미분가능성 정복하기 2편 : '절댓값 함수'

들어가며,

고난도 미분가능성 문항은 의심점이 존재하는 함수들을 제시하고, 이 함수들의 연산(곱, 합성 등)을 통해 의심점을 미분가능한 점으로 소실시키는 문제의 형태로 자주 등장합니다. 미분가능성 칼럼 2편과 3편에서 의심점을 만드는 함수들인 절댓값 함수, 무리함수/역함수를 다룬 후, 4편과 5편에서 의심점을 소실시키는 연산에 대한 주제로 미분가능성 칼럼을 구성했습니다.

이번 칼럼에서는 고난도 문항에서 의심점이 존재하는 함수로 가장 자주 등장하고, 단독으로도 준킬러, 킬러 문항으로도 빈번하게 쓰이는 함수인 절댓값 함수의 미분가능성을 다뤄보려 합니다.

I. $|f(x)|$의 의심점은 $f(x)=0$인 점이다.

$f(a)=0$을 만족하는 a값들 찾기(의심점)

$x=a$ 에서 미분계수 $f'(a)$ 조사

$f'(a)=0$이면 $x=a$에서 $|f(x)|$가 미분가능

$f'(a)\neq 0$이면 $x=a$에서 $|f(x)|$가 미분 불가능

※ $x=a$에서 $f(x)$가 미분가능하지 않다면, $|f(x)|$도 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

1편에서 미분가능성 문제풀이의 기본은 의심점을 찾고, 그 의심점에서 미분가능성을 조사하는 것이라고 했다. $|f(x)|$는 $f(x)=0$인 점을 기준으로 함수가 바뀔 가능성이 있으므로, $f(x)=0$인 점이 의심점이 되고, 그 부분에서 미분가능하려면 $f'(x)=0$을 만족하는지 확인하면 된다.

II. 기본 개념 확인하기

Example 1 $x=a$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, $f(a)=0$이고 $f'(a)=0$일 때,함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능함을 '미분가능성의 정의'를 이용해 증명하시오.

Example 1 해설

$|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하려면, $x=a$에서 $|f(x)|$의 미분계수가 존재해야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}$ 의 존재성을 보이면 된다.($f(a)=0$ 이므로)

$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}-\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'(a)|$, $\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=|f'(a)|$

따라서 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위해서는 $f'(a)=0$을 만족해야 한다.

TEAM 수리남's TIP

$|f(x)|$의 의심점은 $f(x)=0$이 되는 점이고, 이 부분에서 미분계수가 0이면 미분가능하다라는 사실은 다들 알고 있는 당연한 사실일 것이고, 기하학적인 의미로도 쉽게 해석할 수 있을겁니다. **하지만, 1편에서도 강조했듯이 우리가 알고 있는 범주를 넘어선 고난도 문제가 나왔을 때, 미분가능성의 정의를 활용하여 검증할 수 있는 능력을 기르는 것은 매우 중요합니다.**
다들 꼭 한 번 연습해보고 넘어가는 것을 추천드립니다.

II. $f(x)=\begin{cases} g(x) & (g(x)\geq h(x)) \\ h(x) & (h(x)\geq g(x)) \end{cases}$의 미분가능성 문항, 아직도 그래프 두 개 비교하면서 풀고 있나요?

다음 두 유형의 문제를 보자.

유형 1 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값을 구하시오.

[2013학년도 6월 평가원]

유형 2 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축 까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값을 구하시오.

[2013학년도 수능]

위와 같은 두 유형을 마주했을 때, 두 그래프를 동시에 그려서 기하학적인 관점을 통해 문제를 해결할 수도 있지만, **절댓값 미분가능성 문항**으로 바꿔서 풀 수도 있다. 두 가지 관점 모두 연습해보고 상황에 따라 더 편한 방법을 선택해서 사용해보자.

그럼 어떻게 절댓값 미분가능성 문항으로 바꿔서 풀까?

TEAM 수리남's 핵심노트

최대/최소 함수의 미분가능성

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (g(x)\geq h(x)) \\ h(x) & (h(x)\geq g(x)) \end{cases}$$

위 함수는 $g(x)$와 $h(x)$ 중 크거나 같은 함수가 $f(x)$가 된다는 것을 의미하므로 이를 $\max(g(x), h(x))$ 즉, 최댓값 함수라고 합니다.
부등호의 방향이 반대가 되면, 최솟값 함수가 되겠죠? 이 함수의 미분가능성을 아래와 같은 명제를 이용해 더 쉽게 해결할 수 있습니다.

'$f(x)=\begin{cases} g(x) & (g(x)\geq h(x)) \\ h(x) & (h(x)\geq g(x)) \end{cases}$ 의 미분가능성은 $|g(x)-h(x)|$ 의 미분가능성 문항과 동치이다.'

