제 2 교시

수학 영역

1. [2024년 6월 (공통) 1번]

$\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　③ 1　④ $\sqrt{5}$　⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

2. [2024년 6월 (공통) 2번]

함수 $f(x)=x^2+x+2$에 대하여

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f'(x)=2x+1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=2\times2+1=5$$

3. [2024년 6월 (공통) 3번]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

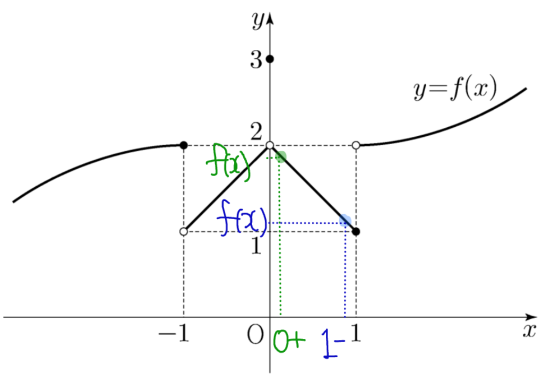
$$\sum_{k=1}^{5}a_k+5=9$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{5}a_k=4$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_k+a_6=4+4=8$$

4. [2024년 6월 (공통) 4번]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=2+1=3$$

제 2 교시

수학 영역

5. [2024년 6월 (공통) 5번]

함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f'(x)=2x(x^2+2x+2)+(x^2-1)(2x+2)$

$\therefore\ f'(1)=2\times5+0\times4=10$

6. [2024년 6월 (공통) 6번]

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{4}{5}\ \left(\because\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

7. [2024년 6월 (공통) 7번]

x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

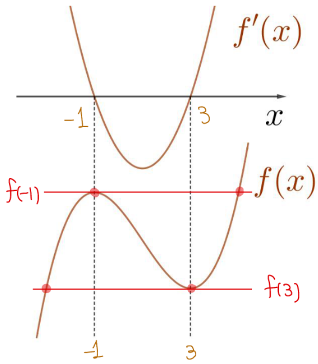
① 13 ② 16 ③ 19
④ 22 ⑤ 25

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$x^3-3x^2-9x=-k$에서

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$



$f(-1)=-k$ or $f(3)=-k$

$\therefore\ k=-f(-1)=-5$ or $k=-f(3)=27$

$\therefore$ 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+27=22$

제 2 교시

수학 영역

8. [2024년 6월 (공통) 8번]

$a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=16,\ 2a_8-3a_7=32$$

일 때, a_9+a_{11}의 값은? [3점]

① $-\dfrac{5}{2}$ ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하자.

$a_1a_2<0$이면 a_1, a_2의 부호가 다르다.

$\therefore\ r<0$

$2a_8-3a_7=32$

$\Leftrightarrow\ 2\cdot16r-3\cdot16r^2=32$ ($\because\ a_6=16$)

$\Leftrightarrow\ 2r^2-3r=2$

$\Leftrightarrow\ (2r+1)(r-2)=0$

$\therefore\ r=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a_9+a_{11}=a_6(r^3+r^5)=16\times\left(-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{32}\right)=-\dfrac{5}{2}$

9. [2024년 6월 (공통) 9번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2} & (x<0) \\ -x^2+3 & (x\ge 0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{9}{4}$ ② $-\dfrac{7}{4}$ ③ $-\dfrac{5}{4}$

④ $-\dfrac{3}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$f(x)+a=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}+a & (x<0) \\ -x^2+3+a & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$(f(x)+a)^2=\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}+a\right)^2 & (x<0) \\ (-x^2+3+a)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x=0$에서 연속이어야 하므로

$(f(0)+a)^2=(3+a)^2$

$\lim_{x\to0+}(f(x)+a)^2=\lim_{x\to0+}(-x^2+3+a)^2=(3+a)^2$

$\lim_{x\to0-}(f(x)+a)^2=\lim_{x\to0-}\left(x-\dfrac{1}{2}+a\right)^2=\left(-\dfrac{1}{2}+a\right)^2$

$\therefore\ (3+a)^2=\left(-\dfrac{1}{2}+a\right)^2$

$9+6a+a^2=\dfrac{1}{4}-a+a^2$

$\therefore\ a=-\dfrac{5}{4}$

제 2 교시

수학 영역

10. [2024년 6월 (공통) 10번]
다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $3\sin A = 2\sin B$ (나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

필연성 08

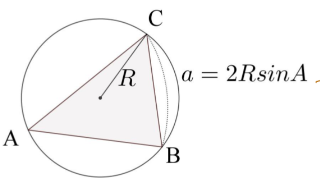
각이 2개 이상

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1각
✓ 1변 2각 → 1변
✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

✓ 외접원 있을 때



Skill 사인법칙의 흔적

✓ 사인끼리의 실수배 or 비례식이 나오면
→ 변 길이의 비로 활용한다! (사인법칙의 본질)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

→ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

필연성 05

대칭 도형 → 반띵

✓ 이등변삼각형 → 직각 삼각형

필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

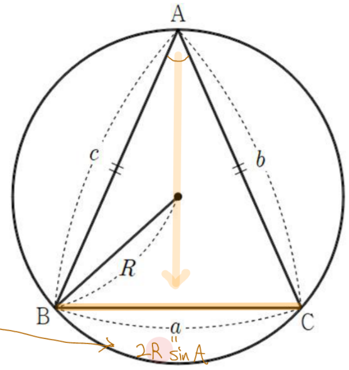
[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1변
✓ 3변 → 각

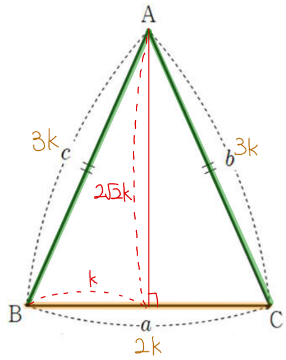
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

구하는 것 ‣ △ABC의 넓이
■ 외접원 → 사인법칙
■ 사인끼리의 실수배 → 사인법칙
■ 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

(Step1) 조건 (가) 활용하기
꼭짓점 A, B가 마주보는 변의 길이 a, b에 대하여
$3\sin A = 2\sin B$
⇔ $\sin A : \sin B = a : b = 2 : 3$

(Step2) 조건 (나) 활용하기
$\cos B = \cos C$ ⇔ $\angle B = \angle C$
∴ △ABC는 b=c인 이등변삼각형
∴ $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 3k$





{△ABC의 넓이} $= \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot 2\sqrt{2}k = 2\sqrt{2}k^2$
외접원의 넓이 9π → 외접원의 반지름 R=3
$a = 2k = 2R\sin A$를 활용하기 위해 $\sin A$값 필요

