제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{16} \times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5x-2$ 에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$4+5$

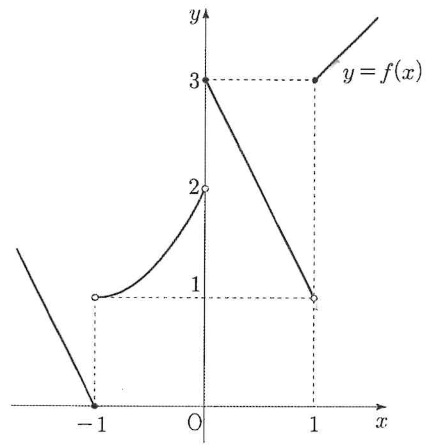
3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\tan\theta = -2$ 일 때, $\sin(\pi+\theta)$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$-\sin\theta$

$\sqrt{5}$ 2 1

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

2 . 3

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$$

를 만족시킬 때, $\int_1^2 f'(x)dx$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

8+16-10

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=4, \quad a_2a_4=1$$

일 때, a_6+a_7의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

r = 2.

$a_3 = 1$

8+16

7. 함수 $f(x)=x^3-3x+2a$의 극솟값이 $a+3$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

2a-2 = a+3

a = 5

2+10 = 12.

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x) = 6x^3 - x + f(0) + 1$$

을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(0) = -1$

$f'(x) = 6x^2 - 1$

$f(x) = 2x^3 - x - 1 \Big|_{x=-1}$

9. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(0, -\log_2 9)$, $B(2a, \log_2 7)$, $C(-\log_2 9, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(b, \log_8 7)$일 때, 2^{a+3b}의 값은? [4점]

① 63 ② 72 ③ 81 ④ 90 ⑤ 99

$\dfrac{2a - \log_2 9}{3} = b$

$a - \log_2 \frac{9}{7} = \log_2 7$

$a = \log_2 9$

$b = \dfrac{\log_2 9}{3}$

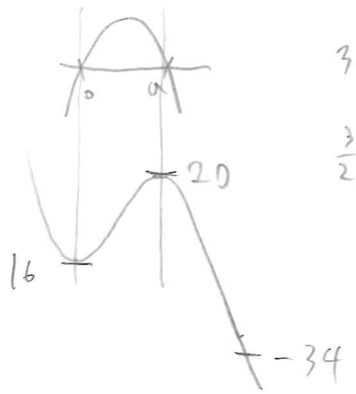
$a + 3b = \log_2 81$

10. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t(a - t)$$

이다. 시각 $t = 0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t = 2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t = 0$에서 $t = 5$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70



$3at - 3t^2$

$\frac{3}{2}at^2 - t^3 + 16 \Big|_{2a}$

$-2a^3 + 16 = 0$

$a = 2$

$3t^2 - t^3 + 16$

$4 + 54 = 58$

11. 공차가 $d\,(0 < d < 1)$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_5는 자연수이다.
(나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_8 = \frac{68}{3}$이다.

a_{16}의 값은? [4점]

① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{77}{12}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{79}{12}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

$8a_{4.5} = \frac{68}{3}$

$a_{4.5} = \frac{17}{6}$ $\frac{17}{6} < \frac{17}{6} + \frac{d}{2} < \frac{20}{6}$

$a_5 = 3$

$d = \frac{1}{3}$

$3 + 11d = \frac{20}{3}$

12. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 4$일 때, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x) + 16$이다.

