# 약점보완 테스트 10회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

**1.** 첫째항이 20인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

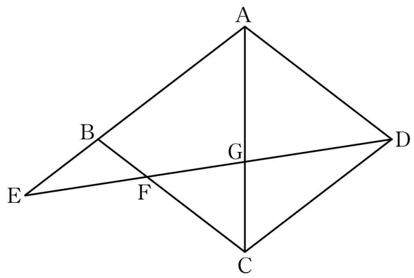
$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $T_9 > T_{10}$ (나) $T_{10} = T_{11}$ |

$\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $T_n < S_5$을 만족하는 모든 자연수 $n$의 값의 합을 구하시오.

**2.** 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$인 평행사변형 ABCD가 있다. 변 AB의 연장선 위에 $\overline{BE} = 1$이 되도록 점 E를 잡고, 선분 ED가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 F, G라 하자.




<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

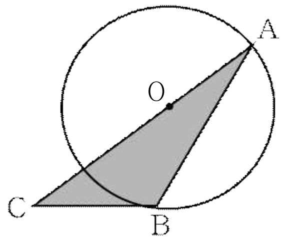
ㄱ. $\overline{BF} : \overline{AD} = 1 : 3$

ㄴ. $\overline{FG} : \overline{GD} = 5 : 7$

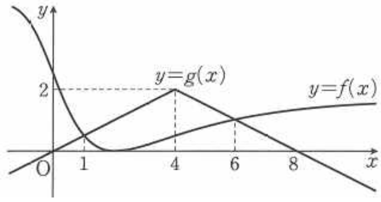
ㄷ. $\triangle GFC : \triangle ACD = 4 : 15$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점 A에 대하여 $\sin(\angle\mathrm{OAB})=\frac{1}{4}$이 되도록 원 위에 점 B를 잡는다. 점 B에서의 접선과 선분 AO의 연장선이 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [대원외고 기출]




4. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$의 그래프가 다음 그림과 같다.




$0\le a\le 8$인 $a$에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은?

① $14-5\ln 5$ ② $15-5\ln 10$ ③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$ ⑤ $16-5\ln 5$

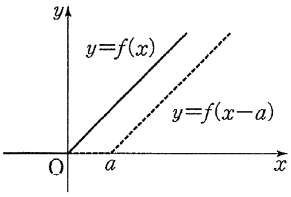
5. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

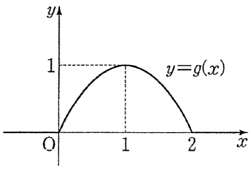
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x \le 0)\\ x & (x>0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x(2-x) & (|x-1| \le 1)\\ 0 & (|x-1|>1)\end{cases}$$

이다. 양의 실수 $k$, $a$, $b$ $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 $x$에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 $k$, $a$, $b$에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오.



## 정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] 73

$$S_n = \frac{n\{40+d(n-1)\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \frac{n}{2}(40-d)$$

(가)에 의해

$$\left|\frac{9(40+8d)}{2}\right| > \left|\frac{10(40+9d)}{2}\right|$$

$360+72d > 400+90d$

$-40 > 18d$

$\therefore\ d < -\frac{20}{9}$

(나)에 의해

$$\left|\frac{10(40+9d)}{2}\right| = \left|\frac{11(40+10d)}{2}\right|$$

① $10(40+9d) = 11(40+10d)$

$40+9d = 44+11d$

$\therefore\ d = -2$

하지만 $d < -\frac{20}{9}$를 만족하지 않으므로 성립하지 않는다.

② $10(40+9d) = -11(40+10d)$

$40+9d = -44-11d$

$\therefore\ d = -\frac{21}{5}$

$T_n < S_5$

$$\left|-\frac{n}{10}(21n-221)\right| < \frac{5}{2}\left(40+4\left(-\frac{21}{5}\right)\right) = 58$$

$-58 < -\frac{n}{10}(21n-221) < 58$

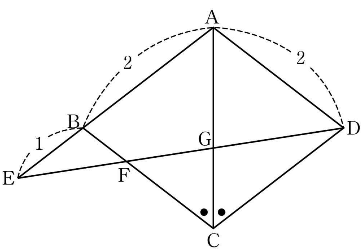
$-580 < n(21n-221) < 580$

$\therefore\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$

그러므로 자연수 $n$의 합은

$$\sum_{k=1}^{12} k - 5 = \frac{12\times 13}{2} - 5 = 73$$

2) [출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 성립하는 내용을 추론한다.