(Step3) 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

$$\cos A = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{9}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$a = 2k = 2R\sin A = 2 \cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\therefore k = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

{△ABC의 넓이} $= \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot 2\sqrt{2}k = 2\sqrt{2}k^2$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}\sqrt{2}$$

제 2 교시

수학 영역

11. [2024년 6월 (공통) 11번]
최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

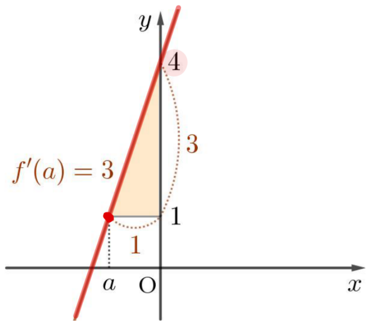
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

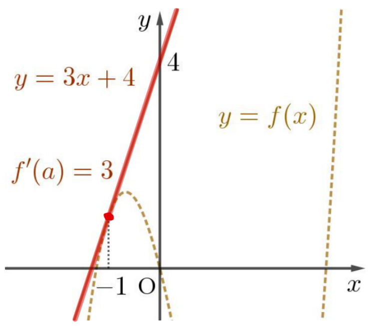
$\Leftrightarrow$ $f(a)=1$, $f'(a)=3$

기울기는 직각삼각형에서의 $\dfrac{\text{세로}}{\text{가로}}$ 비율!

→ 도형적 접근



$\therefore$ $a=-1$



$f(x)=(x+1)^2(x-\alpha)+3x+4$

$f(0)=-\alpha+4=0$, $\therefore$ $\alpha=4$

$\therefore$ $f(1)=2^2(-3)+3+4=-5$

Analysis

■ 미분계수의 실전 활용

연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-A}{x-a}=k$$

① $f(a)=A$

② $f'(a)=k$

$x \to a$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

($\because$ 극한값이 존재)

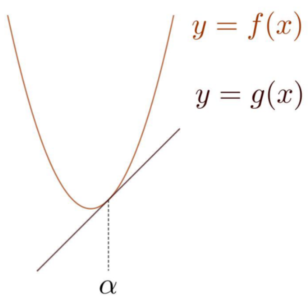
$\therefore$ $f(a)=A$

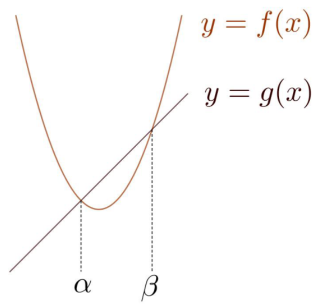
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-A}{x-a}=k$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=k$$

$\therefore$ $f'(a)=k$

■ 접선으로 함수의 식을 구하기





$f(x)-g(x)$
$=(x-\alpha)^2 p(x)$

$f(x)-g(x)$
$=(x-\alpha)(x-\beta)p(x)$

$f(x)$
$=(x-\alpha)^2 p(x)+g(x)$

$f(x)$
$=(x-\alpha)(x-\beta)p(x)+g(x)$

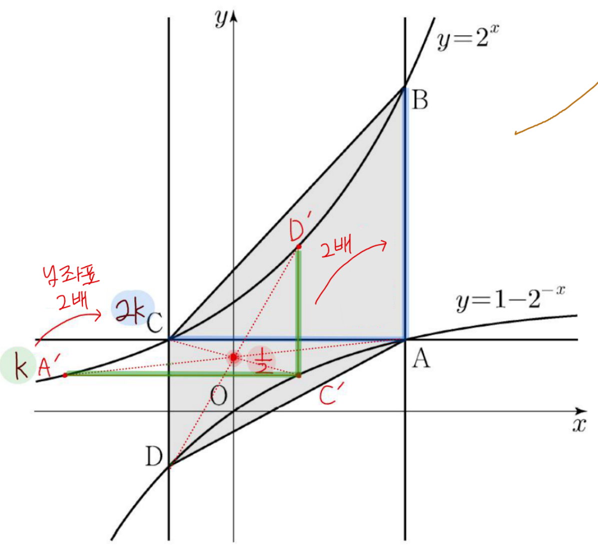
제 2 교시

수학 영역

12. [2024년 6월 (공통) 12번]

그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자.

$\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}log_2 3-\frac{9}{4}$

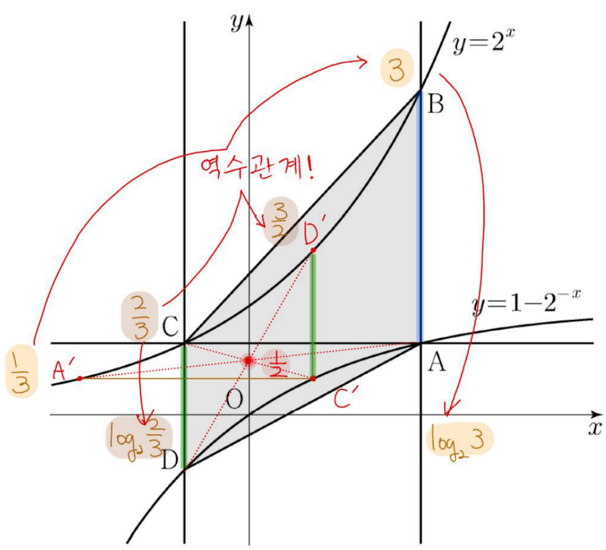
이렇게 생각하는 게 잘 안된다면
위의 계산이 성립할 수밖에 없는 원리를
다음 페이지에서부터 자세하게 분석했으니까
정독하여 이해하길 바라.
그러고 나서 다시 처음 풀이로 돌아와 체화를 해야 해.
그것만으로도 이 한 문제를 통해
엄청난 실력을 쌓을 수 있을 거야.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

실전 풀이 ver.

$y=1-2^{-x}$와 $y=2^x$는 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭!