$\int_4^7 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$ ④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

$64 + 16a + 4b = 16$

$\cancel{a = \frac{2}{3}}$

$a = -6$
$b = 12$

$\int_0^3 f(x) + 16 = ?$

$48 + \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2\right]_0^3$

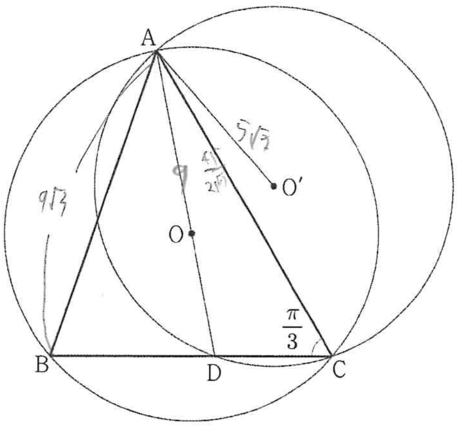
$\frac{81}{4} - 54 + 54$

$\frac{192+81}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7},\quad \sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7},\quad \angle ACB=\frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 중심을 O′이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$이다. $\overline{OO'}^2$의 값은? (단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$ ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

$\frac{36/\sqrt7}{2/\sqrt7} = 18 = 2R_0$

$\frac{AB}{\sqrt3/2} = 18$

$\frac{1}{2} = \frac{\frac{36^2}{7} + x^2 - 81\cdot3}{2\cdot\frac{36}{\sqrt7}\cdot x}$

$\frac{36}{\sqrt7}x = x^2 + \frac{36^2}{7} - 81\cdot3$

$7x^2 - 36\sqrt7x + (36^2 - 81\cdot21)$

$9^2 - \frac{9^2\cdot5^2}{28}$ $\quad 25\cdot3 - \frac{9^2\cdot5^2}{28}$

$\sqrt{9^2\cdot\frac{3}{28}} + \sqrt{5^2\cdot3\cdot\frac{1}{28}}$

$\frac{14\sqrt3}{\sqrt{28}} \to \frac{14^2\times3}{28}$

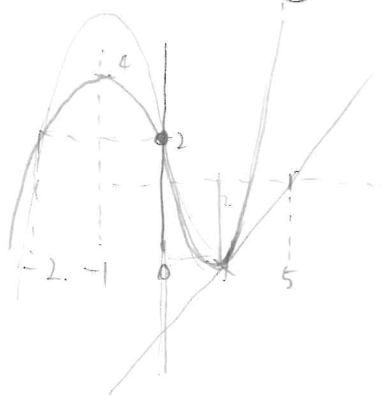
$\to 21$

14. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1)^2+4 & (x\le 0)\\ a(x-5) & (x>0)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 -2, 0, 2일 때, $g(2a)$의 값은? [4점]

① 14 ② 18 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30



$g(x) - 2 = (x+2)x(x-k)$

$g(2) = -3a,\ g'(2) = a$

$a = 2(2-k) + 8 + 4(2-k)$

$-3a - 2 = 4\cdot2\cdot(2-k)$

$a = \frac{6}{8}(-3a-2) + 8$

$8a = -18a - 12 + 64$

$a=2 \quad k=3$

$g(4) - 2 = 4\cdot6\cdot1$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_n \ge 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n \text{이 자연수인 경우}\right) \text{ 짝} \\ (a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}\right) \text{ 홀}, 0 \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

$a_7 = 1$

1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64
1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 5 – 10
1 – 2 – 4 – 3 – 6 – 12 – 24
1 – 0 – 1 – 2 – 4 – 8 – 16
1 – 0 – 1 – 2 – 4 – 3 – 6
1 – 0 – 1 – 0 – 1 – 2 – 4
1 – 0 – 1 – 0 – 1 – 0 – 1

125

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+9)=\log_5 4+\log_5(x-6)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x+9=4x-24$

11

17. 함수 $f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오. [3점]

$28+2\cdot(11)$

50

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=45,\quad 2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$$

일 때, a_{15}의 값을 구하시오. [3점]

$3S+30=45$ $\quad S=5$

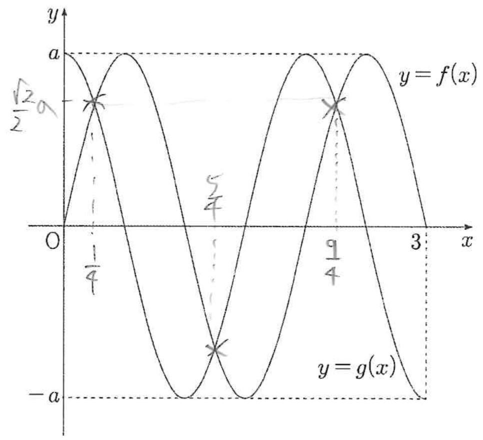
$5+a_{15}=42.$

37

19. 양수 a에 대하여 $0\le x\le 3$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=a\sin\pi x,\quad g(x)=a\cos\pi x$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]



