1번 문항 (2020 경북대 모의논술)

함수 $f(x) = |\pi \sin(\pi x)|$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1). 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+k)$ 임을 증명하시오.
(단, k 는 정수이다.)

(2). $\sum_{k=0}^{9} \int_{0}^{2k+1} 2x f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

(3). 음이 아닌 모든 정수 k 에 대하여

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2x f(x) dx = a + bk + ck^2 + dk^3$$

을 만족시키는 실수 a, b, c, d 의 값을 각각 구하시오.

(4). 일반항이 $a_n = \frac{1}{n^4} \int_{0}^{n^2} 2x f(x) dx$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값을 구하시오.

2번 문항 해설(2021 가톨릭대학교 의대 논술기출)

(ㄱ) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = 2\int_0^x \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta + 1$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = \frac{1}{4^n} f\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 S는 다음과 같다.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(ㄹ) [사인함수의 덧셈정리]

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

2) $\alpha = \beta$일 때, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

제시문 (ㄷ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3번 문항 해설(2021 경북대학교 모의논술)

다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

(나) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

가 성립한다.

함수 $f(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 연속이고 다음을 만족시킨다.

$$\int_0^{x-1} f(x-t)(tx)dt=\sin(ax^2)+\cos(bx^2)+\sqrt{2} \quad \left(\text{단, } a+b=-\frac{3}{2}\pi\right)$$

[1] 다음을 증명하시오.

$$\int_0^{x-1} f(x-t)(tx)dt=\int_1^x f(t)(x^2-tx)dt$$

[2] 두 실수 a, b의 값을 각각 구하시오.

[3] $f(2)=\frac{9}{2}\pi^2$일 때, $\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

4번 문항 해설(2021 경북대학교 모의논술)

다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

이다.

(다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

(라) 함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

곡선 $C: y=x\ln x+\frac{x}{2}$ $(x>0)$ 위의 점 (x_n, y_n)에서의 접선과 y축과의 교점을 $(0, a_n)$이라 하자. 또한 곡선 C와 x축 및 두 직선 $x=x_n$, $x=x_{n+1}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=-r^{n-1}$일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, r는 1보다 큰 상수이고, n은 자연수이다.)

[1] $\dfrac{\ln x_{21}}{\ln x_{20}}$의 값을 구하시오.

한편, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1, 공비가 r인 등비수열이므로 $a_n=-r^{n-1}$이고,
$y_n=f(x_n)=x_n\ln x_n+\dfrac{x_n}{2}$이므로 이를 위 식에 대입하여 정리하면 $x_n=r^{n-1}$이므로,

이로부터 $\ln x_n = (n-1)\ln r$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\dfrac{\ln x_{21}}{\ln x_{20}} = \dfrac{20\ln r}{19\ln r} = \dfrac{20}{19}$ 이다.

[2] $\dfrac{1}{r^2-1}\left(\dfrac{A_{20}}{r^{38}\ln r} - \dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

[3] 20 이하의 자연수 m 에 대하여

$$B_m = \sum_{n=m}^{20} \frac{A_n}{\ln r}$$

이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{B_1}{2r^{40}}$ 의 값을 구하시오.

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{20}\left(\frac{B_1 - B_m}{r^{2m-2}}\right)$ 의 값을 구하시오.

5번 문항 (2021 경북대학교 논술기출)

다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

(나) 함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

이다.

(다) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(라) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

[1] $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$의 값을 구하시오.

[2] 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) = g(x+2\pi)$$

를 만족시킬 때, 함수 $h(x) = \displaystyle\int_{x-2\pi}^{x} g(t)\,dt$가 상수함수임을 증명하시오.

[3] 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수 $f'(x)$는 연속함수이다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여
(ㄱ) $f'(x)=f'(x+2\pi)$
(ㄴ) $f(x)=\left(\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt\right)^2-\cos x+\alpha$ (단, α는 상수)

다음 물음에 답하시오.

(1) $\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt$의 값을 구하시오.

(2) $f(0)=1$일 때, 상수 α의 값을 구하시오.

6번 문항 (2021 경북대학교 논술기출)

다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

이다.

(나) 닫힌 구간 $[a,\,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

$x \ge 0$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 미분가능하고, 음이 아닌 모든 실수 a, b에 대하여 다음 조건 (Ⅰ)을 만족시킨다.

(Ⅰ): $m \ge 0$, $n \ge 0$, $m+n>0$인 모든 실수 m, n에 대하여

$$f\left(\frac{mb+na}{m+n}\right) \le \frac{mf(b)+nf(a)}{m+n}$$

다음 물음에 답하시오.

(1) $0 \le a \le x \le b$일 때 $f(x) \le \dfrac{x-a}{b-a}f(b) + \dfrac{b-x}{b-a}f(a)$ 임을 증명하시오. (단, $a<b$)

(2) 양의 상수 L에 대하여 $t \ge L$일 때

$$f(t) \le \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx \le \frac{1}{4}\{f(t-L)+f(t+L)+2f(t)\}$$

임을 증명하시오.

7번 문항 (2021 한양대학교 모의논술)

곡선 $y=x\ln x$ 와 이 곡선 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선, 그리고 직선 $x=t$ (단, $t>1$)로 둘러싸인 도형의 넓이를 $P(t)$ 라 하고, 곡선 $y=\ln x$ 와 이 곡선 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선, 그리고 직선 $x=t$ (단, $t>1$)로 둘러싸인 도형의 넓이를 $Q(t)$ 라 하자.

극한값 $\lim_{t \to \infty} \frac{P(t)}{t\,Q(t)}$ 를 구하시오.

8번 문항 (2020 서강대학교 논술기출)

[1] $\int_0^1 2x^4\sqrt{1-x^4}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}}\,dx$ 임을 보이시오.

[2] $p'(0)=5$ 를 만족하는 다항함수 $p(x)$ 에 대하여 $\int_0^{\pi}\{p(x)+p''(x)\}\cos x\,dx=3$ 이 성립할 때 $p'(\pi)$ 가 가질 수 있는 모든 값을 구하시오.

9번 문항 (2020 중앙대학교 논술기출)

x에 대한 방정식 $4x^3-6(t+1)x^2+7t^2+1=0$이 세 실근 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$를 가진다.
$\int_0^1 tg''(t)dt$를 구하시오. (단, $-\frac{1}{8}<t<\frac{9}{8}$이고 $f(t)<g(t)<h(t)$이다.)

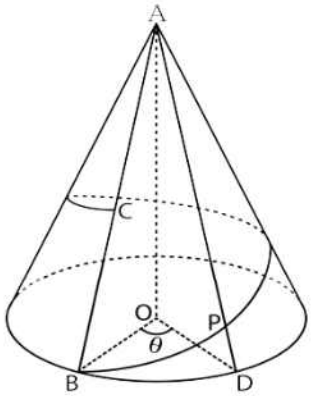
10번 문항 (2020 한양대학교 모의논술)

자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=0}^{n} {}_{n}C_{k}(-1)^{k}\int_{-1}^{2} x^{k}(1-x)^{n-k}dx$ 을 구하시오.

(단, ${}_{n}C_{k}$ 는 n 개에서 k개를 동시에 택하는 서로 다른 조합의 모든 가짓수이다.)

11번 문항 (2019 시립대학교 모의논술)

중심이 점 O, 반지름의 길이가 2 인 원을 밑면으로 하고, 모선의 길이가 8 인 직원뿔이 있다. 이 원뿔의 꼭짓점을 A, 밑면의 경계인 원에 있는 임의의 점을 B, $\overline{AC}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$을 만족하는 선분 AB 의 점을 C라 하자. 점 P 는 점 B 에서 점 C 까지 원뿔을 한 바퀴 감는 최단거리 곡선에서 움직이고 있다. 직선 AP 가 밑면과 만나는 점을 D 라 하고, $\angle BOD=\theta$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(a) 곡선 BP 의 길이를 θ에 관한 식으로 나타내어라.

(b) 곡선 BP 의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, 도함수 $\frac{df}{d\theta}$가 최소가 되는 θ의 값을 구하여라.

12번 문항 (2019 중앙대학교 논술기출)

다음을 계산하시오.

$$\int_0^2 \frac{e^{3x-1}+e^{-x+3}}{e^{x-1}+e^{-x+1}}dx$$

13번 문항 (2019 한양대학교 논술기출)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

예를 들어, $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$이고 $\sin 2x=2\sin x\cos x$이다.

<나>

$$f(x)=\frac{x^2}{x+\sqrt{a^2-x^2}} \quad (0\le x\le a) \quad (\text{단, } a>0)$$

[1] 함수 $f(x)$가 일대일 함수임을 보이시오.

[2] $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx$ 임을 보이시오

[3] 정적분 $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx$의 값을 구하시오.

14번 문항 (2019 경북대학교 모의논술)

임의의 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$를

$$h(t)=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)^{n}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{6}\theta\, d\theta}$$

라 하자. $h(t)=\frac{21}{80}$을 만족시키는 실수 t에 대하여 $\cos t\sin t$의 값을 구하시오.

15번 문항 (2020 부산대학교 논술기출)

(1). 함수 $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)\,(x>2)$ 의 도함수를 구하고, 이를 이용하여 부정적분 $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$ 를 구하시오.

(2). 곡선 $C: 3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y = 25$ 위의 점 $(5,\,5)$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 곡선 C와 접선 l 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

16번 문항 (2018 중앙대학교 논술기출)

다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4\cos^2\left(\frac{\pi k^2}{4n^2}\right)}$$

17번 문항 (2018 중앙대학교 논술기출)

다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)\,dx$$

18번 문항 (2024 한양대학교 모의논술)

미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 실수 a, b에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$이다.

(나) $f(3)=6$이다.

$\int_0^2 \{f(x)\}^9\{f(2-x)\}^{10}f'(x)dx$의 값을 k라 할 때, ${}_{20}\mathrm{C}_{10}\times k$의 값을 구하시오.

19번 문항 (2019학년도 서강대학교 모의논술)

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$가 이 구간에 속한 모든 x에 대하여

$m \leq f(x) \leq M$ (m과 M은 상수)

을 만족할 때, 다음 부등식이 성립한다.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2^n}}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ 임을 보이시오.

20번 문항 (2018학년도 한양대학교 논술기출)

$n \geq 3$인 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\left(1-x^n\right)^{\frac{1}{n}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(x_0, f(x_0))$ $(0 < x_0 < 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 P, y축과 만나는 점을 Q라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1). $y=f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ 위의 점 중에서 원점까지의 거리가 최대인 점을 A라 하자. 점 A의 좌표를 구하시오.

(2). 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

(3). 자연수 n에 대하여 $d_n = \int_0^1 \left(1-x^n\right)^{\frac{1}{n}} dx$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty} d_n$을 구하시오.

21번 문항 (2020학년도 이화여자대학교 논술기출)

닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=e^x \sin x$ 가 있다.
$f(x)$ 가 $x=\theta$ 에서 최댓값 M 을 가질 때, 다음 물음에 답하시오.

(1). θ 와 M 을 구하시오.

(2). $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)=Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)$$

(3). $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

(4). $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=M$ 임을 보이시오. (단, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$)

22번 문항 (2021학년도 서강대학교 논술기출)

(1). 함수 $f(x)$가 구간 $[1.\infty)$에서 연속이고 증가할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$f(1)+\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx$$

(2). p가 자연수일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p$$

(3). (1)의 결과를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

23번 문항 (2021학년도 서강대학교 모의논술)

(1). a가 양의 실수일 때 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오

$$(1+a)^{n+1} \geq \frac{n^2}{2}a^2$$

또한 이를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ 을 보이시오.

(2). $r\neq 1$일때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{n} k r^{k-1} = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

또한 이를 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 를 구하시오.

(3). $0<r<1$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{r^k}{k} = -\ln(1-r) - \int_0^r \frac{t^{n+1}}{1-t}dt$$

(4). (3)의 결과를 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 를 구하시오.

24번 문항 (2018학년도 서강대학교 논술기출)

(1). $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!n^n}}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} \ln a_n$의 값을 구하시오.

(2). $x > 4$ 일 때, $\sqrt{x} > \ln x$ 가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ 임을 보이시오.

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \dfrac{n+1-k}{n} \ln\left(\dfrac{n+k}{n}\right) \right\} = \int_0^1 (1-x)\ln(1+x)dx$ 임을 보이시오.

(4). $a_n = (n+1)^n (n+2)^{n-1} (n+3)^{n-2} \cdots (2n-1)^2 (2n)$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}\right)$ 의 값을 구하시오.

25번 문항 (2022 인하대학교 논술기출)

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(i) $m \le f(x) \le M$이고 $g(x) \ge 0$이면

$$m\int_a^b g(x) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

이고

(ii) $m \le f(x) \le M$이고 $g(x) \le 0$이면

$$M\int_a^b g(x) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le m\int_a^b g(x)dx$$

이다.

(다) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

※ 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx,\ b_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

로 주어진다.

[1] $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하시오.

[2] $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n$의 값을 구하시오.

[3] $\lim_{n\to\infty}\{n(n+1)a_n - f(n)\} = 0$이 되는 다항식 $f(x)$를 구하시오.

26번 문항 (2023 경북대학교 메디컬 논술기출)

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha), b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

(다) 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 각각 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha, \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$$

일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

(라) 닫힌구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

자연수 m에 대하여, 구간 $(0,\infty)$에서 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(Ⅰ) 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하고 도함수 $g'(x)$는 연속이다.

(Ⅱ) 모든 양수 x에 대하여 $g(x)>0$이다.

(3) 함수 $h(x)=f(g(x))g'(x)$는 구간 $[m,\infty)$에서 감소한다.

다음 물음에 답하시오.

[1] $n \ge m$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{i=m+1}^{n+1} h(i) < \int_{g(m)}^{g(m+1)} f(x)dx < \sum_{i=m}^{n} h(i)$$

를 증명하시오.

[2] 정적분

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{x}} dx$$

의 값의 정수부분을 구하시오.

[3] 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{4}{(n+1)\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \frac{k^2+2k-1}{(k+1)^2} \ln \frac{k+1}{k^2+1} \right\}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

27번 문항 (2019 인하대학교 논술기출)

(가) $0 < x < 1$일 때 $0 < \sin x < x$이므로

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} > \sqrt{1-x^2}$$

이다.

(나) (사이값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

$$f(a) < 0 < f(b)$$

이면 $f(c)=0$인 c가 a와 b사이에 존재한다.

(※) 자연수 n에 대하여 함수 $y=\dfrac{1}{x+n}$의 그래프와 함수 $y=\sin x\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 x좌표를 a_n이라고 하자.

[1] 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(x)=\sin x-\dfrac{x}{1+x^2}$가 증가함을 보이시오.

[2] 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} < a_n < \frac{1}{n}$$

이 성립함을 보이시오.

[3] 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{a_n} \sin x\,dx$를 구하시오.

28번 문항 (2019 중앙대학교 논술기출)

다음을 계산하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx$$

29번 문항 (2019 시립대학교 논술기출)

자연수 n 에 대하여 $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ 라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) $0 \le x \le 1$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-x)^k \le \frac{1}{1+x} \le 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x)^k$$

(b) $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값을 구하여라.

30번 문항 (2020 시립대학교 논술기출)

자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 곡선 $y=e^{-x}\sin nx$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를

S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하여라.

31번 문항 (2020 경북대학교 논술기출)

두 함수 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $g(x) = \dfrac{\cos x}{x}$에 대하여 $f(x) = g(x)$를 만족시키는 모든 양의 실수 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[1] $a_{10} - a_2$의 값을 구하시오.

[2] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오.

[3] 자연수 n에 대하여 $A_n = \left| \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \{f(x) - g(x)\} dx \right|$ 라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} A_k$의 값을 구하시오.

32번 문항 (2022 한양대학교 메디컬 논술기출)

자연수 n에 대하여

$$c_n = (n-2022)\int_0^1 x^n\{e^x + x\ln(x+1) + x^2\cos^{2022}\pi x\}\,dx$$

일 때, 극한값 $\lim_{n \to \infty} c_n$을 구하시오.