[1줄] $\frac{2k+k}{2}=\frac{1}{2}$ ⇔ $k=\frac{1}{3},\ 2k=\frac{2}{3}$



∴ 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{C'D'})\overline{AC}$

$(\log_2 2-\log_2 3)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(3-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right\}\left(\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

[2줄]

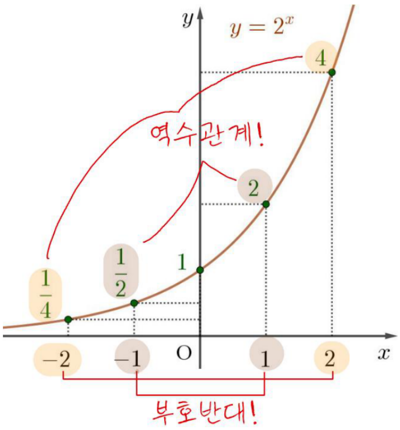
제 2 교시

수학 영역

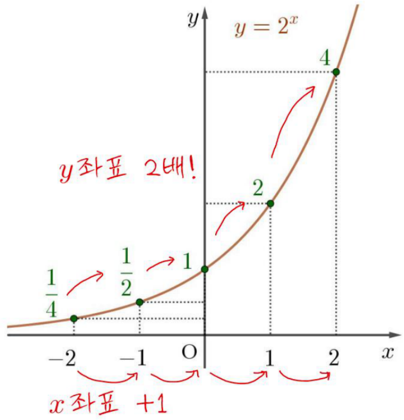
Analysis

지수함수 그래프에 대한 심도 깊은 이해

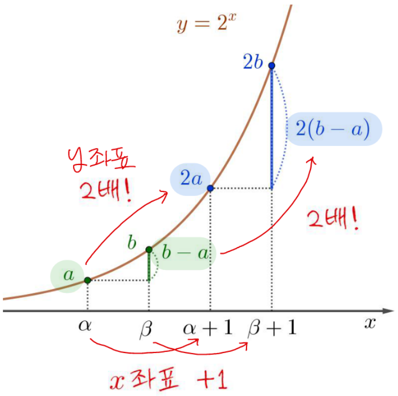
① $y=2^x$의 그래프 위의 점은 x좌표의 부호가 반대이면 y좌표는 역수관계이다.



② $y=2^x$의 그래프 위의 점은 x좌표가 +1될 때마다 y좌표가 2배가 된다.



③ $y=2^x$ 그래프 위의 두 점의 x좌표가 +1될 때마다, y값의 차이도 2배씩 커진다.

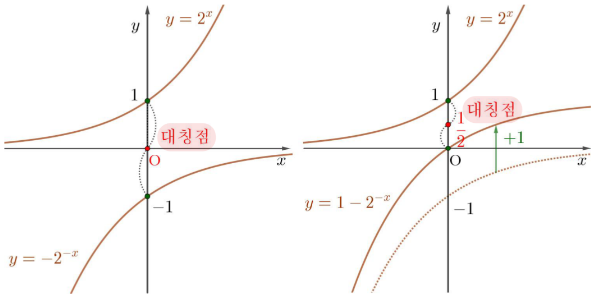


수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

자세한 설명 ver.

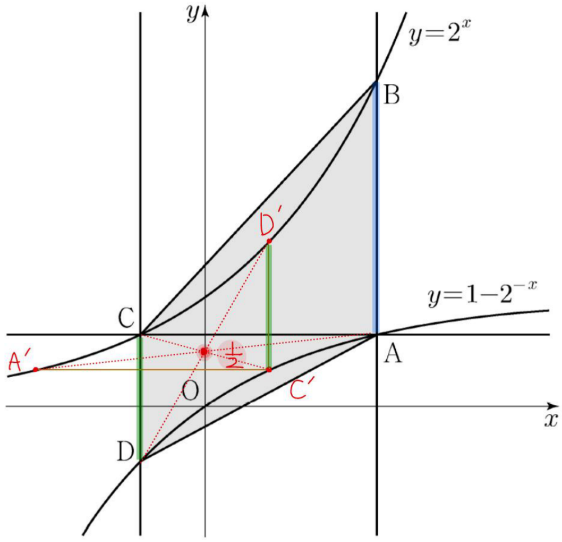
좌표평면에서 사각형의 넓이 구하기
→ 선분의 길이가 필요하다.
→ 꼭짓점의 좌표를 파악해야 한다.

(Step1) 그래프의 대칭성 파악하기



$y=1-2^{-x}$와 $y=2^x$는 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭!

[참고] $y=f(x)$의 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭은
$y=2b-f(2a-x)$



점 A, C, D의 대칭된 점을 A′, C′, D′라고 하자.

$\overline{CD}=\overline{C'D'}$

답으로 구해야 하는

ABCD의 넓이$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\overline{AC}$에서

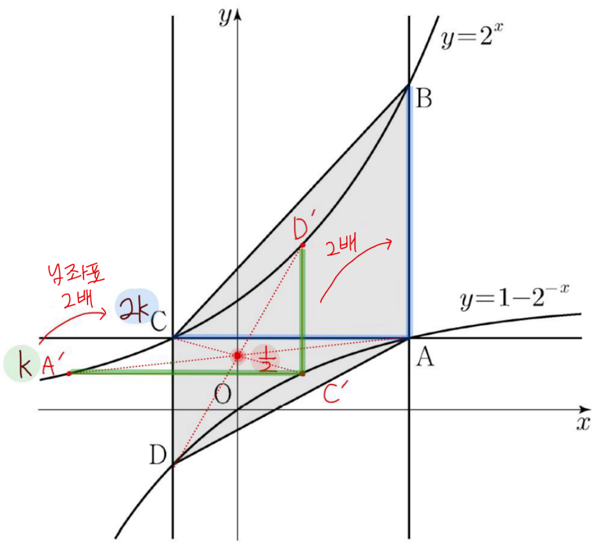
$\overline{CD}$를 $\overline{C'D'}$로 대신 구하기로 하자!

그렇게 하면 오직 $y=2^x$ 그래프만 활용해도 돼서 극단적으로 계산이 간결해지기 때문이다!

제 2 교시

수학 영역

(step2) 길이 2배 활용하여 점 C의 좌표 구하기



문제에서 제시된 조건 $\overline{AB}=2\overline{CD}$ ⇔ $\overline{AB}=2\overline{C'D'}$

점 A'의 y좌표는 k라고 하자.

→ 점 C의 y좌표는 2k (∵ y좌표 2배!)

→ 점 C'의 y좌표는 k (∵ y좌표 동일)

점 C와 C'은 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{2k+k}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow k=\frac{1}{3},\ 2k=\frac{2}{3}$

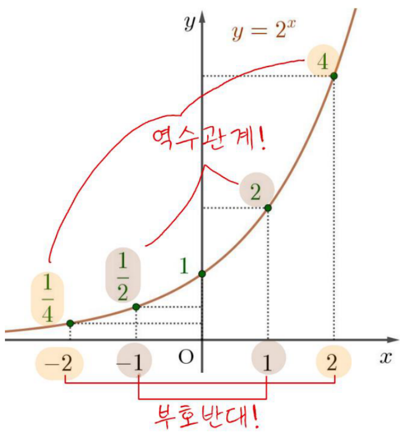
$2^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\log_2\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{C}\left(\log_2\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

Analysis

지수함수 그래프에 대한 심도 깊은 이해

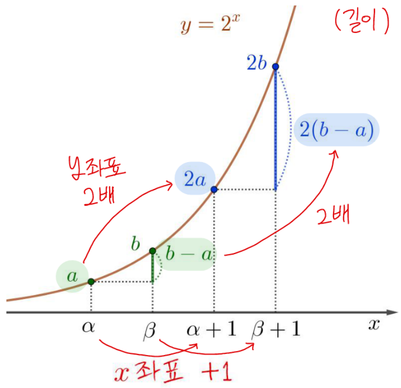
① $y=2^x$의 그래프 위의 점은 x좌표의 부호가 반대이면 y좌표는 역수관계이다.