$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times 2=2.$

$a=\sqrt{2}$ $\quad$ 2

20. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\ (a\ne 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

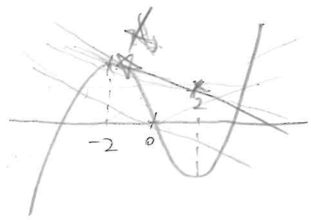
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

Max{f, g}

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

> 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10\times(M-m)$의 값을 구하시오. [4점]



$a<0=M$

$2=(3t^2-12)(2-t)+t^3-12t.$

$2=6t^2-24-2t^3$

$2t^3-6t^2+26=0$

$t^3-3t^2+13=0$

(x)

$(-2, 16)$

$-4a+2=16$

$a=-\frac{7}{2}=m$

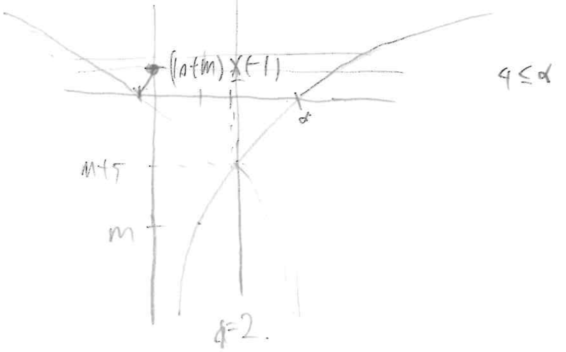
35

21. $m \le -10$인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |5\log_2(4-x)+m| & (x \le 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$의 값을 구하시오. [4점]

> $t \ge a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은 2이다.



$-10-m=2.\quad m=-12.$

$f(-12)=|5\log_2 16-12|$

$=8$

$\therefore 8$

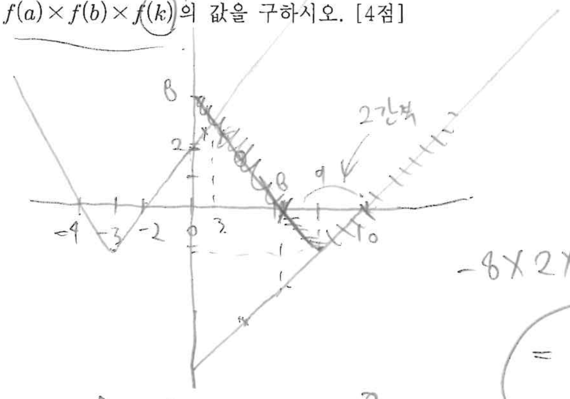
22. 두 자연수 $a,\ b\,(a<b<8)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<a) \\ x-10 & (a \le x < b) \\ |x-9|-1 & (x \ge b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 양수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)f(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $f(k)<0$

$f(a)\times f(b)\times f(k)$의 값을 구하시오. [4점]



$-8\times 2\times -6$

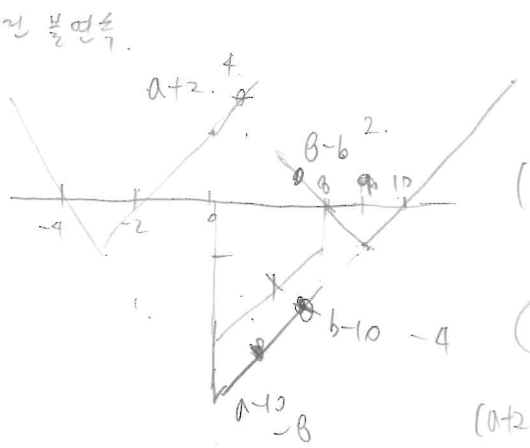
$=96$

$\boxed{2\ 4}$ $k=6$

$a+k=6$

$b+k=10$

$-2+k=a$



$(a+2)$

$k=4$

$a=2$ $b=6$

$(a+2)(b-10)$

$=(a-10)(8-b)$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{\ln 5}{3}$ ② $\frac{1}{\ln 5}$ ③ $\frac{2}{3}\ln 5$ ④ $\frac{2}{\ln 5}$ ⑤ $\ln 5$