33번 문항 (2021 가톨릭대학교 논술기출)

(ㄱ) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

(ㄴ) 양의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt=\ln x$$

(ㄷ) 명제 A는 다음과 같다.

모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$이다.

(ㄹ) 자연수 n에 대하여 다음 집합 B의 원소 중 가장 큰 수를 a_n이라고 하자.

$$B=\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha\text{는 방정식 } x^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^2+x-e=0\text{의 실근}\right\}\cup\{\sqrt{e}\}$$

[1] 제시문 (ㄱ), (ㄴ)을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 명제 A의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오.

[2] 제시문 (ㄹ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 극한값 $\lim_{n \to \infty} a_n$을 구하고 그 근거를 논술하시오.

34번 문항 (2022 한양대학교 모의논술)

연속함수 $f(x)$는 다음 식을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_{0}^{1} f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx$$

[1] 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 을 구하시오.

[2] 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$ 와 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$ 을 구하시오.

[3] 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_{0}^{1} x^5\,dx\right]$ 을 구하시오.

35번 문항 (2022 서강대학교 논술기출)

[1] 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족하며, $\int_1^3 f(x)dx=1$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f(t)dt$의 값을 구하시오.

36번 문항 (2022 서강대학교 논술기출)

함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 에 대하여, 다음 문항에 답하시오.

(단, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin x<x<\tan x$ 이 성립한다.)

[1] 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에서 감소함을 보이시오.

[2] 임의의 자연수 k 에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\int_x^{3x}\frac{(f(t))^k}{t}dt$ 의 값을 구하시오.

37번 문항 (2021 부산대학교 모의논술)

(가) 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 한다.

(나) 두 각 α와 β에 대하여

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

(다) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\ \text{(단, } a<x<b\text{)}$$

(라) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖고 a를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능하면

$$f'(a)=0$$

두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=3x^2+ax+b$$

가 있다. 함수 $g(x)=\pi+\cos x$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$h(x)=\int_0^x f(g(t))\,dt$$

가 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최솟값을 갖는다고 하자.

[1] 함수 $h(x)$가 주기함수임을 보이시오.

[2] $f(x)=0$을 만족하는 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하시오.

38번 문항 (2021 서울과학기술대학교 논술기출)

모든 실수 x 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$

(나) $f(1)=\alpha$, (단, α 는 실수)

(다) 모든 실수 x, y 에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+7f(x)f(y)} \quad (\text{단, } 1+7f(x)f(y)\neq 0)$$

[1] $f(-1)$ 을 α 에 대한 식으로 나타내시오.

[2] 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

[3] $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 다음 형태로 나타냈을 때, 상수 A, B, C 의 값을 구하시오.

$$f'(0)\times\left[A\{f(x)\}^2+Bf(x)+C\right]$$

[4] $f'(0)=1$ 일 때, $f(2)$ 와 다음 정적분의 값을 모두 α 에 대한 식으로 나타내시오.

$$\int_{0}^{2}(1+7\alpha^2)\{f(x)\}^2dx$$

39번 문항 (2021 연세대학교 논술기출)

실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하시오.

(가) $g(2020)=1$
(나) 임의의 실수 a, b에 대하여 $g(a+b)+g(a-b)=2g(a)\cos b\pi$이다.

[1] $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$의 값을 구하시오.

[2] $g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{10}$일 때, $\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

40번 문항 (2021 인하대학교 논술기출)

(가) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \ (a < x < b)$$

가 성립한다. 그러므로 $a < c < b$일 때,

$$\lim_{x \to c}\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt = f(c)$$

가 성립한다.

(나) 0을 포함하는 열린구간 (a, b)에서 두 번 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여

(ⅰ) 열린구간 $(0, b)$에서 $g''(x) < 0$이고 $g(0) = g'(0) = 0$이면 열린구간 $(0, b)$에서 $g(x) < 0$이다.

(ⅱ) 열린구간 $(a, 0)$에서 $g''(x) < 0$이고 $g(0) = g'(0) = 0$이면 열린구간 $(a, 0)$에서 $g(x) < 0$이다.

(*) 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt \le \frac{xf(x)}{2}$$

를 만족한다.

(1) 함수 $g(x) = \dfrac{xf(x)}{2} - \displaystyle\int_0^x f(t)dt$의 이계도함수 $g''(x)$를 $f(x)$를 이용하여 표현하시오.

(2) $f(0)$의 값을 구하시오.

(3) 함수 $f(x)$가 $f(x) = (x^2 + px + q)e^x$으로 주어질 때, 상수 p, q의 값을 구하시오.

41번 문항 (2020 부산대학교 메디컬 모의논술)

.

(가) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때,

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(다) 함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ (단, $a<x<b$)

구간 $[0,\ \infty)$에서 정의된 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)\geq 0,\ f(x)\leq C+\int_0^x f(s)g(s)\,ds \quad (\text{단, } C\text{는 상수})$$

를 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

[1] $u(t)=C+\displaystyle\int_0^t f(s)g(s)\,ds$일 때, $u'(t)\leq u(t)g(t)$가 성립함을 보이시오.

[2] $f(x)\leq Ce^{\int_0^x g(s)\,ds}$가 성립함을 보이시오.

42번 문항 (2020 서강대 논술기출)

[가] 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

[나] 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능하면 다음이 성립한다.

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (\text{단, } f'(f^{-1}(x))\neq 0)$$

[다] 일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

③ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

구간 $[0,\infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ (m-1)x+2-m & (1\le x<2) \\ x^3-6x^2+12x+m-8 & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

[1] 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하기 위한 실수 m의 범위를 구하시오.

[2, 3, 4] 문제 [1]의 결과를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

[2] 함수 $f^{-1}(x)$의 $x=9m$에서의 미분계수 $(f^{-1})'(9m)$을 m에 대한 식으로 나타내시오.

[3] 정적분 $\int_0^{9m}f^{-1}(x)dx$를 m에 대한 식으로 나타내시오.

[4] 함수 $g(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}$로 정의한다.

$1<c<m$인 실수 c에 대하여 함수 $h(x)=(x-\alpha)g(x)$가 닫힌 구간 $[0,c]$에서 연속이 되도록 실수 α의 값을 구하시오.

43번 문항 (2019 경북대 논술기출)

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$가 다음 조건을 만족한다. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

모든 실수 x에 대하여 $3f'(x)=(x+3)f''(x)$ 이다.

[1] $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

[2] 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3}=f'(\alpha)$를 만족시키는 실수 α의 값을 구하시오.

[3] 함수 $f(x)$가

$$\int_{-4}^{-2}\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f(-3)$의 값을 구하시오.

44번 문항 (2019 경희대 논술기출)

[가]

(1) 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y - y_1 = m(x - x_1)$이다.

(2) 중심이 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$이다.

[나]

x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $\lim_{x \to a+} f(x) = L$과 같이 나타내고, L을 $x = a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라고 한다. 또, x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $\lim_{x \to a-} f(x) = M$과 같이 나타내고, M을 $x = a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라고 한다.

[다]

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[라]

미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$를 미분하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 또는 $\{f(g(x)\}' = f'(g(x))g'(x)$이다.

[마]

함수 $y = x^n$(n은 실수)의 부정적분

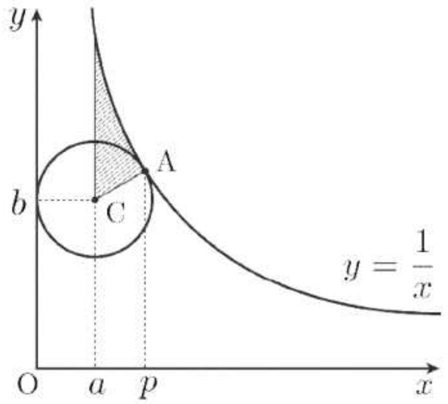
(1) $n \neq -1$일 때, $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

(2) $n = -1$일 때, $\int x^n\, dx = \ln|x| + C$

(단, C는 상수)

제시문 [가]~[마]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

$0 < p \leq 1$일 때, 점 $\mathrm{A}\left(\mathrm{p}, \dfrac{1}{\mathrm{p}}\right)$은 곡선 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ 위의 점이다. 이때, 점 A에서 $y = \dfrac{1}{x}$과 접하는 원 중에서 y축에도 접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$라 하자. $0 < a < p$일 때, 다음 물음에 답하시오.



[1]

$p = 1$일 때, 직선 $x = 1$에 의하여 나누어지는 원의 두 부분 중에서 작은 부분의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

[2]

a와 b를 p에 관한 함수 $a = f(p)$와 $b = g(p)$로 나타내고, 그 근거를 논술하시오.

[3]

함수 $h(p)=f(p)g(p)$라 할 때,

(1) $h(p)$가 $0<p<1$에서 증가하는지 감소하는지를 조사하고, 그 근거를 논술하시오.

(2) $p=0$에서의 $h(p)$의 우극한이 존재하면 그 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. 만일, 우극한이 존재하지 않는다면, 그 근거를 논술하시오.

[4]

직선 $x=a$, 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 선분 AC로 둘러싸인 도형의 넓이를 p에 관한 함수 $S(p)$라 하자. $p=0$에서의 $S(p)$의 우극한을 구하고, 그 근거를 논술하시오.

45번 문항 (2019 인하대 모의논술)

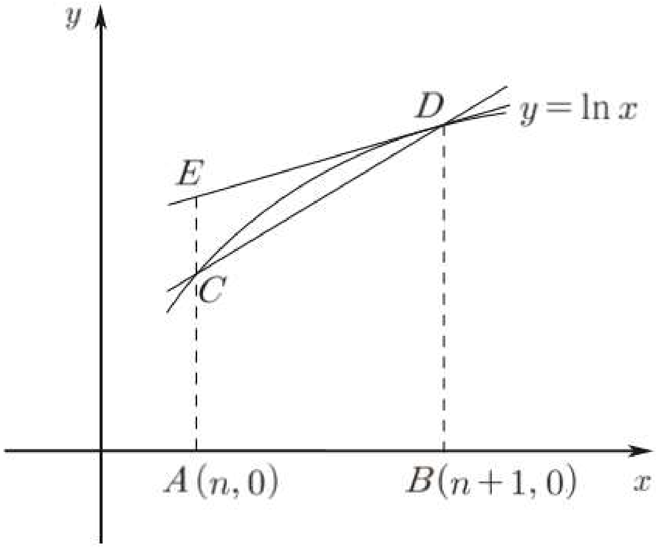
(가) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 합은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{n}{n+1}$$

(나) 로그함수의 부정적분은 다음과 같이 주어진다.

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$$

(※) 다음 그림과 같이 $y=\ln x$ 의 그래프와 두 수직선 $x=n$, $x=n+1$ 의 교점을 각각 C, D 라고 하자. 또한 $y=\ln x$ 의 $x=n+1$ 에서의 접선과 수직선 $x=n$ 의 교점을 E 라고 하자. 사다리꼴 ABDC 의 넓이를 a_n, 사다리꼴 ABDE 의 넓이를 c_n 이라 하고, $y=\ln x$ 의 그래프와 x 축, 그리고 두 수직선 $x=n$, $x=n+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 b_n 이라 하자.



[1] $0 \le x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2(1-x)} \ge 0$$

[2] 양의 정수 n에 대하여 $c_n - a_n$를 구하시오.

[3] 양의 정수 k에 대하여 $a_k < b_k < c_k$ 이므로, $b_k - a_k < c_k - a_k$임은 자명하다.

모든 양의 정수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \frac{1}{4}$$

[4] 앞에서 얻은 부등식 $\sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{1}{4} < \sum_{k=1}^{n-1} a_k < \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n \geq 2)$ 을 이용하여, $n \geq 2$인 양의 정수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$e^{\frac{3}{4}} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} < n! < e \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

46번 문항 (2021 시립대 논술기출)

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_1^2 \frac{3x^4+4x^3\ln x-4x^3-8x^2\ln x+3x^2+8x\ln x+4x+4}{x^2-2x+2}\,dx$$

47번 문항 (2021 시립대 논술기출)

다음을 모두 만족시키는 다항식 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f(0)=0$
(2) 상수 $0<a<1$에 대하여 $\displaystyle\int_{1-a}^{1+a} \frac{\cos a-\cos 1 \cos x}{\sin^2 x}\,dx=2\sin f(a)$이다.

48번 문항 (2021 중앙대 논술기출)

- 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$이면, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$, 직선 $x=a$, 직선 $x=b$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸다.
- 각 θ_1과 θ_2에 대하여 $\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$가 성립한다.
- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

원점을 지나는 두 직선 l_1과 l_2는 $y=x$에 대하여 대칭이고 제1사분면에서 각 θ를 이루고 있다. 제1사분면에서 직선 l_1과 l_2와 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$을 경계로 하는 영역의 넓이를 $f(\theta)$라고 할 때, $f'(\theta)=2$를 만족하는 θ를 구하시오.

49번 문항 (2020 서울과기대 논술기출)

(가) 정적분과 부등식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$f(x) \geq g(x) \text{ 이면 } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(나) 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(1) 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이다.

(2) 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하다.

(3) 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f'(x)$의 최댓값은 M이고, 최솟값은 m이다.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx$

[1] 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx$$

[2] 다음 등식에서 $\boxed{A}$ 와 $\boxed{B}$ 에 들어갈 식을 각각 구하시오.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{f\left(\boxed{A}\right)-f\left(\boxed{B}\right)\right\}\sin x dx$$

[3] 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left(1-\frac{\pi}{4}\right)m \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx \leq \left(1-\frac{\pi}{4}\right)M$$

50번 문항 (2019 중앙대 논술기출)

[1] x축 위를 움직이는 점 S가 $x=0$에서 출발한다. t초 후의 속도 $f(t)$가 다음과 같이 주어질 때, π초가 경과한 시점에서 점 S의 위치를 구하시오.

$$f(t)=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}\sin((k+2)t)$$

51번 문항 (2022 한양대 논술기출)

실수 전체의 범위에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 양수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a}(a-|x|)f'(x)\,dx=0$을 만족시킨다. 이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$가 성립함을 보이시오.

52번 문항 (2023 시립대 논술기출)

모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\} \le \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

53번 문항 (2023 중앙대 논술기출)

- 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서 접하는 접선의 방정식은 $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ 이다.
- 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

[1] $x \geq 1$ 에서 정의된, 좌표평면 위의 곡선 $y=\sin(\ln x)$ 가 있다. 좌표평면의 원점에서 곡선 $y=\sin(\ln x)$ 에 그은 가능한 모든 접선의 접점들을 $(a_n, \sin(\ln a_n))$ 으로 나타내자. 이때, x 좌표가 가장 작은 접점의 x 좌표가 a_1 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이 성립한다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(\ln a_n)(\ln a_{n+1})}$ 의 값을 구하시오.

[2] 함수 $y=2e^{3x}-3\alpha e^{2x}+8$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나게 하는 실수 α 의 값을 α_0 이라 하고, 이때 x 축과의 교점을 $(x_0, 0)$ 이라 하자. 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^{x_0} \left(2e^{3x}-3\alpha_0 e^{2x}+8\right)dx$$

54번 문항 (2022 서강대 논술기출)

함수 $f:\left[0,\dfrac{1}{e}\right]\to[0,1]$ 가 닫힌구간 $\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$ 에서 연속이고 열린구간 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 에서 미분가능하며 $f(x)=x\,e^{f(x)}$ 를 만족할 때,

함수 f 의 역함수가 존재함을 보이고 $\int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

1번 문항 해설

정답 : (1) 해설참조 (2) 2660 (3) $a=2$, $b=8$, $c=12$, $d=8$ (4) 2

(1) 함수 $f(x)$의 주기가 1이므로,

$f(x+k)=|\pi\sin(\pi(x+k))|=|\pi\sin(\pi x+\pi k)|=|\pi\sin(\pi x+\pi(k-1))|=\cdots$

$=|\pi\sin(\pi x+\pi)|=|\pi\sin(\pi x)|=f(x)$이다.

