2025학년도 연세대학교 모의 논술 답안지(자연 계열)

고교명		성명	어수강

※ **단답형 문항**에 대한 답안만 작성하세요. 반드시 각 문항 번호를 확인하고 답안을 작성하세요.

문제	답안
문제1	$\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$
문제2	$\frac{65}{132}$
문제 3-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
문제 3-2	$\frac{\pi}{2}-1$
문제 4-1	불가
문제 4-2	가능 & 4번째

※ 답변하고자 하는 **서술형 문항**의 번호를 명확히 기재하고 답안을 작성하세요.

$\boxed{5-1}$

$\boxed{\text{case1}}$ $c>1$

b)에 의하면 $f(\frac{x}{c})=\frac{1}{c}f(x)$이므로 $f(\frac{x}{c^n})=\frac{1}{c^n}f(x)$이다.

그런데 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{c^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)}{c^n}=0$.
($\because$ 미분가능 $\Rightarrow$ 연속)

한편, 0이 아닌 임의의 실수 x에 대하여

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{x}{c^n})-f(0)}{(\frac{x}{c^n})-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{c^n}f(x)}{\frac{x}{c^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

$\Rightarrow$ $f(x)=f'(0)\cdot x \ (x\neq0)$

$x=1$대입

그런데 $f(1)=1885$이므로 $f'(0)=1885$ & $f(x)=1885x \ (x\neq0)$.

$f(0)=0$이므로 $x=0$일때도 성립

$\therefore f(x)=1885x$.

$\boxed{\text{case2}}$ $0<c<1$

b)에 의하면 $f(cx)=cf(x)$이므로 $f(c^nx)=c^nf(x)$이다.

그런데 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{n\to\infty}f(c^n)=\lim_{n\to\infty}c^n\cdot f(1)=0$.
($\because$ 미분가능 $\Rightarrow$ 연속)

한편, 0이 아닌 임의의 실수 x에 대하여

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(c^nx)-f(0)}{c^nx-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^nf(x)}{c^nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

$\Rightarrow$ $f(x)=f'(0)\cdot x \ (x\neq0)$

$x=1$대입

그런데 $f(1)=1885$이므로 $f'(0)=1885$ & $f(x)=1885x \ (x\neq0)$

$f(0)=0$이므로 $x=0$일때도 성립

$\therefore f(x)=1885x$.

답

$\boxed{\therefore f'(0)=1885\text{이고 } f(x)=1885x}$

– 작성 금지 –

5-2

$$a_k = \int_{c^k}^{1} f(x)dx \overset{b)}{=} \int_{c^k}^{1} \frac{f(cx)}{c^2}dx \overset{t=cx}{=} \frac{1}{c^3}\int_{c^{k+1}}^{c} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{c^3}\left(\int_{c^{k+1}}^{1} f(x)dx - \int_{c}^{1} f(x)dx\right)$$

$$\overset{a)}{=} \frac{1}{c^3}(a_{k+1}-1)$$

$\Rightarrow a_{k+1} = c^3 a_k + 1$

$\Rightarrow a_{k+1} - \frac{1}{1-c^3} = c^3\left(a_k - \frac{1}{1-c^3}\right)$

수열 $\left\{a_k - \frac{1}{1-c^3}\right\}$은 공비 c^3인 등비수열이므로

$$\lim_{k\to\infty}\left(a_k - \frac{1}{1-c^3}\right) = 0$$

이다. $\therefore \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(\left(a_k - \frac{1}{1-c^3}\right) + \frac{1}{1-c^3}\right) = \frac{1}{1-c^3}$

답: $\frac{1}{1-c^3}$

6-1 모든 자연수 n에 대하여

$$f(n+1)+f(n+2) = f(n+3)f(n+4) - 2025$$
$$-\ \ f(n)+f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 2025$$

$\Rightarrow$ 모든 자연수 n에 대하여
$f(n+2)-f(n) = (f(n+4)-f(n+2))f(n+3) \cdots (※)$

그런데 $f(n+3)>0$ 이므로

모든 자연수 n에 대하여
$f(n+2) \ge f(n) \Longleftrightarrow f(n+4) \ge f(n+2) \cdots (*)$

가 성립한다.

• 만약 $f(n+2) < f(n)$인 자연수 n이 존재하면 $(*)$에 의해

$$\underbrace{f(n)}_{\text{자연수}} > f(n+2) > f(n+4) > \cdots > \underbrace{f(n+2f(n))}_{\text{자연수}}$$

가 성립한다.

$\Rightarrow 0 < \underbrace{f(n+2f(n))}_{\text{자연수}} \le f(n) - f(n) \le 0$ 이므로 모순.

$\therefore$ 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \le f(n+2)$이다.

※ A3 용지에 출력하여 사용 바랍니다.

– 작성 금지 –

$\boxed{6\text{-}2}$

[6-1]의 풀이에서,

모든 자연수 n에 대하여
$f(n+2)-f(n)=(f(n+4)-f(n+2))f(n+3) \cdots (★)$

$\left(f(n+3)>0 \text{ 이므로}\right) \Rightarrow$ 모든 자연수 n에 대하여
$f(n+2)=f(n) \Leftrightarrow f(n+4)=f(n+2) \cdots (★★)$

<u>case1</u> : $f(3)=1$

(★★)에 의해 $f(2n+1)=f(1)$ $(n=1,2,\cdots)$ 이므로

$\boxed{f(21)=1}$

<u>case2</u> : $f(3)\geq 2$.

주장: $f(2n)=1$ $(n=1,2,\cdots)$

$f(2m)\geq 2$인 자연수 m이 존재한다고 가정하자

$\Rightarrow$ [6-1]에 의해 $2\leq f(2n)$ $(n=m, m+1, m+2, \cdots)$.

(★)로부터: 모든 자연수 n에 대하여
$f(2n+3)-f(2n+1)=\dfrac{f(2n+1)-f(2n-1)}{f(2n+2)} \cdots (★★★)$

$f(2m+1)-f(2m-1)$은 상수인 자연수이므로 $f(2m+1)-f(2m-1)<2^k$를 만족시키는 자연수 $k(k\geq 2)$가 존재한다.

$f(3)>f(1)$이므로 [6-1]의 (★)로부터 $f(2m+2k+1)-f(2m+2k-1)>0$.

$$\Rightarrow 0<f(2m+2k+1)-f(2m+2k-1)$$
$$=\frac{f(2m+2k-1)-f(2m+2k-3)}{f(2m+2k)}$$
$$\vdots$$
$$=\frac{f(2m+1)-f(2m-1)}{f(2m+2k)\cdot\cdots\cdot f(2m+2)}$$
$$\leq \frac{f(2m+1)-f(2m-1)}{2^k}<1.$$

그런데 $0<f(2m+2k+1)-f(2m+2k-1)<1$인 정수이므로 <u>모순</u>

$\therefore f(2n)=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

$\hookrightarrow$ $f(1)=1$, $f(2n)=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 이므로

$f(2n-1)+1=f(2n+1)-2025$ $(n=1,2,\cdots)$

$\Rightarrow f(2n+1)=f(2n-1)+2026$ $(n=1,2,\cdots)$

수열 $\{f(2n-1)\}$은 초항 $f(1)=1$, 공차 2026인 등차수열

$\Rightarrow \boxed{f(21)=20261}$

$\therefore$ $\boxed{6\text{-}2}$의 답은

$\boxed{f(21)=1 \text{ 또는 } 20261}$