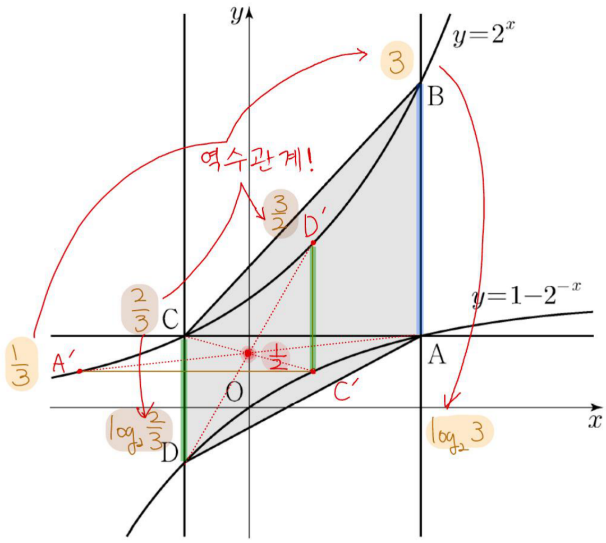
Analysis

지수함수 그래프에 대한 심도 깊은 이해

③ $y=2^x$ 그래프 위의 두 점의 x좌표가 +1될 때마다, y값의 차이도 2배씩 커진다. (길이)



(step3) 지수함수 그래프 특징 활용하여 좌표 구하기



점 A'과 B는 x좌표 부호 반대

⇔ y좌표가 역수관계

→ 점 B의 y좌표는 3 → $\mathrm{B}(\log_2 3,\ 3)$

$(\because\ 2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3)$

점 C과 D'은 x좌표 부호 반대

⇔ y좌표가 역수관계

→ 점 D'의 y좌표는 $\frac{3}{2}$

∴ 사다리꼴 ABCD의 넓이는

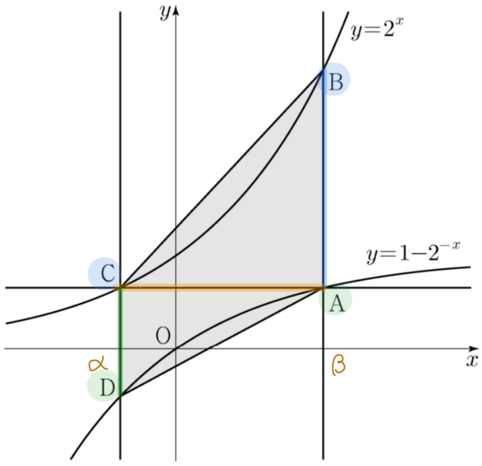
$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{C'D'})\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(3-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right\}\left(\log_2 3-\underbrace{\log_2\frac{2}{3}}_{(\log_2 2-\log_2 3)}\right)=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

제 2 교시

수학 영역

[다른 풀이 1]



점 C, D의 x좌표를 α라고 하고
점 A, B의 x좌표를 β라고 하자.
점 A와 C의 y좌표가 동일하므로
$2^{\alpha}=1-2^{-\beta}$

$\overline{AB}$를 점 B와 점 A의 y좌표 차로 구하지 말고
점 B와 점 C의 y좌표 차로 구하자.
점 B, C는 모두 $y=2^x$ 한 그래프 위에 있기 때문이다!

$\overline{AB}=2^{\beta}-2^{\alpha}$

$\overline{CD}=(\cancel{1}-2^{-\beta})-(\cancel{1}-2^{-\alpha})=\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\beta}}=\frac{2^{\beta}-2^{\alpha}}{2^{\alpha}2^{\beta}}$

$\overline{AB}=2\overline{CD}$

$\Leftrightarrow\ \cancel{2^{\beta}-2^{\alpha}}=2\times\frac{\cancel{2^{\beta}-2^{\alpha}}}{2^{\alpha}2^{\beta}}$

$\Leftrightarrow\ 2^{\alpha}2^{\beta}=2$

$\Leftrightarrow\ 2^{-\beta}=\frac{1}{2}2^{\alpha}$

$2^{\alpha}=1-2^{-\beta}$ ($\because$ 점 A와 C의 y좌표가 동일)

$\Leftrightarrow\ 2^{\alpha}=1-\frac{1}{2}2^{\alpha}$

$\Leftrightarrow\ 2^{\alpha}=\frac{2}{3},\ 2^{\beta}=3$

$\Leftrightarrow\ \alpha=\log_2\frac{2}{3},\ \beta=\log_2 3$

$\therefore$ 사다리꼴 ABCD의 넓이는

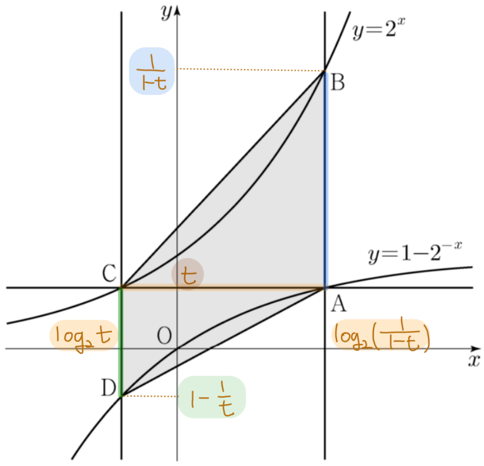
$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\left\{(2^{\beta}-2^{\alpha})+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{2^{\beta}}\right)\right\}(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(3-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right\}\left(\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

[다른 풀이 2]



점 A와 C의 y좌표가 동일하므로 한 문자 t로 설정하자.