[별해]

함수 $f(x+k)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동 시켜서 얻어진다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 1이므로 두 함수의 그래프가 같음을 알 수 있다.

따라서 $f(x+k)=f(x)$이다.

$f(x+k)=|\pi\sin(\pi(x+k))|=|\pi\sin(\pi x)\cos(\pi k)+\pi\cos(\pi x)\sin(\pi k)|$

$=|(-1)^k\pi\sin(\pi x)|=|\pi\sin(\pi x)|=f(x)$

(2) $g(k)=\int_0^{2k+1}2xf(x)dx$라 하자. 이때,

$t=(2k+1)-x$라고 두면 치환적분에 의해서 $g(k)=-\int_{2k+1}^{0}2(2k+1-t)f(2k+1-t)dt$

한편, 문제 (1)에 의하여 위의 식에서 $f(2k+1-t)=f(t)$이다. 이를 이용하여 $g(k)$를 정리하면 다음과 같다.

$g(k)=\int_0^{2k+1}2(2k+1)f(t)dt-\int_0^{2k+1}2tf(t)dt=\int_0^{2k+1}2(2k+1)f(t)dt-g(k)$

위의 식을 $g(k)$로 정리하면 다음의 방정식을

얻을 수 있다. $g(k)=\int_0^{2k+1}(2k+1)f(t)dt$ 한편,

$\int_0^1 f(x)dx=2$이고 함수 $f(x)$의 주기가 1이므로 $\int_0^{2k+1}f(t)dt=4k+2$이고

$g(k)=2(2k+1)^2$이다.

따라서 $\sum_{k=0}^{9}g(k)=2660$이다.

(3) 정적분 $\int_{k^2}^{(k+1)^2}2xf(x)dx$에서 $s=x-k^2$이라 하자.

그러면 치환적분에 의해서 그 정적분은 다음과 같다.

$\int_0^{2k+1}2(s+k^2)f(s+k^2)ds$

한편, 문제 [1-1]에 의하여 위의 식에서 $f(s+k^2)=f(s)$ ($\because k^2$은 정수)이다.

이를 이용하여 위의 정적분을 정리하면

다음과 같다.

$\int_0^{2k+1} 2sf(s)ds + \int_0^{2k+1} 2k^2 f(s)ds$ 한편, $\int_0^1 f(x)dx = 2$이고 $f(x)$는 주기가 1이므로,

$\int_0^{2k+1} f(s)ds = 4k+2$임을 알 수 있고,

또한 문제 [1-2]에서 얻은 결과를 이용하면 $\int_0^{2k+1} 2sf(s)ds = 2(2k+1)^2$임을 알 수 있다.

구하고자 하는 정적분의 값은 $2(2k+1)^2 + 2k^2(4k+2) = 2 + 8k + 12k^2 + 8k^3$이다.
따라서 $a=2,\ b=8,\ c=12,\ d=8$이다.

(4) 정적분의 성질에 의해 $\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$가 됨을

알 수 있다. 한편, 문제 [1-3]에서 얻은 결과를 이용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(8k^3 + 12k^2 + 8k + 2\right)$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{n^2} 2xf(x)dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(8k^3 + 12k^2 + 8k + 2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k^3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 12k^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 2$$

$$= \int_0^1 8x^3 dx + \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)n(2n-1)}{n^4} + \lim_{n\to\infty} \frac{4(n-1)n}{n^4} + \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)}{n^4}$$

$= 2$이다.

2번 문항 해설

치환적분법에 의해서 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=2\int_0^x \tan\theta(\tan\theta)'d\theta+1=\left[\tan^2\theta\right]_0^x+1=\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

따라서 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n=\frac{1}{4^n\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

사인함수의 덧셈정리에 의해서

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}&=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)\times\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}\\&=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}+\frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}+a_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right)}&=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}+\frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}\\&=\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)}+a_2\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4^{n-2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-2+2}}\right)}&=\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}+\frac{1}{4^{n-1}\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}\\&=\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}+a_{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1+2}}\right)}&=\frac{1}{4^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}+\frac{1}{4^{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\\&=\frac{1}{4^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}+a_n\end{aligned}$$

이를 모두 더하면

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

한편, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=\frac{16}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right\}^2=\frac{16}{\pi^2}$$

따라서 제시문 (ㄷ)의 S값은 다음과 같다.

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}=2-\frac{16}{\pi^2}$$

3번 문항 해설

[1]

좌변에서 $x-t=u$로 놓으면

$$\int_0^{x-1} f(x-t)(tx)dt = \int_x^1 [-f(u)\{(x-u)x\}]du = \int_1^x f(u)(x^2-ux)du = \int_1^x f(t)(x^2-xt)dt$$

이다.

[2]

[1]에서 얻은 결과를 바탕으로 다음의 등식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^x f(t)(x^2-tx)dt = \sin(ax^2)+\cos(bx^2)+\sqrt{2}$$

위 식에 $x=1$을 대입하면

$0=\sin a+\cos b+\sqrt{2}$ --- (*)

한편, $\int_1^x f(t)(x^2-tx)dt = x^2\int_1^x f(t)dt - x\int_1^x tf(t)dt$이고, 이를 x에 대하여 미분하면

$$2x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = (2ax)\cos(ax^2)-(2bx)\sin(bx^2) \quad \text{---} \quad (**)$$

이다. 등식 (**)의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2a\cos a-2b\sin b$ --- (***)

이때, $a+b=-\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos b=\cos\left(-\frac{3\pi}{2}-a\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$이고, 비슷한 방법으로 $\sin b=\cos a$이다.

등식 (*)에서 $\sin a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이고, 등식 (***)에서 $2(a-b)\cos a=0$이다.

이 때, $\cos a\neq 0$이므로 $a=b$이다. 따라서 $a=b=-\frac{3}{4}\pi$이다.

[3]

등식 (**)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2\int_1^x f(t)dt + xf(x) = \left(-\frac{3}{2}\pi-\frac{9}{4}\pi^2x^2\right)\cos\left(-\frac{3}{4}\pi x^2\right)-\left(-\frac{3}{2}\pi+\frac{9}{4}\pi^2x^2\right)\sin\left(-\frac{3}{4}\pi x^2\right)$$

이다. 위 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2\int_1^2 f(t)dt+2f(2)=\frac{3}{2}\pi+9\pi^2$이고 $f(2)=\frac{9}{2}\pi^2$이다.

따라서 $\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}\pi$이다.

4번 문항 해설

[1]

$f(x)=x\ln x+\dfrac{x}{2}$ 라 두면, $f'(x)=\ln x+\dfrac{3}{2}$ 이므로 곡선 C위의 점 (x_n, y_n)에서의 접선의 방정식은 $y-y_n=\left(\ln x_n+\dfrac{3}{2}\right)(x-x_n)$이다. 이 접선과 y축과의 교점이 $(0, a_n)$이므로, 다음 등식을 얻는다.

$a_n-y_n=\left(\ln x_n+\dfrac{3}{2}\right)(-x_n)$

한편, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1, 공비가 r인 등비수열이므로 $a_n=-r^{n-1}$이고, $y_n=f(x_n)=x_n\ln x_n+\dfrac{x_n}{2}$이므로 이를 위 식에 대입하여 정리하면 $x_n=r^{n-1}$이므로,

이로부터 $\ln x_n=(n-1)\ln r$임을 알 수 있다. 따라서 $\dfrac{\ln x_{21}}{\ln x_{20}}=\dfrac{20\ln r}{19\ln r}=\dfrac{20}{19}$이다.

[2]

위의 [1] 풀이과정에서 얻은 결과를 바탕으로 A_n을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}}|f(x)|dx=\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left|x\ln x+\frac{x}{2}\right|dx=\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$$

부분적분법을 이용해 계산하면,

$$A_n=\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{r^{n-1}}^{r^n}$$
$$=\frac{1}{2}(r^{2n}\ln r^n-r^{2n-2}\ln r^{n-1})=\frac{1}{2}\{nr^2-(n-1)\}r^{2n-2}\ln r$$

이다. 그러므로 $A_{20}=\dfrac{1}{2}(20r^2-19)r^{38}\ln r$이다.

따라서 $\dfrac{1}{r^2-1}\left(\dfrac{A_{20}}{r^{38}\ln r}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{r^2-1}\left\{\dfrac{1}{2}(20r^2-19)-\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{10(r^2-1)}{r^2-1}=10$이다.

[3]

(1)

제시문 ㈑와 [2-2] 풀이과정에서 얻은 식 $A_n=\displaystyle\int_{r_{n-1}}^{r_n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$을 이용하면,

$$B_1=\sum_{n=1}^{20}\frac{A_n}{\ln r}=\frac{1}{\ln r}\sum_{n=1}^{20}A_n=\frac{1}{\ln r}\sum_{n=1}^{20}\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\ln r}\int_1^{r^{20}}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{\ln r}\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{r^{20}}=10r^{40}$$

이다. 따라서 $\frac{B_1}{2r^{40}}=5$이다.

(2)

제시문 ㈑와 [2] 풀이과정에서 얻은 식 $A_n=\int_{r_{n-1}}^{r_n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$ 을 이용하면,

$$B_m=\sum_{n=m}^{20}\frac{A_n}{\ln r}=\frac{1}{\ln r}\sum_{n=m}^{20}A_n=\frac{1}{\ln r}\sum_{n=m}^{20}\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\ln r}\int_{r^{m-1}}^{r^{20}}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{\ln r}\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{r^{20}}^{r^{m-1}}=10r^{40}-\frac{m-1}{2}r^{2m-2}$$

이다. [3]의 풀이 (1)에서 구한 $B_1=10r^{40}$으로부터 $B_1-B_m=\frac{m-1}{2}r^{2m-2}$임을 알 수 있다. 따라서

$$\sum_{m=1}^{20}\left(\frac{B_1-B_m}{r^{2m-2}}\right)=\sum_{m=1}^{20}\left(\frac{m-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{20}(m-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{20\times 21}{2}-20\right)=95$$

이다.

5번 문항 해설

[1]

$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \Big[-\sin x \cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 x)\, dx$ 이므로

$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$ 이다.

[2]

구간 $[x-2\pi,\ x]$ 에 속하는 상수 c 에 대하여

$$h(x) = \int_{x-2\pi}^{x} g(t)\, dt = \int_c^x g(t)\, dt + \int_{x-2\pi}^{c} g(t)\, dt = \int_c^x g(t)\, dt - \int_c^{x-2\pi} g(t)\, dt$$

이다. 이 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $h'(x) = g(x) - g(x-2\pi) = 0$ 이다.

따라서, 함수 $h(x)$ 는 상수함수이다.

[3]

(1)

정적분 $\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\, dt$ 에서 $x-t=u$ 로 놓으면 $(-1)\dfrac{dt}{du}=1$ 이고, $t=0$ 일 때 $u=x$, $t=2\pi$ 일 때 $u=x-2\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\, dt &= -\int_x^{x-2\pi} f'(u)\cos(x-u)\, du \\ &= \int_{x-2\pi}^{x} f'(u)(\cos x\cos u + \sin x \sin u)\, du \\ &= \int_0^{2\pi} f'(u)(\cos x \cos u + \sin x \sin u)\, du \\ &= \cos x \int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\, du + \sin x \int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\, du\end{aligned}$$

이다.

이때, 정적분 $\int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\, du$, $\int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\, du$ 는 상수이므로 각각

$A = \int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\, du$, $B = \int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\, du$ 라 두자.

그러면 조건 (ㄴ)으로부터 등식 $f(x) = (A\cos x + B\sin x)^2 - \cos x + \alpha$ 을 얻을 수 있고,

이 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(A\cos x + B\sin x)(-A\sin x + B\cos x) + \sin x \\ &= -2AB\sin^2 x + 2(B^2 - A^2)\sin x\cos x + 2AB\cos^2 x + \sin x\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$B=\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\{-2AB\sin^3 t+2(B^2-A^2)\sin^2 t\cos t+2AB\sin t\cos^2 t+\sin^2 t\}\,dt$$

$$=-2AB\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt+2(B^2-A^2)\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$+2AB\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$

치환적분법을 이용하면 $\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt=0$ 이다.

따라서, $B=\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\pi$.

(2)

$$A=\int_0^{2\pi} f'(t)\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\{-2AB\sin^2\cos t+2(B^2-A^2)\sin t\cos^2 t+2AB\cos^3 t+\sin t\cos t\}\,dt$$

$$=-2AB\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt+2(B^2-A^2)\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt$$

$$+2AB\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt+\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt$$

치환적분법을 이용하면

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt=0$$

이다. 즉, $A=0$ 이고, 따라서 $f(x)=(\pi\sin x)^2-\cos x+\alpha$ 이다.
이때, $f(0)=1$ 이므로 $\alpha=2$ 이다.

6번 문항 해설

(1)

$0 \le a \le x \le b$ 이므로 $n = \dfrac{b-x}{b-a}$, $m = \dfrac{x-a}{b-a}$ 로 두면 $m \ge 0$, $n \ge 0$,

$m+n=1>0$ 이다. 조건 (Ⅰ)로부터 $f(x) \le \dfrac{b-x}{b-a}f(a) + \dfrac{x-a}{b-a}f(b)$ 이다.

(2)

$t-L \le x \le t$ 에 대하여, $a=t-L$, $b=t$, $n=\dfrac{b-x}{b-a}$, $m=\dfrac{x-a}{b-a}$ 로 두면

(1)의 결과로부터 $f(x) \le \left\{\dfrac{b-x}{b-a}f(a) + \dfrac{x-a}{b-a}f(b)\right\}$ 이므로

$$\int_{t-L}^{t} f(x)\,dx \le \int_{t-L}^{t}\left\{\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right\}dx$$

이다. 즉, $\displaystyle\int_{t-L}^{t} f(x)\,dx \le \frac{L}{2}\{f(t)+f(t-L)\}$ 이다.

한편, $t \le x \le t+L$ 에 대하여 $a=t$, $b=t+L$, $n=\dfrac{b-x}{b-a}$, $m=\dfrac{x-a}{b-a}$ 로 두면

$$\int_{t}^{t+L} f(x)\,dx \le \frac{L}{2}\{f(t+L)+f(t)\}$$

이다. 따라서 $\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx \le \frac{1}{4}\{f(t-L)+f(t+L)+2f(t)\}$ 이다.

$0 \le x \le L$ 인 실수 x 에 대하여 조건 (Ⅰ)로부터 $f(t) \le \dfrac{1}{2}\{f(t-x)+f(t+x)\}$ 이므로

$$f(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,dx \le \frac{1}{2L}\int_{0}^{L}\{f(t-x)+f(t+x)\}\,dx$$

이고 치환적분을 이용하면 $\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{0}^{L}\{f(t-x)+f(t+x)\}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx$ 이다.

7번 문항 해설

먼저 $P(t)$를 구하자. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로 곡선 $y=x\ln x$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서 접하는 직선의 기울기는 1이고 직선의 방정식은 $y=x-1$이다. 따라서 부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned}P(t)&=\int_1^t\{x\ln x-(x-1)\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^t-\int_1^t\frac{1}{2}x\,dx-\int_1^t(x-1)\,dx\\&=\frac{1}{2}t^2\ln t-\left[\frac{3}{4}x^2-x\right]_1^t\\&=\frac{1}{2}t^2\ln t-\frac{3}{4}t^2+t-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이다. 그리고 $Q(t)$를 구하자. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서 접하는 직선의 기울기는 1이고 직선의 방정식은 $y=x-1$이다. 마찬가지로 부분적분을 이용하면

$$Q(t)=\int_1^t\{(x-1)-\ln x\}\,dx=\frac{1}{2}t^2-t\ln t-\frac{1}{2}$$

이다. 한편, 양수 x에 대하여 $\ln x<x$이므로 $\ln x=\ln\left(\sqrt{x}\right)^2=2\ln\sqrt{x}<2\sqrt{x}$를 얻을 수 있고, 이를 이용하면 $x>1$인 x에 대하여 $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2}{\sqrt{x}}$이다. 이때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$이다. 따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P(t)}{t\,Q(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}t^2\ln t-\frac{3}{4}t^2+t-\frac{1}{4}}{t\left(\frac{1}{2}t^2-t\ln t-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\ln t}{2t}-\frac{3}{4t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4t^3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{2t^2}\right)}=0$$

이다.