24. 매개변수 $t\ (t>0)$ 으로 나타내어진 함수

$$x=3t-\frac{1}{t},\quad y=te^{t-1}$$

에서 $t=1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

$3+\frac{1}{t^2}$ $(t+1)e^{t-1}$

$\frac{2}{4}$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n \times \left(\sqrt{n^2+4}-n\right)\right\}=6$$

일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

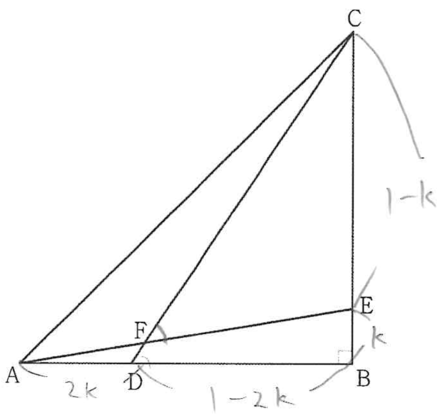
$a_n = 3n.$

$\frac{12}{3}$

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E가

$$\overline{AD}=2\overline{BE} \quad (0<\overline{AD}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD가 만나는 점을 F라 하자. $\tan(\angle CFE)=\frac{16}{15}$일 때, $\tan(\angle CDB)$의 값은? (단, $\frac{\pi}{4}<\angle CDB<\frac{\pi}{2}$) [3점]



① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$m_1 = \frac{1}{1-2k}$ $m_2 = k.$ $m_1 = ?$

$\frac{16}{15} = \frac{\frac{1}{1-2k} - k}{1 + \frac{k}{1-2k}} = \frac{1-k(1-2k)}{1-k}$

$2k^2-k+1$

$16-16k = 30k^2-15k+15$

$\cancel{46k^2+k+1}$

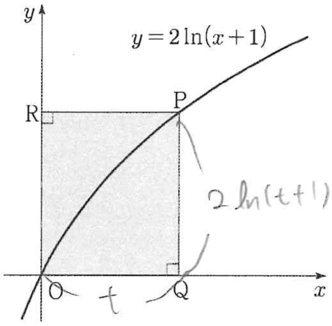
$30k^2-k-1$ $k=\frac{1}{6}$

$\frac{5}{6}$ -1

$\therefore \frac{3}{2}$

27. 양수 t에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자. $\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $-2+12\ln 2$ ② $-1+12\ln 2$ ③ $-2+16\ln 2$
④ $-1+16\ln 2$ ⑤ $-2+20\ln 2$



$2\int_1^3 t\ln(t+1)$

$2\int_2^4 (t-1)\ln t$

$2\int_2^4 t\ln t \quad -2\left[t\ln t - t\right]_2^4$

$\ln t \quad t$

$\frac{1}{t} \quad \frac{1}{2}t^2$

$6\ln 2-2.$

$\left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_2^4-\int_2^4 \frac{t}{2}$

$2(14\ln 2-3)-2(6\ln 2-2)$

$16\ln 2-2$

28. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 삼차함수 (단조증가, $f'\geq 0$) $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 $k\,(k>0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k)\\[2mm] \dfrac{1}{3} & (x=k)\end{cases}$$

$\lim_{x\to k} \quad g(k)=k. \quad g'(k)=\frac{1}{3}$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값이 최대일 때, k의 값을 α라 하자.

