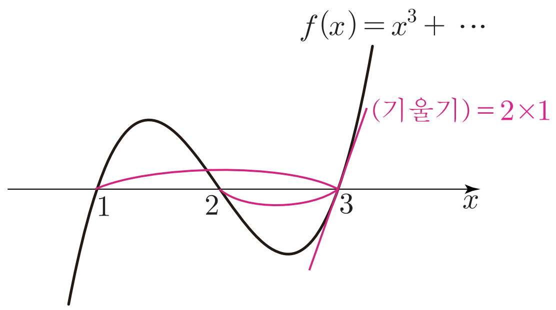
먼저 $f(x)$ 를 미분하면

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3),$$
$$f'(x)=(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)+(x-2)(x-3)$$

이므로 $f'(3)=(3-1)(3-2)$ [1)]이다. 따라서

$$(x=3\text{ 에서의 접선의 기울기}) = 2\times1$$

이고, 이를 그림에 표현하면 다음과 같다.



이전에 배운 함숫값 거리곱과 유사한 방법으로 사용하면 된다. 다음 장에 있는 예제로 연습해보자.

1) 물론 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)=(x-a)P(x)$ 일 때, $f'(a)=P(a)$ 임을 알고 있으면 곱의 미분법을 사용하지 않아도 된다. 이는 미분계수의 정의를 이용하여 쉽게 증명할 수 있다.

〈증명〉

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)P(x)}{x-a}=P(a)$$

마찬가지로 본 예시에서

$f'(3)$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)}$$
$$=(3-1)(3-2)$$

로 이해하면 쉽다.