8번 문항 해설

[1]

$f(x)=x$ 그리고 $g'(x)=2x^3\sqrt{1-x^4}$ 라 놓으면 $f'(x)=1$ 이고 $g(x)=-\frac{1}{3}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}$ 이다.

제시문 [마]에 의해서

$$\int_0^1 2x^4\sqrt{1-x^4}\,dx=\left[-\frac{1}{3}x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\int_0^1\left\{-\frac{1}{3}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\right\}dx=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

이다.

[2]

$$\int_0^\pi p(x)\cos x\,dx=[\,p(x)\sin x\,]_0^\pi-\int_0^\pi p'(x)\sin x\,dx=-\int_0^\pi p'(x)\sin x\,dx$$

그리고

$$\begin{aligned}\int_0^\pi p''(x)\cos x\,dx&=[\,p'(x)\cos x\,]_0^\pi-\int_0^\pi p'(x)(-\sin x)\,dx\\&=-p'(\pi)-p'(0)+\int_0^\pi p'(x)\sin x\,dx\end{aligned}$$

이다.

그러므로 $3=\int_0^\pi[\,p(x)+p''(x)\,]\cos x\,dx=-p'(\pi)-p'(0)=-p'(\pi)-5$ 가 성립한다.

따라서 $p'(\pi)=-8$ 이고 $p'(\pi)$ 가 갖는 유일한 값은 -8 이다.

9번 문항 해설

그래프를 그려보면 $f(t)<0<g(t)<t+1<h(t)$ 임을 알 수 있다. 부분 적분하여 아래 식을 구할 수 있다.

$$\int_0^1 tg''(t)dt = [tg'(t)]_0^1 - \int_0^1 g'(t)dt = g'(1) - g(1) + g(0)$$

$t=0$ 에서 $4x^3-6x^2+1=(2x-1)(2x^2-2x-1)=0$ 이므로 $g(0)=\frac{1}{2}$ 이다.

$t=1$ 에서 $4x^3-12x^2+8=4(x-1)(x^2-2x-2)=0$ 이므로 $g(1)=1$ 이다.

$g'(1)$ 을 구하자. $g(t)$ 는 $4\{g(t)\}^3-6(t+1)\{g(t)\}^2+7t^2+1=0$ 을 만족한다. 식을 미분하고 $t=1$ 을 대입하면

$$6g^2(1)g'(1)-3g^2(1)-12g(1)g'(1)+7=0$$

을 얻고, $g'(1)=\frac{2}{3}$ 이다. 주어진 적분값은 $\int_0^1 tg''(t)dt = \frac{2}{3}-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 이다.

10번 문항 해설

$(1-2x)^n = (1-x-x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-x)^k(1-x)^{n-k}$ 이므로

$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \int_{-1}^{2} x^k(1-x)^{n-k}dx = \int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx$ 이다.

위의 적분에서 $1-2x=u$로 치환하면, $\int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx = \begin{cases} 0 & n \text{ 홀수} \\ \dfrac{3^{n+1}}{n+1} & n\text{은 짝수} \end{cases}$ 이다.

(별해)

적분의 성질에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \int_{-1}^{2} x^k(1-x)^{n-k}dx &= \int_{-1}^{2}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k x^k(1-x)^{n-k}dx \\ &= \int_{-1}^{2}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-x)^k(1-x)^{n-k}dx \cdots (1)\end{aligned}$$

이항정리에 의하여 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-x)^k(1-x)^{n-k} = (-x+(1-x))^n = (1-2x)^n$ 이다.

따라서 (1)식은 $\int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx \cdots (2)$ 이다. 여기서 $1-2x=t$로 치환하면

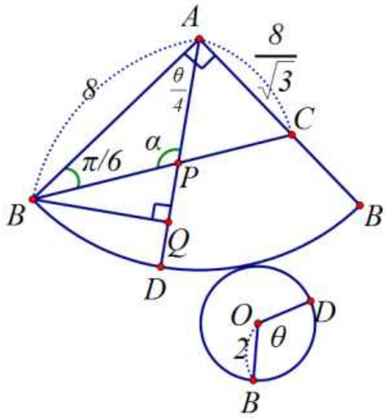
(2)식은 다음과 같다.

$$\int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx = \int_{3}^{-3} t^n\left(-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} t^n dt = \frac{3^{n+1}-(-3)^{n+1}}{2n+2} = \begin{cases} 0 & n \text{ 홀수} \\ \dfrac{3^{n+1}}{n+1} & n\text{은 짝수} \end{cases}$$

즉, $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \int_{-1}^{2} x^k(1-x)^{n-k}dx = \begin{cases} 0 & n \text{ 홀수} \\ \dfrac{3^{n+1}}{n+1} & n\text{은 짝수} \end{cases}$

11번 문항 해설

(a) $\overline{\mathrm{BP}}$를 θ에 관한 식으로 표현하기 위하여 아래의 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 생각한다.



부채꼴의 호의 길이와 밑면의 원둘레의 길이가 같기 때문에 $2\times 2\pi = 8\times \angle \mathrm{BAB}'$에서 부채꼴의 중심각의 크기 $\angle \mathrm{BAB}' = \frac{\pi}{2}$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 삼각형 BAC는 직각삼각형이다. $\tan(\angle \mathrm{CBA}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$에서 $\angle \mathrm{ABP} = \frac{\pi}{6}$임을 알 수 있다.

또, θ가 0에서 2π까지 변할 때, $\angle \mathrm{BAP}$는 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변하므로 $\angle \mathrm{BAP} = \frac{\theta}{4}$이다.

$\angle \mathrm{BPA} = \alpha$라고 하면 $\alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{4}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\theta}{4}$이다.

점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 Q라고 하면, $\overline{\mathrm{BQ}} = 8\sin\frac{\theta}{4}$이다.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{8\sin\frac{\theta}{4}}{\overline{\mathrm{BP}}}$$

최종적으로 다음이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{BP}} = \frac{8\sin\frac{\theta}{4}}{\sin\alpha} = \frac{8\sin\frac{\theta}{4}}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\theta}{4}\right)}$$

(b) (a)에 의하여 $f(\theta) = \overline{\mathrm{BP}} = \frac{8\sin\frac{\theta}{4}}{\sin\alpha} = \frac{8\sin\frac{\theta}{4}}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\theta}{4}\right)}$이다. $\frac{df}{d\theta}$의 최솟값을 구하기 위하여 $f(\theta)$를 θ에 대하여 미분하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\frac{df}{d\theta}=\frac{2\left(\cos\frac{\theta}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)+\sin\frac{\theta}{4}\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}$$

위의 식에 삼각함수의 덧셈정리를 적용하면

$$\frac{df}{d\theta}=\frac{2\left(\cos\frac{\theta}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)+\sin\frac{\theta}{4}\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{4}+\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}$$

위의 식에서 $\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)$가 최대일 때, $\frac{df}{d\theta}$의 값이 최소이다. 즉, $\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)=1$이 최대이다. $\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}=\frac{\pi}{2}$에서 $\theta=\frac{4\pi}{3}$ 이것은 $0\le\theta\le 2\pi$의 조건을 만족한다.

최종적으로 $\theta=\frac{4\pi}{3}$일 때, $\frac{df}{d\theta}$는 최솟값 1을 가진다.

12번 문항 해설

$t=x-1$로 치환한 후, 적분을 정리한다.

$$A=\int_0^2 \frac{e^{3x-1}+e^{-x+3}}{e^{x-1}+e^{-x+1}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^{3t+2}+e^{-t+2}}{e^t+e^{-t}}dt=e^2\int_{-1}^{1}\frac{e^{3t}+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt$$

그런데 $s=-t$로 치환하면 $A=e^2\int_{-1}^{1}\frac{e^{-3s}+e^s}{e^{-s}+e^s}ds=e^2\int_{-1}^{1}\frac{e^{-3t}+e^t}{e^{-t}+e^t}dt$이므로,

$$A=\frac{A}{2}+\frac{A}{2}=\frac{e^2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{e^{3t}+e^{-3t}+e^t+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt$$

이다. 분모를 다음과 같이

$$e^{3t}+e^{-3t}+e^t+e^{-t}=\left(e^t+e^{-t}\right)\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)$$

인수분해하여, 적분을 계산한다.

$$\int_0^2\frac{e^{3x-1}+e^{-x+3}}{e^{x-1}+e^{-x+1}}dx=\frac{e^2}{2}\int_{-1}^{1}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)dt=\frac{e^2}{2}\left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{e^4-1}{2}$$

(별해1)

$t=e^{x-1}$로 치환한 후, 적분을 정리한다.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{e^2\left(t^3+\frac{1}{t}\right)}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}dt&=e^2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{t^4+1}{t\left(t^2+1\right)}dt\\&=e^2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\left(t^2+1\right)^2-2t^2}{t\left(t^2+1\right)}dt\\&=e^2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(t+\frac{1}{t}\right)dt-2e^2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{t}{t^2+1}dt\end{aligned}$$

첫 번째 적분은 직접 계산하고, 두 번째 적분은 $u=t^2+1$로 치환하여 계산한다.

$$\begin{aligned}e^2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(t+\frac{1}{t}\right)dt-2e^2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{t}{t^2+1}dt&=e^2\left[\frac{t^2}{2}+\ln t\right]_{\frac{1}{e}}^{e}-e^2\int_{1+\frac{1}{e^2}}^{1+e^2}\frac{1}{u}du\\&=e^2\left[\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2e^2}+1\right]-e^2\left[\ln u\right]_{1+\frac{1}{e^2}}^{1+e^2}=\frac{e^4-1}{2}\end{aligned}$$

(별해2)

e^{x+1}을 분모 분자에 곱하고, 적분을 다음과 같이 정리한다.

$$\int_0^2\frac{e^{4x}+e^4}{e^{2x}+e^2}dx=\int_0^2\frac{\left(e^{2x}+e^2\right)^2-2e^2e^{2x}}{e^{2x}+e^2}dx=\int_0^2\left(e^{2x}+e^2\right)dx-\int_0^2\frac{2e^2e^{2x}}{e^{2x}+e^2}dx$$

첫 번째 적분은 직접 계산하고, 두 번째 적분은 $t=e^{2x}+e^2$로 치환하여 계산한다.

$$\left[\frac{e^{2x}}{2}+e^2x\right]_0^2-e^2\int_{1+e^2}^{e^2+e^4}\frac{1}{t}dt=\left[\frac{e^4}{2}+2e^2-\frac{1}{2}\right]-e^2\left[\ln t\right]_{1+e^2}^{e^2+e^4}$$

$$=\left[\frac{e^4}{2}+2e^2-\frac{1}{2}\right]-2e^2$$

$$=\frac{e^4-1}{2}$$

13번 문항 해설

[1] $$f'(x)=\frac{2x\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)-x^2\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)}{\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}=\frac{x\left(x\sqrt{a^2-x^2}+2a^2-x^2\right)}{\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

이고 모든 $0\le x\le a$에 대하여 $x\sqrt{a^2-x^2}+2a^2-x^2>0$이므로 $f'(0)=0$이다. 따라서 임의의 $0<x<a$에 대하여 $f'(x)>0$이고 $f(x)$는 $[0,\ a]$에서 연속이므로, 함수 $f(x)$는 단조증가함수이고 일대일 함수이다.

[2] $$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(a\sin x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(a\sin x)\,dx\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(a\sin(\pi-t))(-dt)\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a\sin x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)f(a\sin t)\,dt\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a\sin x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f(a\sin t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}tf(a\sin t)\,dt\\ &=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx\end{aligned}$$

[3] 2번의 결과로부터

$$I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2x}{a\sin x+a\cos x}\,dx=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

이고 다시 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$로 치환하여 적분하면

$$\begin{aligned}I&=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{\sin x+\cos x}\,dx=a\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)\\ &=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2t}{\cos t+\sin t}\,dt\end{aligned}$$

따라서 $2I=a\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t+\cos^2t}{\sin t+\cos t}\,dt=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t+\cos t}\,dt$ 이고,

$$I=\frac{a\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t+\cos t}\,dt=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta$$

이다. 다시 $\cos\theta=x$로 치환하여 적분하면,

$$I=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-x^2}\,(-dx)=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

한편 $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$이므로

$$I=\frac{a\pi}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\frac{a\pi}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$$

이다.

(별해1)

[3] 2번의 결과로부터

$$\int_0^{\pi}xf(a\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(a\sin x)\,dx=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin^2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin t}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2}{\sin t}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1-2\sin t\cos t}{\sin t}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin t}{1-\cos^2t}\,dt-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cos t\,dt\right\}$$

$$= \frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt$$

$$= \frac{a\pi}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{a\pi}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$$

(별해2)

3. $f(a\sin x) = \dfrac{a^2\sin^2 x}{a\sin x + \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 x}} = \dfrac{a\sin^2 x}{\sin x + |\cos x|}$ 이므로

$$\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx = a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx \quad \cdots\cdots \ (*)$$

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx$ 라 하고 (*)에서 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ 로 치환하여 적분하면

$$I = a\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt) = a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\cos t+\sin t}\,dt$$

이고

$$2I = a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}\,dt + a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\cos t+\sin t}\,dt$$

$$= a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t+\cos t}\,dt = a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\,dt$$

이므로 $\displaystyle\int \csc x\,dx = \int\frac{\csc x(\csc x+\cot x)}{\csc x+\cot x}\,dx = -\ln(\cot x+\csc x)+C$ (C는 적분상수)임을 이용하면

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\, dt = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc\left(t+\frac{\pi}{4}\right) dt \\
&= -\frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \left[\ln\left\{\cot\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\csc\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \{\ln(-1+\sqrt{2}) - \ln(1+\sqrt{2})\} \\
&= \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right) = \frac{a\pi}{\sqrt{2}} \ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

이다.

14번 문항 해설

정답 : $-\dfrac{4}{9}$

$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9(t-\theta)(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$

$\phi=t-\theta$로 치환하면 $A=-\int_{t+\pi}^{t-\pi}\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))d\phi$을 얻는다.

$g(\phi)=\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))$라 놓으면 $A=\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi)d\phi+\int_{-\pi}^{t+\pi}g(\phi)d\phi$으로 나눌 수 있다.

$g(\phi)=g(2\pi+\phi)$이므로 $\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi)d\phi=\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi+2\pi)d\phi=\int_{t+\pi}^{\pi}g(\phi)d\phi$이다.

따라서 $A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\phi(\cos(t-\theta)+\sin(t-\theta))d\phi$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi\,d\phi(\cos t+\sin t)+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\phi\sin\phi\,d\phi(\sin t-\cos t)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi\,d\phi(\cos t+\sin t)$

부분적분을 두 번 적용하면

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi\,d\phi=\dfrac{63}{80}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6\phi\,d\phi$이고, 따라서 $h(t)=\dfrac{63}{80}(\cos t+\sin t)$이다.

$h(t)=\dfrac{21}{80}$을 만족하는 t에 대하여 $\dfrac{21^2}{80^2}=h(t)^2=\dfrac{63^2}{80^2}(1+2\cos t\sin t)$이므로

$\cos t\sin t=-\dfrac{4}{9}$이다.