따라서, 위 핵심노트의 명제를 이용하면, 유형 1은 $|f(x)-mx|$의 미분가능성 문항, 유형 2는 $|f(t)-t|$의 미분가능성 문항으로 변형해서 풀 수 있다.

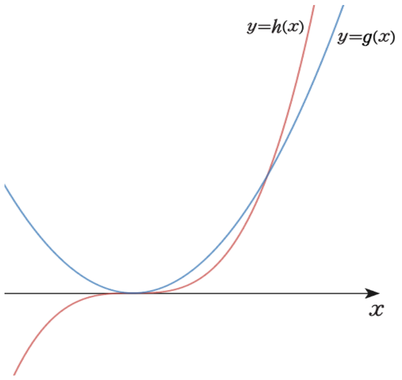
그렇다면, 핵심노트의 명제는 왜 성립할까? 다음 두 증명을 잘 읽어보자.

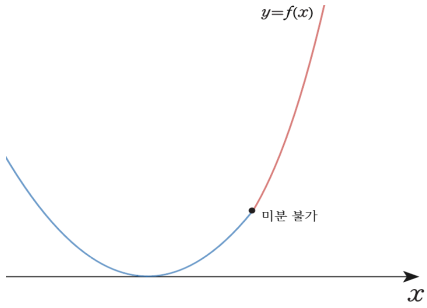
1) 수식적인 관점

$f(x)=\begin{cases} g(x) & (g(x)\geq h(x)) \\ h(x) & (h(x)\geq g(x)) \end{cases}$에 대하여

함수 $f(x)=\dfrac{h(x)+g(x)+|g(x)-h(x)|}{2}$와 같이 쓸 수 있다. (절댓값 함수를 풀어서 써보면 위와 같은 식이 된다는 것을 알 수 있죠?) $h(x)$와 $g(x)$가 미분가능한 함수일 때 $f(x)$의 미분가능성의 영향을 주는 항은 $|g(x)-h(x)|$이므로 $f(x)$와 $|g(x)-h(x)|$의 미분가능성은 동치라는 것을 알 수 있다.

2) 그래프





만약, $h(x)$와 $g(x)$가 왼쪽 그래프와 같이 생겼다고 생각해보자. $f(x)$ 그래프는 둘 중 더 큰 그래프를 선택해서 오른쪽과 같이 그리면 된다. 이때 미분가능의 의심점은 함수가 달라지는, $g(x)$와 $h(x)$의 교점에서 생기게 되는 것을 알 수 있다. 또한, $g(x)$와 $h(x)$의 교점에서 두 함수의 미분계수가 같다면, 함수가 달라지더라도 부드럽게 이어지게 되어, 미분가능하게 됨을 알 수 있다. 따라서 $f(x)$의 미분가능성은 $|g(x)-h(x)|$의 미분가능성과 동치라는 것을 그래프로도 쉽게 알 수 있다.

III. 실전 문제 적용하기

Example 2 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \ge mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값을 구하시오.

[2013학년도 6월 평가원]

Example 2 해설

위에서 설명한대로, **이 문항은 $|f(x)-mx|$의 미분가능성 형태로 변형**해서 풀 수 있다.
함수 $|f(x)-mx|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$f(x)-mx=0$를 만족하는 x값 a에 대하여 $f(x)-mx$의 $x=a$에서의 미분계수, 즉 $f'(a)-m=0$을 만족해야 한다.

Step1. $f(x)-mx=0$을 만족하는 x값을 찾아야 한다.

이를 $y=f(x)$그래프와 $y=mx$ 그래프를 그려 교점(곡선과 일차함수의 교점)을 찾기보다는, 양변을 x로 나눠 $\frac{f(x)}{x}-m=0$으로 변형하여, $y=\frac{f(x)}{x}$와 $y=m$의 교점(곡선과 상수함수의 교점)으로 찾는 것이 좀 더 편하다. 이때, $x=0$일 때는 양변을 x로 나눌 수 없으므로 $x=0$일 때는 따로 생각해주면 되는데, $x=0$일 때는 $f(x)-mx\neq 0$ 이므로, $|f(x)-mx|$가 무조건 미분가능하다.

Step 2. $f(x)-mx=0$를 만족하는 x값 a에 대하여 $f'(a)-m=0$을 만족해야 한다.