ㄱ. 두 삼각형 EBF와 EAD에서 두 선분 BF와 AD가 평행하므로

$\angle EBF = \angle EAD$, $\angle EFB = \angle EDA$

따라서 $\triangle EBF \backsim \triangle EAD$

$\overline{BF} : \overline{AD} = \overline{EB} : \overline{EA} = 1 : 3$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\overline{BF} : \overline{AD} = 1 : 3$이므로

$\overline{BF} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}$

$\overline{FC} = \overline{BC} - \overline{BF} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

삼각형 CFD에서

선분 CG는 각 FCD의 이등분선이므로

$\overline{FG} : \overline{GD} = \overline{CF} : \overline{CD} = \frac{4}{3} : 2 = 2 : 3$ (거짓)

ㄷ. $\triangle GFC = a$라 하자. 두 선분 FC와 AD가 평행하므로

$\angle FCG = \angle DAG$, $\angle CFG = \angle ADG$

따라서 $\triangle GFC \backsim \triangle GDA$

$\overline{FC} : \overline{AD} = 2 : 3$이므로

$\triangle GFC : \triangle GDA = 4 : 9$

$\triangle GDA = \frac{9}{4}a$ … ㉠

두 삼각형 CFG와 CDG의 높이는 서로 같고 ㄴ에서

$\overline{FG} : \overline{GD} = 2 : 3$이므로

$\triangle CFG : \triangle CGD = 2 : 3$

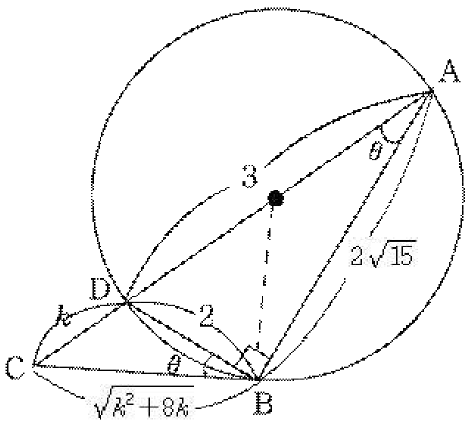
$\triangle CGD = \frac{3}{2}a$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\triangle ACD = \triangle GDA + \triangle CGD = \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}a = \frac{15}{4}a$

따라서 $\triangle GFC : \triangle ACD = a : \frac{15}{4}a = 4 : 15$ (참)

3) [정답] $\frac{15\sqrt{15}}{7}$




$\angle OAB = \theta$라 하자.

원과 선분 AC의 교점을 점 O라 하자.

$\angle OAB = \theta$, $\angle OBC = \theta$, $\angle OBA = \frac{\pi}{2}$

( $\angle DBC = \angle OAB$ → 접선과 현이 이루는 각은 호의 원주각과 동일하다.)

( $\angle DBA = \frac{\pi}{2}$ → 현이 지름인 원주각이므로)

$\overline{DB} = \overline{DA} \times \sin\theta = 2$

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{DB}^2} = 2\sqrt{15}$

( $\angle ACB$ 공통, $\angle DBC = \angle BAC \Rightarrow$ AA 닮음)

$\triangle$DCB∽$\triangle$BCA, 닮음비 $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{DB}}$ : $\overline{\mathrm{BA}}=1$ : $\sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{DC}}$ : $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CB}}$ : $\overline{\mathrm{CA}}=1$ : $\sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{DC}}=k$라 하자.