15번 문항 해설

정답 : (1) $I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-4}-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right)+C$ (2) $-\frac{3}{2}+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$

(1) $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x+\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+x}{\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$이다. 한편

$I=\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\int\left(1\times\sqrt{x^2-4}\right)dx$

$x\sqrt{x^2-4}-\int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}dx=x\sqrt{x^2-4}-\int\frac{x^2-4+4}{\sqrt{x^2-4}}dx=x\sqrt{x^2-4}-I-\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx$

이다. $\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx$에서 $x=2\sec\theta$로 치환하면 $dx=2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$이므로

$\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int\frac{4}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}}\times2\sec\theta\tan\theta\,d\theta=4\int\sec\theta\,d\theta=4\int\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta$

$=4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1=4\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C_1$ 이다. (단, C_1은 적분상수)

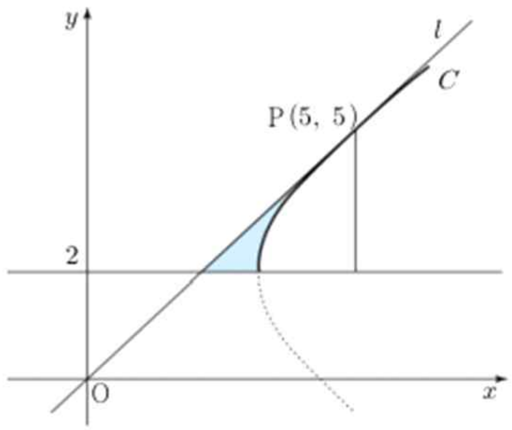
그러므로 $I=x\sqrt{x^2-4}-I-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C'$ (단, C'는 적분상수)

(2) 곡선 $C: 3x^2-4y^2-6x+16y=25$ 위의 점 (5, 5)에서의 접선의 방정식을 구하기 위해
$3x^2-4y^2-6x+16y=25$에서 y를 x의 함수로 보고,
각 항을 x에 대하여 미분하면 $6x-8y\cdot y'-6+16y'=0$ $(y\neq2)$이므로
점 (5, 5)에서의 접선의 기울기는 위 식에 $x=5$, $y=5$를 대입하면
$30-40y'-6+16y'=0$이므로 $y'=1$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은 $l: y=x$이다.
그러므로 접선과 직선 $y=2$의 교점의 좌표는 (2, 2)이다.

$3x^2-4y^2-6x+16y=25$를 변형하면 $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{3}=1$이므로

$y=\pm\sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2-3}+2$이다.

그러므로 그림의 색칠된 부분이 구하는 넓이는



$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \int_3^5 \left[\left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} + 2 \right\} - 2 \right] dx = \frac{9}{2} - \int_3^5 \left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} \right\} dx$ 이다.

여기서 $\int_3^5 \left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} \right\} dx$의 값을 구하기 위해 $x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$,

$x=3$일 때, $t=2$, $x=5$일 때 $t=4$

$\int_3^5 \left\{ \sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} \right\} dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{3}{4}t^2 - 3}\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_2^4 \sqrt{t^2 - 4}\, dt$ 이다.

(1)의 결과를 이용하면

$\int_2^4 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t^2-4}\, dt$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[t\sqrt{t^2-4} - 4\ln\left| t + \sqrt{t^2-4} \right| \right]_2^4$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{ 8\sqrt{3} - 4\ln(4+2\sqrt{3}) + 4\ln 2 \}$

$= \sqrt{3} \{ 2\sqrt{3} - \ln(4+2\sqrt{3}) + \ln 2 \}$

$= \sqrt{3} \{ 2\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3}) \}$ 이다. 따라서

$S = \frac{9}{2} - \sqrt{3}\{ 2\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3}) \}$

$= -\frac{3}{2} + \sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$ 이다.

16번 문항 해설

정답 : $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\ln 2$

무한급수와 정적분의 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4\cos^2\left(\frac{\pi k^2}{4n^2}\right)}=\int_0^1 x^3\sec^2\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)dx$ 이다.

$\frac{\pi}{4}x^2=t$ 로 치환적분하면, $\frac{\pi}{2}x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$\int_0^1 x^3\sec^2\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)dx=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\sec^2 t\,dt$를 얻는다.

부분 적분법에 의해

$\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\sec^2 t\,dt=\frac{8}{\pi^2}[t\times\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt$

$=\frac{2}{\pi}+\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(-\sin t)}{\cos t}dt$

$\cos t=s$ 로 치환하면, $-\sin t=\frac{ds}{dt}$ 이므로

$\frac{2}{\pi}+\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(-\sin t)}{\cos t}dt=\frac{2}{\pi}+\frac{8}{\pi^2}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{s}ds=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\ln 2$

따라서 정답은 $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\ln 2$ 이다.

17번 문항 해설

정답 : $\dfrac{\ln 2}{2}$

부분적분법을 두 번 사용하면

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)\,dx = \left[\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)k\cos(kx)dx$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{k}{n}e^{-nx}\cos(kx)dx$$

$$= \left[\frac{k}{n}\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)\cos(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{k}{n}\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)\{-k\sin(kx)\}dx$$

$= \dfrac{k}{n^2}\{1-e^{-n\pi}\cos(k\pi)\} - \dfrac{k^2}{n^2}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx$ 를 얻는다. 이항하여 정리하면,

$$\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx = \frac{k}{n^2}\{1-e^{-n\pi}\cos(k\pi)\}$$

$\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx = \frac{\frac{k}{n^2}\{1-e^{-n\pi}\cos(k\pi)\}}{1+\frac{k^2}{n^2}}$ 이다.

그러므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}e^{-n\pi}\cos(k\pi)}{1+\frac{k^2}{n^2}}$

이때, $-1 \le \cos(k\pi) \le 1$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}e^{-n\pi}}{1+\frac{k^2}{n^2}} \le \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}e^{-n\pi}}{1+\frac{k^2}{n^2}}$ 를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}e^{-n\pi}}{1+\frac{k^2}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}e^{-n\pi}}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} \times \lim_{n\to\infty}e^{-n\pi}$$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx - \left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \times 0\right) = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$ 이고,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}e^{-n\pi}}{1+\frac{k^2}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}e^{-n\pi}}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}} \times \lim_{n\to\infty} e^{-n\pi} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \times 0\right)$$

$= \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$ 를 얻는다.

수열의 극한의 대소관계에 의해 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)\,dx = \frac{\ln 2}{2}$ 를 얻는다.

18번 문항 해설

정답 : $\dfrac{2^{39}}{5}$

$f(a+b)=f(a)+f(b)$ 에서 $a=b=0$ 을 대입하면 $f(0)=0$ 을 얻는다.

$f(a+b)-f(b)=f(a)$ 에서 양변을 a 로 나누면 $\dfrac{f(a+b)-f(b)}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$ 이고, 각 변에 극한을 취하하면

$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{f(a+b)-f(b)}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$ 이므로 임의의 실수 b 에 대하여 $f'(b)=f'(0)$ 를 얻는다.

양변을 b 에 대하여 부정적분 하면 $f(b)=f'(0)b+C$ (단, C는 적분상수인데,

$f(0)=0$ 이고, $f(3)=6$ 이므로 $f(b)=2b$ 를 얻는다.

부분적분법에 의해 $\displaystyle\int_0^2 \{f(x)\}^9\{f(2-x)\}^{10}f'(x)dx$

$$=\left[\frac{\{f(x)\}^{10}}{10}\{f(2-x)^{10}\}\right]_0^2+\int_0^2\{f(x)\}^{10}\{f(2-x)^9\}f'(2-x)dx$$

$$=\int_0^2\{f(x)\}^{10}\{f(2-x)^9\}f'(2-x)dx$$

$$=\int_0^2\{f(x)\}^{10}\{f(2-x)^9\}f'(x)dx$$

$$=\left[\frac{\{f(x)\}^{11}}{11}\{f(2-x)^9\}\right]_0^2+\int_0^2\frac{9}{11}\{f(x)\}^{11}\{f(2-x)^8\}f'(2-x)dx$$

$$=\int_0^2\frac{9}{11}\{f(x)\}^{11}\{f(2-x)^8\}f'(x)dx$$

$$=\left[\frac{9}{11}\times\frac{\{f(x)\}^{12}}{12}\{f(2-x)^8\}\right]_0^2+\int_0^2\frac{9}{11}\times\frac{8}{12}\{f(x)\}^{12}\{f(2-x)^7\}f'(x)dx$$

$$\vdots$$

$$=\int_0^2\frac{9\times8\times\cdots\times1}{11\times12\times\cdots\times19}\{f(x)\}^{19}\{f(2-x)^0\}f'(x)dx$$

$$=\frac{9\times8\times\cdots\times1}{11\times12\times\cdots\times19}\left[\frac{1}{20}\{f(x)\}^{20}\right]_0^2$$

$$=\frac{9\times8\times\cdots\times1}{11\times12\times\cdots\times19\times20}\times2^{40}$$

$=k$ 를 얻는다. 따라서 ${}_{20}\mathrm{C}_{10}\times k=\dfrac{2^{39}}{5}$ 를 얻는다.

19번 문항 해설

$f(x)$는 연속함수이므로 임의의 n에 대하여 $\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2^n}}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$이다.

최대 최소의 정리에 의해 구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M과 m이라 하면,

구간 $\left[0,\ \frac{1}{2^n}\right]$에서 $m \le f(x) \le M$이므로 정적분의 대소관계에 의해

$\frac{m}{2^m} \le \int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)dx \le \frac{M}{2^n}$이 성립한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$이므로 위 부등식의 각변에 $n\to\infty$의 극한을 취하면 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)dx = 0$을 얻는다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2^n}}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ 이다.

20번 문항 해설

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

(1) 원점 $(0,\ 0)$과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$ $(0 \le x \le 1)$라 하자.

함수 $g(x)$의 정의에 의해 $g(x)=x^2+(1-x^n)^{\frac{2}{n}}$이다.

$g(0)=1,\ g(1)=1$이고, $g'(x)=2x-2(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}$이다.

$0<x<1$일 때 $g'(x)>0 \Leftrightarrow x-(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}>0$

$\Leftrightarrow x^{2-n}-(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}>(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}$

$\Leftrightarrow x<(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ $(n \ge 3$이므로)

$\Leftrightarrow x^n<1-x^n \Leftrightarrow x^n<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

비슷한 방법으로 $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$,

그리고 $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $g(x)$가 최대가 된다.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이므로 원하는 점 A의 좌표는 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$이다.

(2) 곡선 $y=f(x)$의 한 점 $(x_0,\ f(x_0))$의 접선의 방정식은
$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$이다.
점 P의 좌표를 $(p,\ 0)$, 점 Q의 좌표를 $(0,\ q)$이라 하면
$0=f'(x_0)(p-x_0)+f(x_0),\ q=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

따라서 $p=\frac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)},\ q=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)},\ 0\right)$,

점 Q의 좌표는 $(0,\ f(x_0)-x_0f'(x_0))$이다.

이로부터 선분 PQ의 길이의 제곱을 $h(x_0)$라 하면

$h(x_0)=\frac{|f(x_0)-x_0f'(x_0)|^2}{|f'(x_0)|^2}\left(1+(f'(x_0))^2\right)$ $(0<x_0<1)$을 얻는다.

한편 $\left|f(x_0)-x_0 f'(x_0)\right|=\left|\left(1-{x_0}^n\right)^{\frac{1}{n}}+{x_0}^n\left(1-{x_0}^n\right)^{\frac{1-n}{n}}\right|=\left(1-{x_0}^n\right)^{\frac{1-n}{n}}$

$\left|f'(x_0)\right|=\left(1-{x_0}^n\right)^{\frac{1-n}{n}}{x_0}^{n-1}$이므로 정리하면 $h(x_0)=\left(\frac{1}{x_0}\right)^{2(n-1)}+\left(1-{x_0}^n\right)^{\frac{2(1-n)}{n}}$

선분 PQ의 길이의 최솟값을 찾기 위해서는 구간 $(0,\ 1)$에서
$h(x)$의 최솟값을 찾으면 충분하다.
x가 0또는 1로 수렴함에 따라 $h(x)$는 양의 무한대로 발산한다
또한, $h'(x)=2(1-n)\left(x^{1-2n}-\left(1-x^n\right)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}\right)$이므로, $0<x<1$일 때

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x^{1-2n}-\left(1-x^n\right)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}<0$ ($n \geq 3$이므로)

$\Leftrightarrow x^{2-3n}-\left(1-x^n\right)^{\frac{2-3n}{n}}<0$

$\Leftrightarrow x^{2-3n}<\left(1-x^n\right)^{\frac{2-3n}{n}} \Leftrightarrow x>\left(1-x^n\right)^{\frac{1}{n}}$ ($n \geq 3$이므로)

$\Leftrightarrow x^n>1-x^n \Leftrightarrow x^n>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

비슷한 방법으로 $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

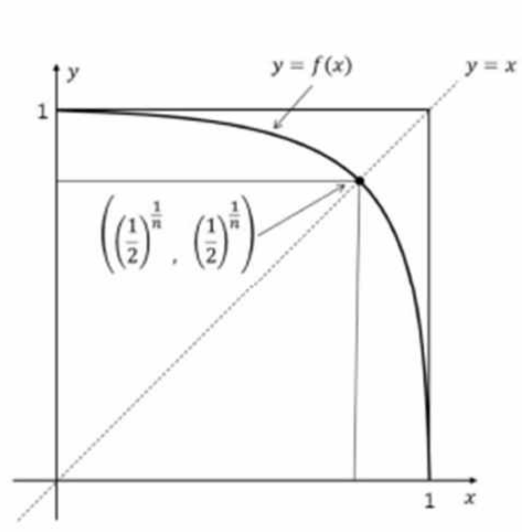
따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $h(x)$가 최소가 되고 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=2\cdot 4^{\frac{n-1}{n}}$이다.

선분 PQ의 길이의 최솟값은 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$의 양의 제곱근인 $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}$이다.

(3) $0<x<1$일 때 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이고, $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

따라서 $0<x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<f(x)<1$이다.

이로부터



(한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$인 정사각형의 넓이)$= \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\le \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}} f(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}} dx \le \int_0^1 1\, dx$

=(한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)를 얻는다.

정리하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \le d_n \le 1$ 이때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}} = 1$이므로

수열의 극한의 대소관계에 의해 $\lim_{n\to\infty} d_n = 1$

21번 문항 해설

(1) 함수 $f(x)=e^x\sin x$를 미분하면 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$이고,

$x=\frac{3}{4}\pi$에서만 $f'(x)=0$이다.

$x<\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 증가하고

$x>\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 감소한다.

그러므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 최댓값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=e^{\frac{3}{4}\pi}\sin\frac{3}{4}\pi=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$을 가진다.

따라서 $\theta=\frac{3}{4}\pi$이고 $M=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

(2) 지수함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여
아래의 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right) &= e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\sin\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right) \\ &= e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\left\{\sin\theta\cos\frac{1}{n}\pi+\cos\theta\sin\frac{1}{n}\pi\right\} \\ &= e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{n}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{n}\pi\right\} \\ &= e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right\} \\ &= M\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right) \end{aligned}$$

(3) $x\in[0,\ \pi]$에 대하여 $0\le f(x)\le M$이므로 $0\le\{f(x)\}^n\le M^n$이 성립하고 $f(x)$가
상수함수가
아니므로, 구간 $[0,\ \pi]$에서 적분하면

$$\int_0^\pi\{f(x)\}^n dx<\int_0^\pi M^n dx=M^n\pi$$

이다.

$n\ge 4$일 때, $\frac{3}{4}\pi<\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\le\pi$이고 $f(x)$가 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \pi\right]$에서 감소하므로

구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$에 속한 x에 대하여 $f(\pi)\le f\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\le f(x)$ 이다.

따라서 $0\le Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\le f(x)$가 성립한다.

구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$에서

$$\left\{M\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n = M^n\cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \le \{f(x)\}^n$$

이므로 위의 부등식을 적용하면

$$M^n\cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi}M^n\cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n dx \le \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi}\{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다.

그리고 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$가 $[0,\ \pi]$의 부분집합이고 $f(x)\ge 0$이므로

$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi}\{f(x)\}^n dx < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx$가 성립한다. 위의 두 부등식으로부터

$M^n\cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx$을 얻는다.

그러므로 $n\ \ge 4$에 대하여 $M^n\cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx < M^n\pi$ 가

성립한다.

[별해]

$M^n\cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n = \left\{f\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n$이다.

$n\ \ge 4$에 대하여 $y=(f(x))^n$의 도함수는

$y'=n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)= n\cdot e^{nx}\sin^n x+n\cdot e^{nx}\sin^{(n-1)}x\cos x$

$=n\cdot e^{nx}\sin^{(n-1)}x(\sin x+\cos x)$

이고, $y'=0$이면 $x=0,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi$이다.