$=b$

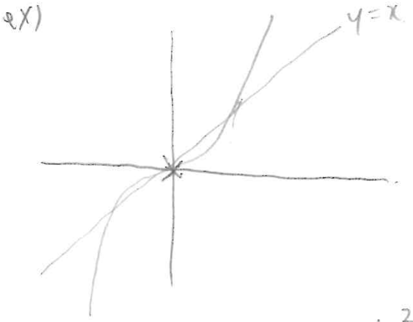
(가) $h(0)=1$ $\rightsquigarrow$ $g(0)=0$ (나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{2}$

$k=\alpha$일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{84}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{28}$ ④ $\frac{1}{21}$ ⑤ $\frac{5}{84}$

ex)



$\alpha=2.$

$b=3$

$a=-3$

$k^2+ak+b=1$

$b=k^2-1$

$3k^2+2ak+b=3$

$2k^2+ak=2.$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$a^2-3b\leq 0$

$2-2k^2$

$\left(\frac{2}{k}-2k\right)^2-3(k^2-1)\leq 0$

$\frac{4}{k^2}-8+4k^2-3k^2+3$

$k^2+\frac{4}{k^2}-5\leq 0$

k^4-5k^2+4

$1\leq k^2\leq 4$

$1\leq k\leq 2$

$f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f(3)=9$

$3x^2-6x+3$

$\frac{1}{7}$

단답형

29. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점]

r^{n-1}

$(-1<r<1)$

$\frac{20a_2}{1-r^2}+\frac{21|a_2|}{1-|r|^3}=0$

$r<0$

$\frac{20}{1-r^2}+\frac{-21}{1+r^3}=0$

$\frac{20}{1-r}=\frac{21}{r^2-r+1}$

$20r^2-20r+20=21-21r$

$20r^2+r-1=0$

$r=-\frac{1}{4}$

$\frac{b_n}{a_n}=(-3)(-1)^n$

$\frac{3(\frac{1}{4})^{n-1}+b_n}{(-\frac{1}{4})^{n-1}}$

-3 $\frac{b_1}{a_1}$ 3 $\frac{b_2}{a_2}$

$-4\times(-\frac{1}{4})^n$

$b_n=12\times(\frac{1}{4})^n$

$3\times\frac{3}{1-\frac{1}{4}}$

12

30. 상수 $a\,(0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \ln(e^{|t|}-a)dt$$

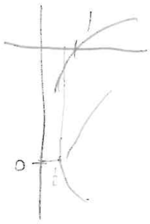
$\ln|e^{|x|}-a|$ $\frac{e^x}{e^x-a}$ $\boxed{\text{직접 계산 불가능}}$ $f'(x)=\ln(e^{|x|}-a)$

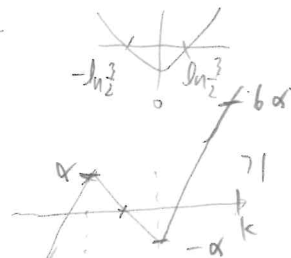
라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다. $a=\frac{1}{2}$
>
> (나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오.

[4점]





$-\ln\frac{3}{2}$ $\ln\frac{3}{2}$ 6α α $-\alpha$ k $e^x=t$ $e^x dx=dt$

$-e^{-x}dx=dt$ $e^x dx=dt$

$\ln(e^{-x}-\frac{1}{2})$ $\ln(e^x-\frac{1}{2})$

$\left[x\ln(e^{-x}-\frac{1}{2})\right]_0^{-\ln\frac{3}{2}}+\int_0^{-\ln\frac{3}{2}}\frac{xe^{-x}}{e^{-x}-\frac{1}{2}}$ $\frac{-\frac{1}{2}x}{e^{-x}-\frac{1}{2}}$

$-\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{1}{t}$ $-\int_{6\alpha}^{15\alpha}\frac{1}{t}dt+\int_{5\alpha}^{12\alpha}\frac{1}{t}$

$\ln t$

$-\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{12}{5}$ $\frac{6\times12}{25}\times100\times\frac{1}{2}$

144

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.