그런데, 우리는 $\frac{f(x)}{x}-m=0$으로 변형하여 풀고 있으므로, $f'(a)-m=0$이 조건을 확인하기가 쉽지 않다. (우리는 $\frac{f(x)}{x}$의 그래프를 그릴 것이므로)
따라서 $|f(x)-mx|$를 약간 변형하여 $|x|\times\left|\frac{f(x)}{x}-m\right|$으로 보면 $x\neq 0$에서 $|x|$는 미분가능하므로, $|f(x)-mx|$의 미분가능성은 $\left|\frac{f(x)}{x}-m\right|$에서 결정된다. (이를 정확하게 검증하기 위해서는 곱함수의 미분가능성을 제대로 알아야 합니다. 곱함수의 미분가능성 칼럼도 준비되어 있으니, 일단 이 정도만 이해하고 넘어갑시다!)
즉 $\frac{f(x)}{x}-m=0$을 만족하는 x값 a에서 미분계수가 0이면 되므로, $\frac{f(x)}{x}$의 미분계수가 $x=a$에서 0이기만 하면 $|f(x)-mx|$는 미분가능하다.

TEAM 수리남's TIP

복잡해 보이지만, 미분가능성 파트를 제대로 이해하고, 방정식 부등식과 미분 파트를 위와 같이 연습한다면, step2는 거의 생략하고 넘어갈 수 있습니다. 풀이시간이 훨씬 짧아지니 꼭 연습해봅시다.

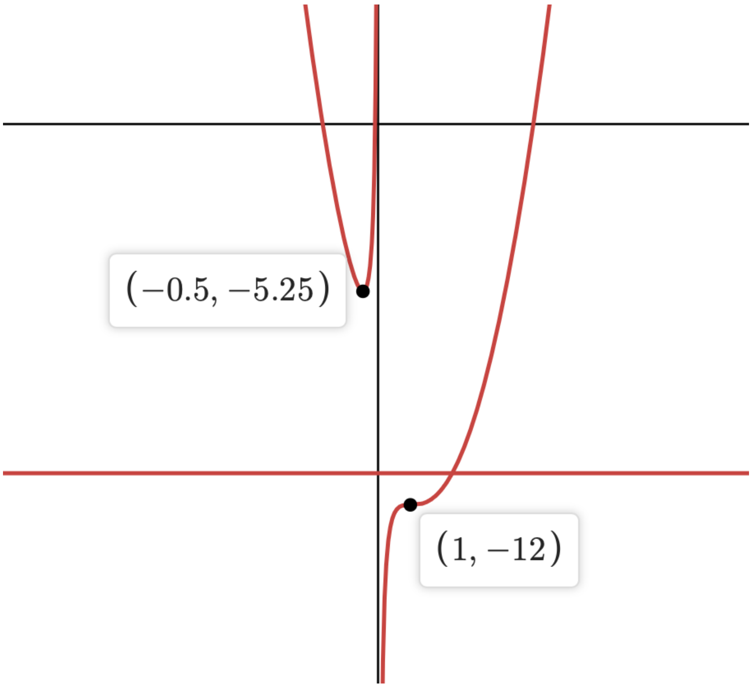
Step 3. $y=\frac{f(x)}{x}=x^2-3x-9-\frac{1}{x}$그래프와 $y=m$ 그래프 그리기

위 곡선을 그리기 위해서 미분을 해서, 증가/감소, 극값을 조사해보면 아래와 같다.

$y'=2x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}$

$x=-\frac{1}{2}$에서 극소, $x>0$에서 증가함수인데, $x=1$에서 미분계수 0

이 사실을 바탕으로 그래프를 그려보면 아래와 같다.



위에서 곡선과 상수함수가 만나는 점이 $\frac{f(x)}{x}-m=0$을 만족하는 점 들이고, 그 점에서 미분계수가 0이여야 미분가능하다 했으므로, 상수함수와 곡선이 만나는 모든 점에서 두 그래프가 접해야한다. 그러기 위해서는 $y=m$이 $(1,\ -12)$를 지나야만 한다.

즉 실수 전체에서 미분가능하도록 하는 상수 m의 값은 -12이다.

TAKE HOME MESSAGE

1편에서 미분가능성 풀이의 기본이 되는 '의심점'에 대해 설명했고, 2편에서는 의심점을 갖는 함수인 절댓값 함수에 대해 다뤄봤습니다.

미분가능성 파트는 양이 워낙 방대하기에 시리즈 형태로 구성했습니다. **다음 칼럼들에는 의심점을 갖는 다른 함수인 무리함수/역함수에 대한 내용과, 의심점을 소실시키는 연산(곱, 합성)이 나왔을 때는 어떻게 문제를 해결해야 하는지 차례대로 다뤄보겠습니다.**

다양한 심화개념과 심화문제도 다룰 예정이니 많은 관심 부탁드립니다.

지금까지 **TEAM 수리남**이었습니다.
이 글을 읽는 수험생 여러분 모두에게 행운을 빕니다.