$0\le\ x\ \le\ \pi$에서 $y=(f(x))^n$의 증가, 감소를 알아보기 위해 y'의 부호를 표로 만들면

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	M^n	$\searrow$	

이므로 $y=(f(x))^n$는 구간 $[0,\ \pi]$에서 $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값 M^n을 가진다.

오른쪽 부등식: 구간 $[0,\ \pi]$에서 $y=(f(x))^n$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분은 밑변이 $[0,\ \pi]$이고 높이가 M^n인 직사각형에 포함되므로

$$\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx < \int_0^{\pi}M^n dx = M^n\pi$$

가 성립한다.

왼쪽 부등식: $M^n \cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi$는 밑변이

구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right]$이고 높이가 $\left\{f\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n$인 직사각형의 넓이이다.

이 직사각형은 함수 $y = (f(x))^n$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분에 포함되어 있으므로

$$M^n \cdot e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다.

22번 문항 해설

(1) k가 임의의 자연수라고 할 때, 함수 $f(x)$가
닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 증가하므로 열린구간 $(k,\ k+1)$의 모든 x에 대하여
$f(k)< f(x)< f(k+1)$이다. 따라서

$$f(k)=\int_k^{k+1} f(k)dx < \int_k^{k+1} f(x)dx < \int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)$$

이다. 임의의 자연수 n에 대하여
부등식의 각 변에 $\sum_{k=n}^{n}$ 을 취하면

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k+1)=\sum_{k=1}^{n+1} f(k)-f(1)$$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} f(k)<\int_1^{n+1} f(x)dx$이고

$f(1)+\int_1^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n+1} f(k)$이다. 그러므로
문제의 두 부등식 중에서 오른쪽 부등식은 모든 자연수
n에 대하여 성립하고, 왼쪽 부등식은 $n\geq 2$일 때 성립한다. 또한 $n=1$일 때는 왼쪽
부등식이 등식으로 성립한다.

(2) 자연수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^p$은 구간 $[1,\ \infty)$에서 연속이고 증가한다.
따라서 (1)의 결과에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=0$이고

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}$이다.

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=0$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}$ 이다.

(3) $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}$은 구간 $[1,\ \infty)$에서 연속이고 증가한다.
따라서 (1)의 결과에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$(-1)+\int_1^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \leq \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)< \int_1^{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \text{ 이고}$$

$$2(\sqrt{n+1}-1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{n}-1 \text{ 이므로}$$

$$2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)< \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2-\frac{1}{\sqrt{n}} \text{이다.}$$

따라서 수열의 극한의 대소관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

23번 문항 해설

(1) 0 (2) 2 (3) 해설참조 (4) ln2

(1) 이항정리에 의해 $(1+a)^{n+1}=1+(n+1)a+\dfrac{(n+1)n}{2}a^2+\cdots+a^{n+1}>\dfrac{n^2}{2}a^2$이다.

따라서

$$0<\frac{n}{2^n}=\frac{2n}{(1+1)^{n+1}}=\frac{4n}{n^2}=\frac{4}{n}\to 0$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$이다.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}=\frac{d}{dr}\left(\sum_{k=1}^{n}r^k\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{r-r^{n+1}}{1-r}\right)$

$$=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

이다. 여기서 $r=\dfrac{1}{2}$일 때, 수열의 극한의 대소 관계와

(1)의 결과를 이용하면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}=2\text{이다.}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{r^k}{k}=\int_0^r\left(\sum_{k=1}^{n+1}t^{k-1}\right)dt=\int_0^r\left(\frac{1}{1-t}-\frac{t^{n+1}}{1-t}\right)dt$

$$=-\ln(1-r)-\int_0^r\frac{t^{n+1}}{1-t}dt \quad \text{이다.}$$

(4) $\displaystyle 0\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^{n+1}}{1-t}dt\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-t}dt=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t}dt=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\ln2\ \to\ 0$이므로 제시문 [나]에 의하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^{n+1}}{1-t}dt=0$

이다. 문제 3의 결과를 이용하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln2$ 이다.

24번 문항 해설

(1) $\ln\frac{27}{4e}$ (2) 0 (3) 해설참조 (4) $2\ln2-\frac{5}{4}$

(1) $a_n=\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!n^n}}$ 이므로

$$\ln a_n=\frac{1}{n}\ln\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(3n)}{n^n}=\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(2+\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)$$

무한급수와 정적분의 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln(2+x)dx=\int_2^3\ln t\,dt$이다.

부분적분법에 의해

$$\int_2^3\ln t\,dt=\Big[t\ln t\Big]_2^3-\int_2^3 t\frac{1}{t}dt=(3\ln3-2\ln2)-1=\ln\frac{27}{4e}$$

(2) $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$라 하면, $x>4$일 때,

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}>0$이다.

따라서, $f(x)$는 $[4,\ \infty)$에서 증가한다.

$f(4)=\sqrt{4}-\ln4=2(1-\ln2)>0$이므로, 모든 $x>4$에 대해 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x>0$가 성립한다.

$n>4$에 대해 $0<\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ 이다.

(3) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{n+k}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$
$$=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$
$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\times\int_0^1\ln(1+x)dx=0\times\ln\frac{4}{e}=0$$

따라서, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$ 이 성립한다.

(4) $\ln a_n = n\ln(n+1)+(n-1)\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln(n+k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\left(\frac{n+k}{n}\times n\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}\right\}+\frac{n(n+1)}{2}\ln n$$ 이므로

$$\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^2}\ln a_n-\frac{1}{2}\ln n$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}\right\}-\frac{\ln n}{2}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)+\frac{1}{2n}\ln n$$ 이다.

(2)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ 이고, (3)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)\,dx$$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)\,dx=\int_1^2(2-t)\ln t\,dt$$ 이다.

$$\int_1^2(2-t)\ln t\,dt=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\int_1^2\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\int_1^2\left(2-\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\left[2t-\frac{t^2}{4}\right]_1^2$$

$$=\left(2\ln 2-\frac{3}{2}\ln 1\right)-\left\{\left(4-\frac{4}{4}\right)-\left(2-\frac{1}{4}\right)\right\}=2\ln 2-\frac{5}{4}$$

따라서, $\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)\,dx=2\ln 2-\frac{5}{4}$ 이다.

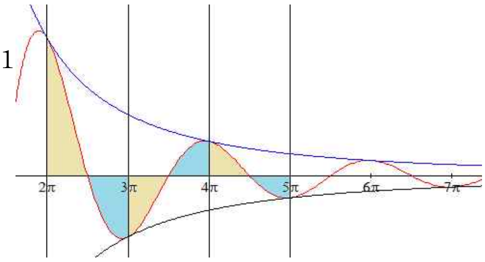
25번 문항 해설

[1] $n\pi \le x \le (n+1)\pi$일 때 $\frac{1}{(n+1)\pi} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n\pi}$이고 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = 2$이므로

$$\frac{2}{(n+1)\pi} \le a_n \le \frac{2}{n\pi}, \quad \therefore \lim_{n\to\infty} n a_n = \frac{2}{\pi}$$

[2] $2k\pi \le x \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}$일 때, $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$

이므로



$$\frac{1}{(2k\pi+\frac{\pi}{2})^2} \le \int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^2} dx \le \frac{1}{(2k\pi)^2}$$

$2k\pi + \frac{\pi}{2} \le x \le 2k\pi + \pi$일 때, $\int_{2k\pi+\frac{\pi}{2}}^{2k\pi+\pi} \cos x dx = -1$이므로

$$-\frac{1}{(2k\pi+\frac{\pi}{2})^2} \le \int_{2k\pi+\frac{\pi}{2}}^{2k\pi+\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx \le -\frac{1}{(2k\pi+\pi)^2}$$

$$\therefore \ 0 < b_{2k} < \frac{1}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi+\pi)^2}$$

b_{2k+1}의 경우도 같은 방법으로 $\frac{1}{(2k\pi+2\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi+\pi)^2} < b_{2k+1} < 0$

$$\therefore \ 0 < |b_n| < \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}, \quad \lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$$

[3] 부분적분법에서

$$a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^n \left\{ \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx \right\}$$

$$= (-1)^n \left\{ \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - b_n \right\} = \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi} + (-1)^n b_n$$

$$n(n+1)a_n = \frac{n}{\pi} + \frac{n+1}{\pi} + (-1)^n n(n+1) b_n = \frac{2n+1}{\pi} + (-1)^n n(n+1) b_n$$

$$\therefore \ f(n) = \frac{2n+1}{\pi}, \text{ 즉 } f(x) = \frac{2x+1}{\pi}$$

26번 문항 해설

[1]

함수 $h(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. 각각의 자연수 i에 대하여, 평균값 정리에 의해

$$h(c_i)=\frac{F(i+1)-F(i)}{(i+1)-i}=F(i+1)-F(i)$$

를 만족하는 c_i가 열린구간 $(i, i+1)$에 존재한다.

함수 $h(x)$는 구간 $[m,\infty)$에서 감소하므로 각각의 자연수 $i\,(i\geq m)$에 대하여

$$h(i+1)<h(c_i)<h(i)$$

가 성립한다.

따라서

$$\sum_{i=m+1}^{n+1}h(i)<F(n+1)-F(m)<\sum_{i=m}^{n}h(i)$$

이다. 한편, 치환적분법에 의해

$$F(n+1)-F(m)=\int_m^{n+1}f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(m)}^{g(n+1)}f(u)du$$

이다. 따라서

$$\sum_{i=m+1}^{n+1}h(i)<\int_{g(m)}^{g(n+1)}f(x)dx<\sum_{i=m}^{n}h(i)$$

이다.

[2]

$f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, $g(x)=\dfrac{1}{x+3}$이라 두자.

그러면 $h(x)=f(g(x))g'(x)=\dfrac{-2^{x+3}}{(x+3)^2}$이고 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}h(i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{-2^{i+3}}{(i+3)^2}$이다.

한편 $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}h(i)=-\frac{2^4}{4^2}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}h(i)=-\left(\frac{2^4}{4^2}+\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}\right)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}h(i)=-\left(\frac{2^4}{4^2}+\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}+\frac{2^7}{7^2}\right)$ 이다.

구간 $[0,\infty)$에서 함수 $f(x)$는 연속이며 함수 $g(x)$는 미분가능이며 $g'(x)$는 연속이다.

또한, $x>1$일 때 $h'(x)=-\dfrac{2^{x+3}\{(x+3)\ln 2-2\}}{(x+3)^3}<0$이므로 함수 $h(x)$는 구간 $[1,\infty)$에서 감소한다.

따라서 [1]에 의해

$$-\left(\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}+\frac{2^7}{7^2}\right)=\sum_{i=2}^{4}h(i)<\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{7}}f(x)dx<\sum_{i=1}^{3}h(i)=-\left(\frac{2^4}{4^2}+\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}\right)$$

이므로 $2.03\approx\left(\frac{2^3}{4^2}+\frac{2^4}{5^2}+\frac{2^5}{6^2}\right)<\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{x}}dx<\left(\frac{2^4}{5^2}+\frac{2^5}{6^2}+\frac{2^6}{7^2}\right)\approx 2.84$ 이다.

따라서, 정답은 2 이다.

[3]

$f(x)=-\ln x,\ g(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ 라 두자.

그러면 $h(x)=f(g(x))g'(x)=\left\{-\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)\right\}\left\{\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right\}$ 이고

$\sum_{i=1}^{n}h(i)=-\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]$ 이다.

구간 $[0,\infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 연속이며 함수 $g(x)$ 는 미분가능이며 $g'(x)$ 는 연속이다.

$x>1$ 일 때 $h'(x)=-\left[\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\left\{\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right\}^2+\left(\ln\frac{x^2+1}{x+1}\right)\frac{4}{(x+1)^3}\right]<0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 구간 $[1,\infty)$ 에서 감소한다.

$h(1)=0$ 이며 문제 [3-1]에 의해 $n\geq 1$ 일 때 아래의 부등식을 얻을 수 있다.

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]<\int_{1}^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)dx<-\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]$$

따라서 $n\geq 1$ 일 때

$$a_n=-\frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]<\frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}\int_{1}^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)dx$$

이고 $n\geq 2$ 일 때

$$\frac{4}{n\ln n}\int_{1}^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)dx<-\frac{4}{n\ln n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]=a_{n+1}$$

한편, 부분적분법에 의해 $\int(-\ln x)dx=-x\ln x+\int 1dx=-x(\ln x-1)+C$ 이다. (단, C 는 적분상수)

따라서, $\int_{1}^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)dx=-\frac{n^2+2n+2}{n+2}\left(\ln\frac{n^2+2n+2}{n+2}-1\right)-1$ 이다.

$$b_n=-\frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}\left\{\frac{n^2+2n+2}{n+2}\left(\ln\frac{n^2+2n+2}{n+2}-1\right)+1\right\}\ (n\geq 1),$$

$c_{n-1} = -\dfrac{4}{n\ln n}\left\{\dfrac{n^2+2n+2}{n+2}\left(\ln\dfrac{n^2+2n+2}{n+2}-1\right)+1\right\}$ $(n \geq 2)$이라 하면 모든 자연수 n에

대하여 $c_n < a_n < b_n$ 이 성립한다.

이때,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= -4\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+2n+2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\ln\frac{n^2+2n+2}{(n+2)(n+1)}(n+1)}{\ln(n+1)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\ &= -4\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+2n+2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\ln\frac{n^2+2n+2}{(n+2)(n+1)}}{\ln(n+1)}+1-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\ &= -4\end{aligned}$$

이고

$\lim_{n\to\infty} c_n$

$$\begin{aligned}&= -4\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+1)(n+3)}\left(\frac{\ln\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+3)(n+1)}(n+1)}{\ln(n+1)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\ &= -4\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+1)(n+3)}\left(\frac{\ln\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+3)(n+1)}}{\ln(n+1)}+1-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\ &= -4\end{aligned}$$

이다. 따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{n\to\infty} c_n = -4$ 이다.

27번 문항 해설

[1]

함수 g를 미분하면

$$g'(x) = \cos x - \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \cos x - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

이다. 제시문 (가)를 이용하면, $0 < x < 1$일 때

$$g'(x) = \cos x - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > \sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \sqrt{1-x^2}\left(1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2}\right) > 0$$

이므로 g는 증가한다.

[2]

함수 $h(x) = \sin x - \dfrac{1}{x+n}$에 대하여 제시문 (가)의 $\sin x < x\ (0 < x < 1)$을 이용하면

$$h\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} + n} < \frac{1}{n+\sqrt{n}} - \frac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} + n} < 0$$ 임을 알 수 있다. 문제 [1-1]번의 결과와 $g(0)=0$인 사실을 이용하면, $0 < x \le 1$일 때 $g(x) > 0$이므로

$\sin x > \dfrac{x}{1+x^2}$ 이다. 이 부등식을 이용하면

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\dfrac{1}{n}+n} > \frac{\dfrac{1}{n}}{1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} - \frac{1}{\dfrac{1}{n}+n} = 0$$

이다. 따라서 제시문 (나)에 의해

$\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} < a_n < \dfrac{1}{n}$ 임을 알 수 있다.

[3]

문제 [2]의 결과와 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} n a_n = 1$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{a_n} \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos a_n) = \lim_{n\to\infty} n^2 a_n^2 \cdot \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n} = \frac{1}{2}$$

이다.