ⅰ) 점 C, D 좌표 구하기

$2^x=t\ \Leftrightarrow\ x=\log_2 t$

$\therefore$ C$(\log_2 t,\ t)$

$1-2^{-\log_2 t}=1-2^{\log_2\frac{1}{t}}=1-\frac{1}{t}$

$\therefore$ D$\left(\log_2 t,\ 1-\frac{1}{t}\right)$

ⅱ) 점 A, B 좌표 구하기

$1-2^{-x}=t$

$\Leftrightarrow\ 2^{-x}=1-t\ \Leftrightarrow\ 2^x=\frac{1}{1-t}\ \Leftrightarrow\ x=\log_2\frac{1}{1-t}$

$\therefore$ A$\left(\log_2\frac{1}{1-t},\ t\right)$

$2^{\log_2\frac{1}{1-t}}=\frac{1}{1-t}$

$\therefore$ B$\left(\log_2\frac{1}{1-t},\ \frac{1}{1-t}\right)$

$\overline{AB}=2\overline{CD}$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{1-t}-t=2\left\{t-\left(1-\frac{1}{t}\right)\right\}$

$\Leftrightarrow\ t(1-t)\times\left(\frac{1}{1-t}-t\right)=t(1-t)\times 2\left\{t-\left(1-\frac{1}{t}\right)\right\}$

$\Leftrightarrow\ t-t^2+t^3=2t^2-2t+2-2t^3+2t^2-2t$

$\Leftrightarrow\ 3t^3-5t^2+5t-2=0$

$\Leftrightarrow\ (3t-2)(t^2-t+1)=0$

$\therefore\ t=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=\frac{1}{1-t}-t=\frac{7}{3},\ \overline{CD}=t-\left(1-\frac{1}{t}\right)=\frac{7}{6}$

$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+\frac{7}{6}\right)\left(\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

제 2 교시

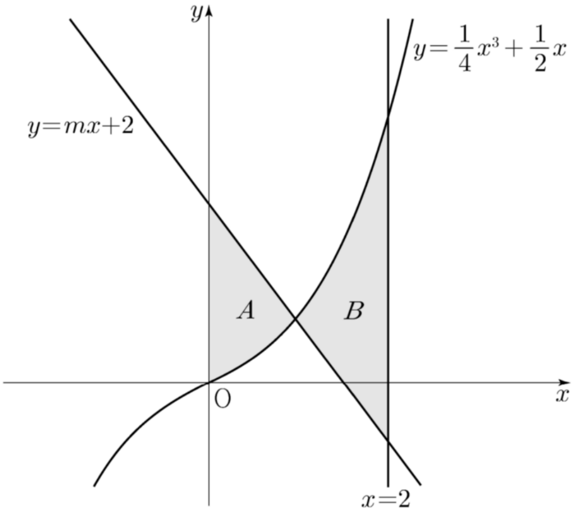
수학 영역

13. [2024년 6월 (공통) 13번]

곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\int_0^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx = B-A$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx=\frac{2}{3}$$

$$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2$$

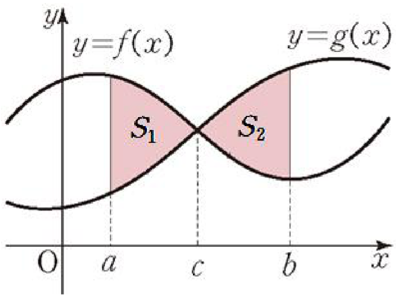
$$=1+1-2m-4=-2m-2=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ m=-\frac{4}{3}$$

Analysis

■ 두 함수의 차의 적분

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 대하여
닫힌 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고,
닫힌 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\le g(x)$이다.



$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=S_1-S_2$$

제 2 교시

수학 영역

14. [2024년 6월 (공통) 14번]

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(step1) 진수조건 활용하기

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$

→ $\sqrt{-n^2+10n+75}>0,\ 75-kn>0$

⇔ $n^2-10n-75<0,\ kn<75$

⇔ $(n+5)(n-15)<0,\ n<\dfrac{75}{k}$

∴ $-5<n<15,\ n<\dfrac{75}{k}$

(step2) 제시된 식이 양수 활용하기

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$

두 밑 중 큰 수 4로 밑을 통일하기!

$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$

⇔ $-n^2+10n+75>75-kn,$

⇔ $n\{n-(10+k)\}<0$

∴ $0<n<10+k$

(step3) 자연수 n의 개수는 12 조건 활용하기

$0<n<10+k$이고 $n<\dfrac{75}{k}$인 자연수 n의 개수가 12 이상이기 위해서는

$12<10+k,\ 12<\dfrac{75}{k}$

⇔ $k>2,\ k<\dfrac{75}{12}=6.XX$

⇔ $k=3,\ 4,\ 5,\ 6$

대입해서 계산해보면

k=3, 6일 때 n의 개수는 12가 된다.

∴ k의 값의 합은

6+3=9

제 2 교시

수학 영역

15. [2024년 6월 (공통) 15번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 k $(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.

(나) 모든 실수 x에 대하여

$\int_{0}^{x} g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$이고

$\int_{3}^{x} g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \geq 0$

이다.

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

(Step1) 조건 (가) 활용하기

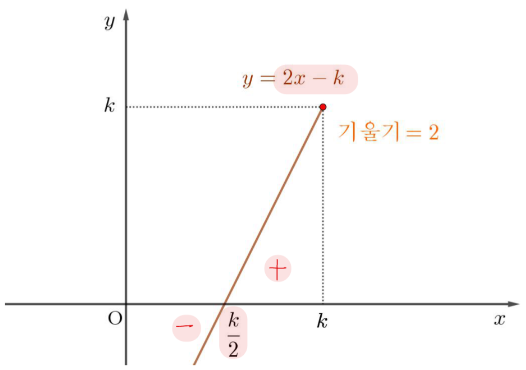
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$\therefore$ $x \geq k$에서 $f'(x) \geq 0$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\therefore$ $f(k)=k$, $f'(k)=2$

$x \leq k$에서의 $g(x)=2x-k$의 그래프는



$x \leq \frac{k}{2}$에서 $g(x) \leq 0$

$x \geq \frac{k}{2}$에서 $g(x) \geq 0$

(Step2) 조건 (나) 활용하기

$\int_{0}^{x} g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$

$\int_{3}^{x} g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \geq 0$

위의 조건을 관찰해보면 두 적분식의 값이 얼마인지가 나오지 않고 부호에 대한 정보만 나와 있다!

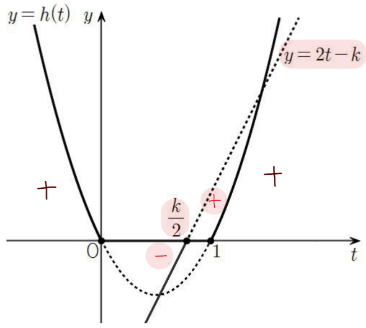
위의 조건식을 적분해가며 계산하려 하면 안 된다.