$\Rightarrow k$ : $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ : $k+8$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{k(k+8)}=k\times\sqrt{15}$

$\sqrt{k+8}=\sqrt{15k}$

$k=\dfrac{4}{7}$

$\triangle$ABC의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{60}{7}\times 2\sqrt{16}\times\sin\theta$

$=\dfrac{15\sqrt{15}}{7}$

4) 답 ④

[해설]

**1단계** $h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$로 놓고 이 등식의 양변을 $a$에 대하여 미분하면

$h'(a)=f(a)-g(a)$

$h'(a)=0$에서 $f(a)=g(a)$이므로 주어진 그림에서 $a=1$ 또는 $a=6$

**2단계** $0\le a\le 8$에서 함수 $h(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 6 | $\cdots$ | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

$h(0)=\int_0^0 f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx=\int_0^8 g(x)dx$

$=\int_0^4\dfrac{4+(x-4)}{2}dx+\int_4^8\dfrac{4-(x-4)}{2}dx$

$=\int_0^4\dfrac{x}{2}dx+\int_4^8\left(4-\dfrac{x}{2}\right)dx$

$=\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_0^4+\left[4x-\dfrac{x^2}{4}\right]_4^8=4+4=8$

$h(6)=\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$

$=\int_0^6\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_6^8\dfrac{4-(x-4)}{2}dx$

$=\int_0^6\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_6^8\left(4-\dfrac{x}{2}\right)dx$

$=\left[\dfrac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^6+\left[4x-\dfrac{x^2}{4}\right]_6^8$

$=(15-5\ln 10)+1=16-5\ln 10$

$\therefore h(0)-h(6)=8-(16-5\ln 10)=-8+5\ln 10$

이때 $e^2<10<e^3$에서 $2<\ln 10<3$

즉, $10<5\ln 10<15$이므로 $-8+5\ln 10>0$

따라서 $h(0)>h(6)$이므로 함수 $h(a)$의 최솟값은 $h(6)=16-5\ln 10$

[참고] 함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하면

$\int_a^8 g(x)dx=[G(x)]_a^8=G(8)-G(a)$이므로

$\dfrac{d}{dx}\int_a^8 g(x)dx=\dfrac{d}{dx}\{G(8)-G(a)\}=-G'(a)=-g(a)$

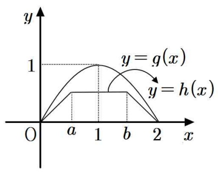
5) [정답] 200

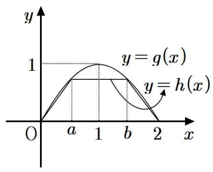
주어진 함수 $h(x)$를 $x=a$와 $x=b$를 기준으로 구간을 나누어 정의해 보면

$$h(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ kx & (0<x\le a)\\ ka & (a<x\le b)\\ k(a+b-x) & (b<x\le 2)\\ k(a+b-2) & (x>2)\end{cases}$$

$\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 최솟값을 구하는 경우에서 $\int_0^2 g(x)dx$의 값이 일정하므로 $\int_0^2 h(x)dx$가 최대일 때를 구하면 된다.

모든 실수 $x$에 대하여 $0\le h(x)\le g(x)$이므로




[그림1] [그림2]

$y=h(x)$의 그래프는 [그림1]에서 사다리꼴이고 [그림2]처럼 $g(x)$에 접하는 사다리꼴일 때 $\int_0^2 h(x)dx$의 값이 최대가 된다.

따라서 $h(a)=g(a)$, $h(2)=g(2)$이므로

$ka=a(2-a)$, $k(a+b-2)=0$

$\therefore k=2-a$ …… ㉠

$\therefore a+b=2$ ($\because k\ne 0$) …… ㉡

$a$, $b$는 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$a=1-t$, $b=1+t$ …… ㉢

라 하면 사다리꼴 넓이 공식에 의해

$\int_0^2 h(x)dx=\dfrac{1}{2}\times(2t+2)(1+t)(1-t)$

$=(1+t)^2(1-t)$ $(0<t\le 1)$ …… ㉣

㉣에서 $p(t)=(1+t)^2(1-t)$ $(0<t\le 1)$라 하면

$p'(t)=2(1+t)(1-t)-(1+t)^2$

$=(1+t)(1-3t)$

따라서 $p'(t)=0$일 때의 $t$의 값은 $t=-1$, $\dfrac{1}{3}$이고

$t=\dfrac{1}{3}$일 때 극대이면서 최대가 된다. ($\because$ $0<t\le 1$)

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{4}{3}$, $k=\dfrac{4}{3}$

$\therefore 60(a+b+k)=200$