28번 문항 해설

우선 부분적분을 두 번 적용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx &= \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)k\cos(kx)dx \\ &= \frac{k}{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(kx)dx \\ &= \frac{k}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\cos(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{k}{n}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)(-k\sin(kx))dx \\ &= -\frac{e^{-n\pi}k\cos(k\pi)}{n^2} + \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx\end{aligned}$$

위 식을 정리하면 $\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx = \frac{k}{n^2+k^2} - \frac{e^{-n\pi}k\cos(k\pi)}{n^2+k^2}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n\pi}k\cos(k\pi)}{n^2+k^2}$$

이다. 이 때, 구분구적법과 치환($t=1+x^2$)을 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{2t}dt = \frac{\ln 2}{2}$$

를 얻을 수 있다. 한편, $-\frac{1}{n^2} \le \frac{\cos(k\pi)}{n^2+k^2} \le \frac{1}{n^2}$ 이므로,

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n\pi}k}{n^2} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n\pi}\cos(k\pi)k}{n^2+k^2} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n\pi}k}{n^2}$$

이다. 그런데 $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ 를 이용하여 계산하면 $\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n\pi}k}{n^2} = e^{-n\pi}\frac{n(n+1)}{2n^2}$ 이 0으로 수렴함을 보일 수 있다. $\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n\pi}(-1)^k k}{n^2+k^2}$ 보다 작은 수열과 큰 수열 모두 0으로 수렴하므로,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n\pi}(-1)^k k}{n^2+k^2} = 0$$

이다. 모두를 정리하여, $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(kx)dx = \frac{\ln 2}{2}$ 를 얻는다.

29번 문항 해설

(a)

(i) $x=0$이면 등호성립

(ii) $x=1$이면

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k=0,\ \frac{1}{1+x}=\frac{1}{2},\ 1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k=1$$ 이므로 아래의 등식은 성립한다.

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k \le \frac{1}{1+x} \le 1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k$$

(iii) $0<x<1$인 경우

등비수열의 합의 공식에 의하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k=1+\frac{-x(1-(-x)^{2n-1})}{1-(-x)}=\frac{1+x-x-(-x)^{2n}}{1+x}=\frac{1-x^{2n}}{1+x}$$

$$1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k=1+\frac{-x(1-(-x)^{2n})}{1-(-x)}=\frac{1+x-x-(-x)^{2n+1}}{1+x}=\frac{1+x^{2n+1}}{1+x}$$

그런데 $0<x<1$에서 $1-x^{2n}<1<1+x^{2n+1}$ 이고, 또 $1+x>0$이므로 다음이 성립한다.

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k < \frac{1}{1+x} < 1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k$$

최종적으로 $0\le x\le 1$에서 아래의 식이 성립한다.

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k \le \frac{1}{1+x} \le 1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k$$

(b) 대학발표 예시답안

a_n은 적분에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\left(\int_0^1(-x)^{k-1}dx\right)=\int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k\right)dx$$

이제 문항(a)의 첫 번째 부등식에 의하여 아래 식이 성립한다.

$$a_n \le \int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

또한

$$a_n=\int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n-1}(-x)^k\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k\right)dx-\int_0^1 x^{2n}dx=\int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{2n}(-x)^k\right)dx-\frac{1}{2n+1}$$

문항(a)의 두 번째 부등식에 의하여 아래 식이 성립한다.

$$a_n \ge \int_0^1\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{2n+1}=\ln 2-\frac{1}{2n+1}$$

최종적으로 다음이 성립한다.

$$\ln 2-\frac{1}{2n+1}\le a_n\le \ln 2$$

따라서 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\ln 2$ 이다.

별해 1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-2\cdot\frac{1}{2k}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\times\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2\end{aligned}$$

♠주의: (문항 a)를 이용하여 (문항 b)를 구하라고 하는 경우에는 위의 풀이를 적용할 수 없다. 그렇지만 현재, (문항 a)를 이용하라는 표현이 없기 때문에 위의 풀이가 가능하다고 판단한다.

나침반 풀이 2)

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\cdots$$

그런데

$$1=\int_0^1 1dx,\ -\frac{1}{2}=\int_0^1-xdx,\ \frac{1}{3}=\int_0^1x^2dx,\ -\frac{1}{4}=\int_0^1-x^3dx,\cdots$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\cdots\\&=\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\cdots\right)dx\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2\end{aligned}$$

30번 문항 해설

$S_n = \int_0^{\pi} \left| e^{-x} \sin nx \right| dx$ 이다. 닫힌 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 방정식 $e^{-x}\sin nx = 0$ 의 근은

$$x = 0,\ \frac{\pi}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)\pi}{n},\ \pi$$

이다. $k = 1,\ \cdots,\ n$ 에 대해

$$a_k = \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left| e^{-x}\sin nx \right| dx = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x}\sin nx\, dx \right|$$

라 하면 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 이다. 부분적분법을 이용하면

$$\int e^{-x}\sin nx\, dx = -\frac{e^{-x}(\sin nx + n\cos nx)}{n^2+1}$$

이다. 따라서 $a_k = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x}\sin nx\, dx \right| = \frac{ne^{-\frac{k\pi}{n}}}{n^2+1}\left(1 + e^{\frac{\pi}{n}}\right)$ 이므로

$$S_n = \frac{n}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{k\pi}{n}}\right\}$$

$$= \frac{n}{n^2+1}\left[\left\{\left(e^0 + e^{-\frac{\pi}{n}}\right) + \left(e^{-\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{2\pi}{n}}\right) + \cdots + \left(e^{-\frac{(n-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{n\pi}{n}}\right)\right\} + \left(e^{-\frac{n\pi}{n}} - e^{-\frac{n\pi}{n}}\right)\right]$$

$$= \frac{2n}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} + \frac{n}{n^2+1}\left(1 - e^{-\pi}\right)$$

이다. $0 \le 1 - e^{-\pi} \le 1$ 이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\pi}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\pi}\right) = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1} = 2$ 이고, 정적분과 급수의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} = \int_0^1 e^{-\pi x}dx = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{2\left(1-e^{-\pi}\right)}{\pi}$$

이다.

31번 문항 해설

[1]

$f(x)=g(x)\ \Rightarrow\ \sin x=\cos x$ 이므로 $\tan x=1$ 이다.

이때 $x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \cdots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{4}$ 이고 공차가 π 인 등차수열이다. 즉, $a_n=\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi$ (단, n은 자연수) 이고, $a_{10}-a_2=8\pi$ 이다.

[2]

$a_n=\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-\frac{3}{4}}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx &\le \frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}\\ &=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-\frac{3}{4}}\\ &\le \frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int_1^{n}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx\end{aligned}$$

인 것을 알 수 있다. 로그함수의 적분법을 이용하여 풀면,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int_1^{n}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n-\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right),$$

$$\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{5}{4}+4\right)$$

임을 알 수 있다. 즉,

$$\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{5}{4}+4\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\le\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n-\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)$$

이고, $\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)=\frac{1}{\pi}$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{\pi}$ 이다.

[3]

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_{n+1}}dx\ \le\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{x}dx\ \le\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_n}dx \text{ 이고}$$

$\int_{a_n}^{a_{n+1}} (\sin x - \cos x)\,dx = 2\sqrt{2}$ 이므로,

$$2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}A_k \le 2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

이다. [2]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}A_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 이다.

32번 문항 해설

$q(x)=e^x+x\ln(x+1)+x^2\cos^{2022}\pi x$ 라 하면, 함수 $q(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$을 포함하는 열린구간에서 연속인 도함수 $q'(x)$를 갖는다.

제시문 <가>에 의하여 $q'(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면 닫힌구간 $[0,1]$에서

$$m \le q'(x) \le M \cdots\cdots ㉠$$

한편 부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned} c_n &= (n-2022)\int_0^1 x^n q(x)\,dx \\ &= \frac{n-2022}{n+1}\left(\Big[x^{n+1}q(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx\right) \\ &= \frac{n-2022}{n+1}\left(q(1) - \int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx\right) \end{aligned}$$

㉠과 제시문 <나>에 의하여

$$\frac{m}{n+2} = m\int_0^1 x^{n+1}\,dx \le \int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx \le M\int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{M}{n+2}$$

따라서

$$\frac{(n-2022)m}{(n+1)(n+2)} \le \frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx \le \frac{(n-2022)M}{(n+1)(n+2)}$$

이고 제시문 <다>에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx = 0$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} c_n = q(1) = e+\ln 2+\cos^{2022}\pi = e+\ln 2+1$ 이다.

33번 문항 해설

[1]

함수 $g(t)=\dfrac{1}{t}$ 이라고 하면 함수 $g(t)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 $g(t)>0$이고 감소하므로,

제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 의해서

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\times\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\int_{1}^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{t}\,dt<1\times\left(1+\frac{1}{n}-1\right),$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

따라서

$$\frac{1}{2}\le\frac{n}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1\ \Rightarrow\ \sqrt{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e$$

이다. 그러므로 제시문 (ㄷ)의 명제 A는 참이다.

[2]

$f(x)=x^3-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}x^2+x-e$ 라고 하자.

(a) 논제 1로부터,

$$f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e<0 \text{이고}$$

$$f(e)=e^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}e^2+e-e=e^2\left\{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}>0$$

이다.

따라서 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n},\ e\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(b) $x>e$인 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)=3x^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}x+1=x\left\{3x-2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}+1>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(e,\ \infty)$에서 증가한다. 따라서 $x\ge e$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\ge f(e)>0$$

이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(e,\ \infty)$에서 해를 갖지 않는다.

논제 1과 (a), (b)에 의해서 제시문 (ㄹ)의 수 a_n은 다음을 만족한다.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n < e$$

한편, $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 이므로 $\lim_{n \to \infty} a_n = e$ 이다.

34번 문항 해설

[1]

함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 생각하면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+2\left(\sqrt{n}-1\right)$$

각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 을 곱한 후에 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ 을 취하면,

$$2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n}}=2 \text{ 이다.}$$

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

(별해)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1=2$$

[2]

첫 번째로 주어진 급수를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx=\sum_{k=1}^{n}n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하고자 하는 극한값은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

동일한 방식으로 두 번째 극한값을 아래와 같이 계산 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

[3]

제시문 (다)에 의해 아래의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx$$

여기서 $f(x) = x^5$ 이라 하자. 그러면 $f(x)$ 는 연속이고 미분가능한 함수이므로, 평균값 정리에 의해

$\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n} - x\right)dx$ 을 만족하는 $\theta_k(x) \in \left[x, \frac{k}{n}\right]$ 가 존재한다.

$f'(x) = 5x^4$ 는 $[0, 1]$에서 증가하므로,

모든 $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$에 대하여 $5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 \le 5x^4 \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4$ 이 성립한다. 따라서

$$\int_x^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 dx \le \int_x^{\frac{k}{n}} 5x^4 dx \le \int_x^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4 dx$$

$$5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right) \le \left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5 \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)$$

이고, 이로부터 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)dx$$

(2)번 문제에서 계산한 결과를 활용하여, 위 부등식 양쪽 끝을 $n \to \infty$ 일 때의 극한값을 계산하면 $\frac{1}{2}$ 로 동일함을 알 수 있다. 따라서 문제에서 구하고자 하는 극한값은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5 dx\right] = \frac{1}{2}$ 이다.

35번 문항 해설

구간 $[2,\infty)$에서 임의의 x를 택하자. $x=2n+c$를 만족하는 자연수 n과 $0\le c<2$가 존재하므로

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_{-2n-c}^{2n+c} f(t)dt=\int_{-2n-c}^{-2n} f(t)dt+\int_{-2n}^{2n} f(t)dt+\int_{2n}^{2n+c} f(t)dt$$

이고, $f(x)$가 모든 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$을 만족하므로

$$\int_{-2n}^{2n} f(t)dt=2n\int_0^2 f(t)dt \text{ 이고 } \int_{2n}^{2n+c} f(t)dt=\int_0^c f(2n+t)dt=\int_0^c f(t)dt$$

이다.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=1$$

이므로

$$\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f(t)dt=\frac{2n}{x}+\frac{1}{x}\int_0^c f(t)dt+\frac{1}{x}\int_{-c}^{0} f(t)dt$$

이다. 이때, $\dfrac{x-2}{x}\le\dfrac{2n}{x}\le 1$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x}=1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n}{x}=1$이다.

이제, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^c f(t)dt=0$임을 보이자.

$c=0$인 경우에는 당연히 성립하므로 $0<c<2$라 가정하자.

함수 $|f(x)|$가 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이므로 제시문 [다]의 최대·최소 정리에 의해 함수 $|f(x)|$는 최댓값을 갖는다. 최댓값을 M이라고 하면, 구간 $[0,c]$에 속하는 임의의 x에 대하여 $-M\le f(x)\le M$이므로

$$-2M\le -cM=\int_0^c(-M)dt\le\int_0^c f(t)dt\le\int_0^c Mdt=cM\le 2M$$

이 성립한다.

이때 $-\dfrac{2M}{x}\le\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^c f(t)dt\le\dfrac{2M}{x}$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2M}{x}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^c f(t)dt=0$이다.

마찬가지로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-c}^{0} f(t)dt=0$이 성립한다. 그러므로, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt=1$이다.

36번 문항 해설

[1] $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\frac{1}{\tan x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$ 이므로

$$\frac{\cos x}{\sin x}<\frac{1}{x},\ 즉\ x\cos x-\sin x<0$$

이다. 따라서

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$$

이 성립하여 $f(x)$는 열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 감소한다.

[2] 제시문 [라]로부터 열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)<1$이고, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=1$이다.

열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$에서 임의의 x를 택하자. 문항 [1]에 의하여 $f(t)=\frac{\sin t}{t}$가 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 감소하므로 $x\le t\le 3x$인 임의의 t에 대하여

$$\frac{\sin 3x}{3x}\le\frac{\sin t}{t}<1$$

이다. 각 변을 k제곱하고 $\frac{1}{t}$를 곱하면

$$0<\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k\frac{1}{t}\le\frac{\sin^k t}{t^{k+1}}\le\frac{1}{t}$$

이다. 따라서 정적분과 곡선 및 x축 사이의 넓이의 관계를 이용하면

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt=\int_x^{3x}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k\frac{1}{t}dt\le\int_x^{3x}\frac{\sin^k t}{t^{k+1}}dt\le\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt$$

이다. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k=1$이고 $\lim\limits_{x\to 0+}\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt=\ln 3$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^{3x}\frac{(f(t))^k}{t}dt=\lim_{x\to 0+}\int_x^{3x}\frac{\sin^k t}{t^{k+1}}dt=\ln 3$$

이다.

37번 문항 해설

[1]

함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \{3(\pi+\cos t)^2 + a(\pi+\cos t)+b\}\,dt \\ &= \int_0^x \{3\cos^2 t + (6\pi+a)\cos t + 3\pi^2+\pi a+b\}\,dt \\ &= \int_0^x \left\{3\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right) + (6\pi+a)\cos t + 3\pi^2+\pi a+b\right\}dt \\ &= \int_0^x \left\{\frac{3}{2}\cos 2t + (6\pi+a)\cos t + 3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right\}dt \\ &= \left[\frac{3}{4}\sin 2t + (6\pi+a)\sin t + \left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)t\right]_0^x \\ &= \frac{3}{4}\sin 2x + (6\pi+a)\sin x + \left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)x \end{aligned}$$

한편, $3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2} \neq 0$이면 함수 $h(x)$의 그래프는 주기를 가지면서 직선 $y=\left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)x$에 의해 증가 형태 또는 감소 형태이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체에서 최솟값을 갖지 않는다. 따라서 $3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}=0$이고 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x) = \frac{3}{4}\sin 2x + (6\pi+a)\sin x$$

사인함수의 성질에 의해

$$\begin{aligned} h(x+2\pi) &= \frac{3}{4}\sin(2x+4\pi) + (6\pi+a)\sin(x+2\pi) \\ &= \frac{3}{4}\sin 2x + (6\pi+a)\sin x = h(x) \end{aligned}$$

이므로 $h(x)$는 주기함수이다.

[2]

함수 $h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x + (6\pi+a)\sin x$는 미분가능하고, $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최솟값을 가지므로 $h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$이다.

$$h'(x) = \frac{3}{2}\cos 2x + (6\pi+a)\cos x$$

이고,

$$h'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(6\pi + a) = -3\pi - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}a = 0$$

이므로 $a = -6\pi - \frac{3}{2}$ 이다.