이 문제에서 구해야 하는 답은 $g(k+1)$이므로 $g(x)$의 부호를 파악하기 위한 단서라는 것을 판단할 수 있어야 한다.

i) $\int_{0}^{x} g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$

$h(t)=|t(t-1)|+t(t-1)$라고 하면

$$h(t)=\begin{cases} 2t(t-1) & (t<0 \text{ 또는 } t>1) \\ 0 & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$



$\int_{0}^{x} g(t)h(t)dt \geq 0$ ⇔ $-\int_{x}^{0} g(t)h(t)dt \geq 0$

⇔ $\int_{x}^{0} g(t)h(t)dt \leq 0$

$\therefore$ $t \geq 1$에서 $g(t) \geq 0$ ⇔ $\frac{k}{2} \leq 1$

$t \leq 0$에서 $g(t) \leq 0$ ⇔ $\frac{k}{2} \geq 0$

$\therefore$ $0 \leq k \leq 2$

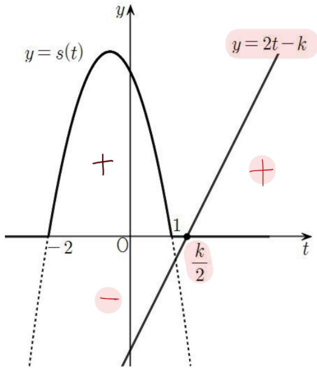
제 2 교시

수학 영역

ii) $\int_{3}^{x} g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \ge 0$

$s(t)=|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)$ 라고 하면

$s(t)=\begin{cases} 0 & (t<-2 \text{ 또는 } t>1) \\ -2(t+2)(t-1) & (-2 \le t \le 1) \end{cases}$



$\int_{3}^{x} g(t)s(t)dt \ge 0$ ⇔ $-\int_{x}^{3} g(t)s(t)dt \ge 0$

⇔ $\int_{x}^{3} g(t)s(t)dt \le 0$

$\therefore\ -2 \le t \le 1$ 에서 $g(t) \le 0$ ⇔ $\frac{k}{2} \ge 1$

$\therefore\ k \ge 2$

$\therefore\ k=2$ ($\because$ i 에서 $0 \le k \le 2$)

(Step3) $g(k+1)$의 최솟값 구하기

$g(k+1)=g(3)=f(3)$가 최소이기 위해서는

$k \le x \le k+1$에서 $g'(x)$의 값이 작을수록 좋다.

⇔ $2 \le x \le 3$에서 $f'(x)$의 값이 작을수록 좋다.

기울기가 작을수록 그래프의 y값이 덜 증가하기 때문이다!

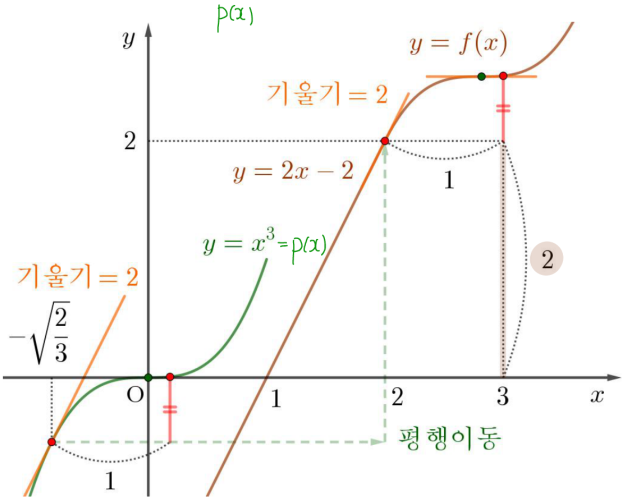
$f(3)$이 최소가 되는 함수 $f(x)$는

$x \ge 2$에서 단조증가하면서 $f'(x)=0$인 x가 존재하는 함수이다. 또한 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\therefore\ y=f(x)$는 $y=x^3$가 평행이동된 함수이다!

$\shortparallel$

$p(x)$



$y=g(x)$ 그래프 위의 점 (2, 2)가 평행이동된 점을 찾아보자.

$g'(2)=2$이므로 $p'(x)=2$인 x를 구하면 된다.

$p'(x)=3x^2=2$

$\therefore\ x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($\because\ x<0$)

$$\therefore\ g(3)=p\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-p\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2$$

$$=\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3+2$$

$$=\left(1-3\sqrt{\frac{2}{3}}+3\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+2$$

$$=5-\sqrt{6}$$

제 2 교시

수학 영역

16. [2024년 6월 (공통) 16번]

방정식

$$\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

7

진수 조건에 의하여 $x>3$

$\log_2(x+1)-5=-\log_2(x-3)$

⇔ $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=5$

⇔ $\log_2(x+1)(x-3)=\log_2 2^5$

⇔ $(x+1)(x-3)=32$

⇔ $x^2-2x-35=0$

⇔ $(x-7)(x+5)=0$

$\therefore$ $x=7$ ($\because$ $x>3$)

17. [2024년 6월 (공통) 17번]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

23

$f(x)=\int(6x^2+2)dx=2x^3+2x+C$

$f(0)=C=3$

$\therefore$ $f(2)=2\times2^3+2\times2+3=23$

18. [2024년 6월 (공통) 18번]

$\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

2

$\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=a\times\frac{9\times10\times19}{6}-10\times\frac{9\times10}{2}$

$=285a-450=120$

$\therefore$ $a=2$

제 2 교시

수학 영역

19. [2024년 6월 (공통) 19번]

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} -t^2+t+2 & (0 \leq t \leq 3) \\ k(t-3)-4 & (t>3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

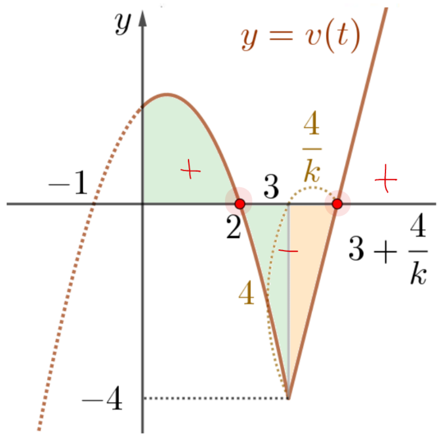
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

16

운동 방향 = 속도의 부호
→ "운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각"
= "속도의 부호가 두 번째로 바뀌는 시각"

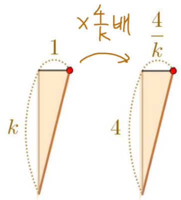
$-t^2+t+2=0$
$\Leftrightarrow$ $-(t-2)(t+1)=0$
$\therefore$ $t=2$ or -1

$y=-t^2+t+2$와 $y=k(t-3)-4$의 그래프 모두 점 (3, 4)를 지난다.



기울기는 직각삼각형에서의 $\frac{\text{세로}}{\text{가로}}$ 비율!

→ 도형적 접근
직선 $y=k(t-3)-4$의 기울기가 k이므로
삼각형 가로 길이는 $\frac{4}{k}$



$\therefore$ v(t)의 부호가 두 번째로 바뀌는 시각은 $t=\frac{4}{k}+3$

$t=3+\frac{k}{4}$에서의 점 P의 위치가 1이므로

$$\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt=1$$

$$=\int_0^3(-t^2+t+2)dt-\frac{1}{2}\times\frac{4}{k}\times 4 \quad (\because \text{ 삼각형 넓이})$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1$$

$\therefore$ $k=16$

[다른 풀이]

방정식 $k(t-3)-4=0$에서 $t=\frac{4}{k}+3$

$t=3+\frac{k}{4}$에서의 점 P의 위치가 1이므로

$$\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt=1$$

$$=\int_0^3(-t^2+t+2)dt+\int_3^{\frac{4}{k}+3}(kt-3k-4)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3+\left[\frac{k}{2}t^2-3kt-4t\right]_3^{\frac{4}{k}+3}$$

$$=\left(-9+\frac{9}{2}+6\right)+\left\{\frac{k}{2}\left(\frac{4}{k}+3\right)^2-3k\left(\frac{4}{k}+3\right)-4\left(\frac{4}{k}+3\right)-\left(\frac{9k}{2}-9k-12\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1$$

$\therefore$ $k=16$

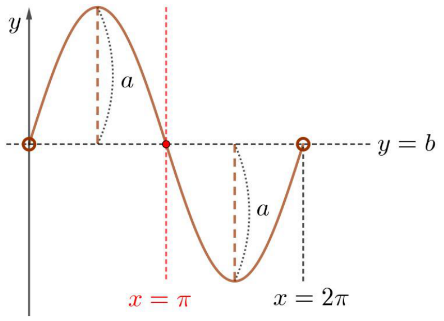
제 2 교시

수학 영역

20. [2024년 6월 (공통) 20번]
5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

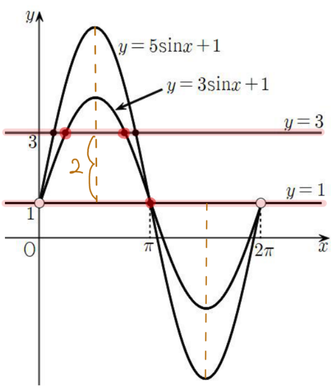
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

24



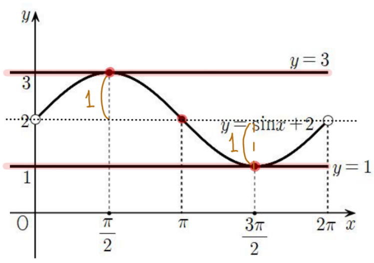
$y=a\sin x+b$와 $x=\pi$는 a, b의 값이 얼마이든
반드시 한 점 $(\pi,\ b)$에서만 만나므로
$y=1$ 또는 $y=3$과 2개의 점에서 추가로 더 만나야 한다.

i) b=1인 경우



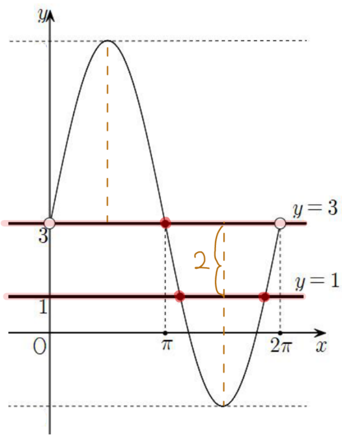
∴ a=3, 4, 5

ii) b=2인 경우



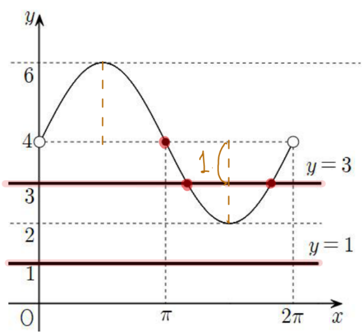
∴ a=1

iii) b=3인 경우



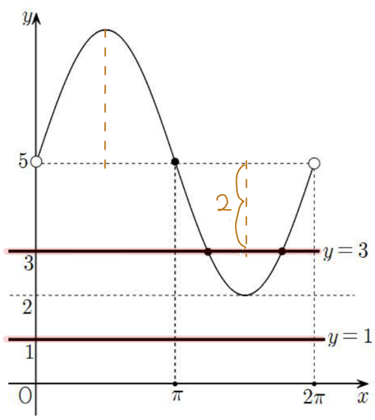
∴ a=3, 4, 5

iv) b=4인 경우



∴ a=2

v) b=5일 때



∴ a=3

∴ m=a+b=1+2=3 (∵ ii)
∴ M=a+b=3+5=8 (∵ iii, v)

∴ $M\times m=8\times3=24$

제 2 교시

수학 영역

21. [2024년 6월 (공통) 21번] (발문 수정)
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a) \leq 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
(나) 집합 $\{x \mid f(x)=k,\ x는\ 실수\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

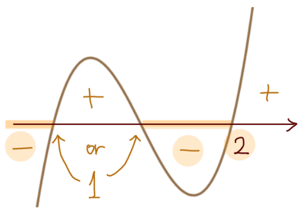
15

(Step1) 조건 (나) 활용하기

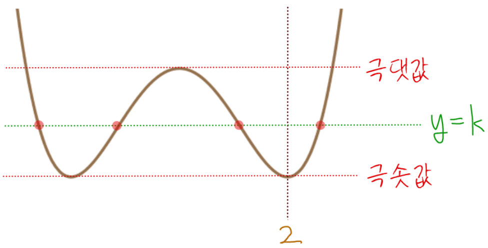
집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3이상이 되도록 하는 실수 k의 값이 존재하므로
사차함수 $f(x)$의 그래프는 W 모양이다.
→ $f'(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

(Step2) 조건 (가) 활용하기

$f'(a) \leq 0$인 실수 a의 최댓값이 2 이므로
$y=f'(x)$의 그래프는

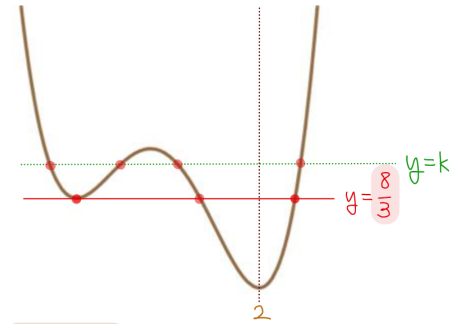


i) 두 극솟값이 같은 경우



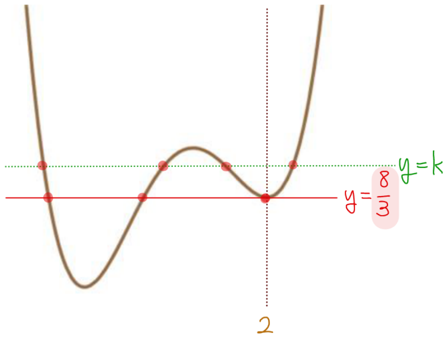
집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3이상이 되도록 하는 실수 k의 범위는
극솟값<k≤극댓값
k의 최솟값이 존재하지 않는다. (모순)

ii) 두 극솟값이 다른 경우



$f(0)=0$이 성립할 수 없다. (모순)

iii) 두 극솟값이 다른 경우



함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=2$에서 $y=\frac{8}{3}$에 접하므로

$$f(x)-\frac{8}{3}=(x-2)^2(x^2+ax+b)$$

$$f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)+\frac{8}{3}$$

$$f(0)=4b+\frac{8}{3}=0$$

$$\therefore\ b=-\frac{2}{3}$$

$$f'(x)=2(x-2)\left(x^2+ax-\frac{2}{3}\right)+(x-2)^2(2x+a)$$

$$f'(1)=-2\left(\frac{1}{3}+a\right)+2+a=0$$

$$\therefore\ a=\frac{4}{3}$$

$$f(x)=(x-2)^2\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)+\frac{8}{3}$$

$$f(3)=15$$

Analysis

열린구간, 닫힌구간에서의 최대 최소 존재성
ex) $t \geq 3$ → t의 최솟값=3
ex) $t > 3$ → t의 최솟값 없다!

제 2 교시

수학 영역

22. [2024년 6월 (공통) 22번]

수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

231

$a_{15} = 1$를 단서로 a_1을 구해야 하므로

점화식의 역주행 → 역주행 최적화 식 만들기

$$\begin{cases} a_{n+1} + \sqrt{n}\, a_{\sqrt{n}} = a_n \\ a_{n+1} - 1 = a_n \end{cases}$$

$\therefore$ $a_{10} + 3a_3 = a_9$ $(a_9 > 0)$ or $a_{10} - 1 = a_9$ $(a_9 \leq 0)$

$\therefore$ $a_5 + 2a_2 = a_4$ $(a_4 > 0)$ or $a_5 - 1 = a_4$ $(a_4 \leq 0)$

$\sqrt{n}$이 자연수인 경우는

$n = 2^2,\ 3^2$일 때만 확인하면 된다.

(a_{15}를 단서로 a_1을 구해야 하므로 a_{16} 등은 필요 없음)

a_{15}: 1

a_{14}: 0

a_{10}: -4

a_9: $-4+3a_3$, -5

a_5: $-8+3a_3$, -9

a_4: $-8+3a_3+2a_2$, $-9+3a_3$, $-9+2a_2$, -10

a_3: $-9+3a_3+2a_2$, $-10+3a_3$

$= a_3 = \dfrac{11}{4}$, $= a_3 = 5$

a_2: $-10+3a_3+2a_2$, 4, $-11+2a_2$, -12

$= a_2 = \dfrac{7}{4}$, $= a_2 = 11$

a_1: ⅰ) $-\dfrac{7}{4}$, ⅱ) -4, ⅲ) -11, ⅳ) 12

ⅰ) $a_1 = -\dfrac{7}{4}$인 경우

$a_5 + 2a_2 = a_4$ $(a_4 > 0)$

$\Leftrightarrow$ $-8 + 3a_3 + 2a_2 = -8 + 3 \cdot \dfrac{11}{4} + 2 \cdot \dfrac{7}{4} = \dfrac{15}{4} > 0$

$a_{10} + 3a_3 = a_9$ $(a_9 > 0)$

$\Leftrightarrow$ $-4 + 3a_3 = -4 + 3 \cdot \dfrac{11}{4} = \dfrac{1}{4} > 0$

$\therefore$ $a_1 = -\dfrac{7}{4}$ 성립

ⅱ) $a_1 = -4$인 경우

$a_5 - 1 = a_4$ $(a_4 \leq 0)$

$\Leftrightarrow$ $-9 + 3a_3 = -9 + 3 \cdot 5 = 6 > 0$

$\therefore$ 모순

ⅲ) $a_1 = -11$인 경우

$a_5 + 2a_2 = a_4$ $(a_4 > 0)$

$\Leftrightarrow$ $-9 + 2a_2 = -9 + 2 \cdot 11 = 13 > 0$

$\therefore$ $a_1 = -11$ 성립

ⅳ) $a_1 = 12$인 경우

$a_4 = -10 \leq 0$, $a_9 = -5 \leq 0$

$\therefore$ $a_1 = 12$ 성립

$\therefore$ 모든 a_1의 값의 곱은

$12 \times (-11) \times \left(-\dfrac{7}{4}\right) = 231$

[다른 풀이] (점주행으로 풀기)

$\therefore\ a_5 = a_4 - 2a_2\ (a_4 > 0)$ or $a_5 = a_4 + 1\ (a_4 \le 0)$

$\therefore\ a_{10} = a_9 - 3a_3\ (a_9 > 0)$ or $a_{10} = a_9 + 1\ (a_9 \le 0)$

$a_1 = a$라고 하자

$a_1 \to a$

$a_2 \to -a$

$a_3 \to -a+1$

$a_4 \to -a+2$

a_5 : $(a \le 2)$ $(-a+2)-2(-a) = a+2$, $(a > 2)$ $-a+3$

a_9 : $a+6$, $-a+7$

a_{10} : $(a \ge -6)$ $(a+6)-3(-a+1) = 4a+3$, $(a < -6)$ $a+7$, $(a \le 7)$ $(-a+7)-3(-a+1) = 2a+4$, $(a > 7)$ $-a+8$

a_{15} : ⅰ) $4a+8$, ⅱ) $a+12$, ⅲ) $2a+9$, ⅳ) $-a+13$

ⅰ) $a_{15} = 4a+8 = 1$인 경우

$a_1 = a = -\dfrac{7}{4}$ $(-6 \le a \le 2$ 성립$)$

ⅱ) $a_{15} = a+12 = 1$인 경우

$a_1 = a = -11$ $(a < -6$ 성립$)$

ⅲ) $a_{15} = 2a+9 = 1$인 경우

$a_1 = a = -4$ $(2 < a \le 7$ 모순$)$

ⅳ) $a_{15} = -a+13 = 1$인 경우

$a_1 = a = 12$ $(a > 7$ 성립$)$

$\therefore$ 모든 a_1의 값의 곱은

$12 \times (-11) \times \left(-\dfrac{7}{4}\right) = 231$