$3\pi^2 + \pi\left(-6\pi - \frac{3}{2}\right) + b + \frac{3}{2} = 0$ 이므로 $b = 3\pi^2 + \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}$ 이다.

또한, $h'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = f\left(g\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = f\left(\pi - \frac{1}{2}\right) = 0$ 이므로 $f(x) = 0$ 은 $\pi - \frac{1}{2}$ 을 근으로 갖는다.

한편, $f(x) = 3x^2 + ax + b$ 이므로 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면, 이때 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = -\frac{a}{3} = 2\pi + \frac{1}{2}, \ \alpha\beta = \frac{b}{3} = \pi^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

이고,

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(2\pi + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\pi^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

이다. 따라서 $|\alpha - \beta| = \frac{3}{2}$ 이다.

38번 문항 (2021 서울과학기술대학교 논술기출)

[1]

$x=1$, $y=-1$ 을 제시문 (다)에 대입하면

$$f(0)=\frac{f(1)+f(-1)}{1+7f(1)f(-1)}$$

이다. 제시문 (가)와 (나)의 조건을 이용하면

$$0=\frac{\alpha+f(-1)}{1+7\alpha f(-1)}$$

이므로 $f(-1)=-\alpha$ 이다.

[2]

$y=-x$ 라 하면

$$0=f(0)=f(x+(-x))=\frac{f(x)+f(-x)}{1+7f(x)f(-x)}$$

이므로 $f(-x)=-f(x)$ 이고, f 는 기함수(원점 대칭)이다. 따라서 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$ 이다.

[3]

제시문 (다)의 조건을 도함수의 정의에 적용하면

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1+7f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}$$

이고, 정리하면

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\times\frac{1-7\{f(x)\}^2}{1+7f(x)f(\Delta x)}\right]$$

이다. 그런데 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=f'(0)$ 이고 $f(x)$ 는 연속이므로 $\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$ 이다. 따라서

$$f'(x)=f'(0)\times[-7\{f(x)\}^2+1]$$

이므로 $A=-7$, $B=0$, $C=1$ 이다.

[4]

$$f(2)=f(1+1)=\frac{f(1)+f(1)}{1+7f(1)f(1)}=\frac{2\alpha}{1+7\alpha^2}$$

이다. [3]의 결과에서 $\{f(x)\}^2=\frac{1}{7}\{1-f'(x)\}$ 이므로

$$\int_0^2(1+7\alpha^2)\{f(x)\}^2dx=\frac{1+7\alpha^2}{7}\int_0^2\{1-f'(x)\}dx$$

$$=\frac{1+7\alpha^2}{7}[x-f(x)]_0^2=\frac{1+7\alpha^2}{7}\{2-f(2)\}$$

이다. 그런데 $f(2)=\frac{2\alpha}{1+7\alpha^2}$ 이므로

$$\int_0^2(1+7\alpha^2)\{f(x)\}^2dx=\frac{1+7\alpha^2}{7}\left\{2-\frac{2\alpha}{1+7\alpha^2}\right\}=2\alpha^2-\frac{2}{7}\alpha+\frac{2}{7}$$

이다.

39번 문항 해설

[1]

주어진 식에 $b=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$g\left(a+\frac{1}{2}\right)+g\left(a-\frac{1}{2}\right)=2g(a)\cos\frac{\pi}{2}=0$

$g\left(a+\frac{1}{2}\right)=-g\left(a-\frac{1}{2}\right)$

a에 $a+\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $g(a+1)=-g(a)$

$g(a+2)=-g(a+1)=g(a)$

따라서 $g(0)=g(2)=\cdots=g(2020)=1$

주어진 식에 $a=0, b=x$를 대입하면 $g(x)+g(-x)=2g(0)\cos\pi x=2\cos\pi x$

위 식을 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$에서 적분하면,

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(-x)dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos\pi x dx=\frac{4}{\pi}$

$-x=t$로 치환적분법을 이용하면 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(-x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$

따라서 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx=\frac{2}{\pi}$ 가 된다.

[2]

$a=0, b=x$를 대입하면

$g(x)+g(-x)=2\cos\pi x$ ⋯ ①

$a=x+\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$g(x+1)+g(x)=0$ ⋯ ②

$a=\frac{1}{2}, b=x+\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$g(x+1)+g(-x)=2g\left(\frac{1}{2}\right)\cos\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\pi x$ ⋯ ③

①과 ②을 더한 식에 ③을 빼면

$g(x)=\cos\pi x+g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\pi x$

x에 각각 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$을 대입하면

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \frac{1}{10}$$

따라서, $\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \frac{1}{5}$ 이다.

40번 문항 해설

[1]

제시문 (가)의 미분과 적분과의 관계를 이용하면

$$g'(x)=\frac{f(x)+xf'(x)}{2}-f(x)=\frac{-f(x)+xf'(x)}{2}$$

이다. 그러므로 $g''(x)=\frac{xf''(x)}{2}$ 이다.

[2]

$x>0$ 이면 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \le \frac{f(x)}{2}$ 이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \le \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0) \le 0$ 이다.

$x<0$ 이면 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \ge \frac{f(x)}{2}$ 이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \ge \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0) \ge 0$ 이다.

따라서 $f(0)=0$ 이다.

[3]

$f(0)=0$ 이므로 $q=0$ 이다. 그러므로

$$f'(x)=\{x^2+(p+2)x+p\}e^x,\ f''(x)=\{x^2+(p+4)x+2p+2\}e^x$$

이다.

만약 $f''(0)<0$ 이면 0 을 포함하는 어떤 구간 (a,b) 에서 $f''(x)<0$ 이다.

(3-1), (3-2)의 결과에 의해 $g(0)=g'(0)=0$ 이고 구간 $(0,b)$ 에서 $g''(x)<0$ 이므로 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0,b)$ 에서 $g(x)<0$ 이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

만약 $f''(0)>0$ 이면 0 을 포함하는 어떤 구간 (a,b) 에서 $f''(x)>0$ 이다.

(1), (2)의 결과에 의해 $g(0)=g'(0)=0$ 이고 구간 $(a,0)$ 에서 $g''(x)<0$ 이므로 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0,b)$ 에서 $g(x)<0$ 이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

따라서 $f''(0)=0$ 이고 $p=-1$ 이다.

위에서 구한 $f(x)=(x^2-x)e^x$ 는 $f''(x)=(x^2+3x)e^x$ 을 만족한다.
그러므로 $g''(x)=\frac{1}{2}(x^3+3x^2)e^x$ 이고 $g'(x)=\frac{1}{2}x^3e^x$ 이다.
따라서 $x>0$ 일 때 $g'(x)>0$ 이고 $x<0$ 일 때 $g'(x)<0$ 이므로 $g(x) \geq g(0)=0$ 이다.
따라서 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족한다.

(다른 풀이) 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 $-g(x)$ 에 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0, \infty)$ 에서 $-g(x)<0$ 이다. $x<0$ 일 때 원점과 점 $(x, f(x))$ 를 잇는 선분은 $y=f(x)$ 의 그래프의 아래쪽에 있다. 즉, $x \leq t \leq 0$ 일 때 $f(t) \geq \frac{f(x)}{x}t$ 이다. 그러므로

$$\int_x^0 f(t)dt > \int_x^0 \frac{f(x)}{x}t\,dt = -\frac{xf(x)}{2}$$

이다. 즉, $x<0$ 일 때 $g(x)>0$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족한다.

41번 문항 해설

[1] $u(t)=C+\int_0^t f(s)g(s)ds$ 의 양변을 t 에 대해 미분하면 $u'(t)=f(t)g(t)$

$u'(t)=f(t)g(t)$ 에 $f(x)\le C+\int_0^x f(s)g(s)ds$ 를 적용하면 $u'(t)=f(t)g(t)\le u(t)g(t)$

[2] $f(x)\le u(x)$ 이므로 $u(x)\le Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 임을 보이면 된다. 여기서 $h(x)=\dfrac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}}$ 라 하자.

양변을 미분하면 $h'(x)=\dfrac{u'(x)e^{\int_0^x g(s)ds}-u(x)e^{\int_0^x g(s)ds}g(x)}{\left(e^{\int_0^x g(s)ds}\right)^2}$ 이다.

[1]에 의해 $e^{\int_0^x g(s)ds}\{u'(x)-u(x)g(x)\}\le 0$ 이다.

또한, $h(0)=u(0)=C$이므로 $h(x)\le C$ 즉, $\dfrac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}}\le C$이므로 $u(x)\le Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 이고,

$f(x)\le Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 가 성립한다.

42번 문항 해설

[1]

함수 $f(x)$가 일대일 대응일 때 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하므로 함수 $f(x)$가 일대일 대응일 조건을 구한다. 구간 $[0,1)$, $[2,\infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 구간 $[1,2)$에서 증가하면 모든 구간에서 증가한다.

구간 $[1,2)$에서 $m<1$이면 $m-1<0$이므로 함수 $f(x)$가 감소하고, $m=1$이면 함수 $f(x)=2-m=1$이고 상수함수가 되어 증가하지 않는다. $m>1$이면 $m-1>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. 결국, $m>1$이면 함수 $f(x)$는 모든 구간에서 증가하므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\infty)$의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이고 일대일 함수이다.

또한 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\infty)$에서 연속이고 증가하므로 치역과 공역이 모두 구간 $[0,\infty)$이고 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하기 위한 실수 m의 범위는 $m>1$이다.

[2]

제시문 [나]에서 주어진 공식을 사용하자. 우선 $f(x)=9m$을 만족하는 x 값을 찾아야 한다. $m>1$임으로 $9m>9$가 되고 이 구간에서 함수 $f(x)$는

$x^3-6x^2+12x+m-8=(x-2)^3+m$으로 표시할 수 있다. 따라서 $f(x)=9m$을 만족하는

x값은 $2+2m^{\frac{1}{3}}$이 된다. 그러므로

$$(f^{-1})'(9m)=\frac{1}{f'\left(2+2m^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{1}{12m^{\frac{2}{3}}}$$

을 얻는다.

[3]

제시문으로부터 문제의 적분값은 $\left(2+2m^{\frac{1}{3}}\right)\times(9m)-\int_0^{2+2m^{\frac{1}{3}}} f(x)\,dx$가 됨을 알 수 있다.

두 번째 항의 적분을 세 구간으로 나누어 계산하면

$$\int_0^1 x\,dx+\int_1^2((m-1)x+2-m)\,dx+\int_2^{2+2m^{\frac{1}{3}}}\left((x-2)^3+m\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)+\int_0^{2m^{\frac{1}{3}}}(x^3+m)\,dx=\frac{m}{2}+1+6m^{\frac{4}{3}}$$

이 되고, 따라서 최종 결과는 $\left(2+2m^{\frac{1}{3}}\right)\times(9m)-\left(6m^{\frac{4}{3}}+\frac{m}{2}+1\right)=12m^{\frac{4}{3}}+\frac{35}{2}m-1$이다.

[4]

$f'(x)$가 $x\neq 1$, $x\neq 2$인 모든 점에서 존재하고 연속임은 자명하다. $f'(x)$의 $x=1$ 그리고 $x=2$에서 좌극한과 우극한을 생각해보자.

$$\lim_{x\to 1-} f'(x)=1,\ \lim_{x\to 1+} f'(x)=m-1,\ \lim_{x\to 2-} f'(x)=m-1,\ \lim_{x\to 2+} f'(x)=0$$

임을 알 수 있다. 한편 $f(1)=1$, $f(2)=m$이기 때문에 제시문 [나]로부터

$$\lim_{x\to 1-} (f^{-1})'(x)=1,\ \lim_{x\to 1+} (f^{-1})'(x)=\frac{1}{m-1},$$

$$\lim_{x\to m-} (f^{-1})'(x)=\frac{1}{m-1},\ \lim_{x\to m+} (f^{-1})'(x)=\infty$$

임을 알 수 있다. 따라서 $[0,c]$의 구간 내에서 $c<m$임으로 일반적인 $m>1$에 대하여 $x=1$에서만 $(f^{-1})'(1)$이 존재하지 않는다. 그런데 $g(x)$의 정의에 따라 $x\neq 1$인 경우, $(f^{-1})'(x)$가 존재하고 연속이기 때문에 $g(x)$는 연속이고, $x=1$에서는

$$g(1)=\frac{1}{m-1},\ \lim_{x\to 1-} g(x)=1,\ \lim_{x\to 1+} g(x)=\frac{1}{m-1}$$

이기 때문에 $g(x)$는 $x=1$에서만 일반적인 $m>1$에 대하여 불연속이 된다. 따라서 $h(x)=(x-\alpha)g(x)$는 $x\neq 1$인 경우 연속이 된다. 이제 $x=1$인 경우를 살펴보면

$$h(1)=(1-\alpha)\frac{1}{m-1} \text{ 이고 } \lim_{x\to 1-} h(x)=1-\alpha,\ \lim_{x\to 1+} h(x)=\frac{1-\alpha}{m-1}$$

이기 때문에 $x=1$에서의 연속조건

$$h(1)=\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1+} h(x)$$

가 만족되려면 $m>1$이기 때문에 $\alpha=1$이 되어야 한다.

43번 문항 해설

[1]

주어진 조건에 의하여

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{3}{x+3}$$

이다. 제시문 (가)를 이용하여

$$\ln|f'(x)| = \int \frac{f''(x)}{f'(x)}\,dx = \ln|x+3|^3 + C_1$$

이다. 따라서

$$|f'(x)| = e^{\ln|f'(x)|} = e^{C_1}|x+3|^3$$

이다. $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = f'(x) = e^{C_1}(x+3)^3$$

이다. 양변의 계수를 비교하면 $a = 12,\ b = 54$이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{9}$$

이다.

[2]

[1]의 결과로부터

$$f(x) = \int 4(x+3)^3\,dx = (x+3)^4 + C_2$$

이다. 따라서 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3} = 15\times 3^3$이고 주어진 식으로부터

$$15\times 3^4 = f(3) - f(0) = 3f'(\alpha) = (\alpha+3)f''(\alpha) = 12(\alpha+3)^3$$

이다. 따라서 $\alpha = 3\left(\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} - 1\right)$이다.

[3]

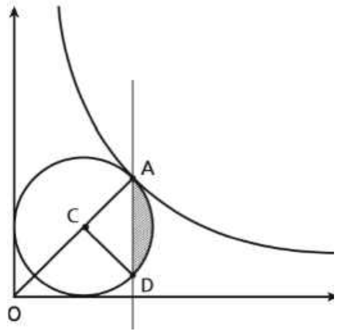
$f(x) = (x+3)^4 + C_2$이고 $\left(\sin\left(\dfrac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{x+3}{2}\right)\right)^2 = 1 - \sin(x+3)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-2}\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x)\,dx &= \int_{-4}^{-2}(1-\sin(x+3))\left((x+3)^4 + C_2\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}(1-\sin t)\left(t^4 + C_2\right)dt \\ &= \frac{2}{5} + 2C_2\end{aligned}$$

이다. 조건으로부터 $f(-3) = C_2 = -\dfrac{1}{5}$이다.

44번 문항 해설

[1]



$p=1$이면, 그림에서와 같이 원이 $y=\dfrac{1}{x}$과 $(1,1)$에서 접하고, x축과 y축에 동시에 접한다. 원의 반지름을 r이라고 하면, $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}r$이고, $\overline{\mathrm{CA}}=r$이므로, $\sqrt{2}r+r=\sqrt{2}$를 만족하기 때문에 $r=2-\sqrt{2}$이다.
한편, 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선을 그렸을 때, 원과 만나는 점을 D라고 하자.
그러면, 구하려는 부분의 넓이는 부채꼴 CAD의 넓이에서 삼각형 ACD의 넓이를 빼면 된다. $\angle\mathrm{ACD}$는 $\dfrac{\pi}{2}$, 반지름은 $2-\sqrt{2}$인 부채꼴 CDA의 넓이는 $\dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}(3-2\sqrt{2})$이고, $\angle\mathrm{ACD}$는 $\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CD}}=2-\sqrt{2}$인 삼각형 ACD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{2}$이다. 따라서 구하려는 부분의 넓이는 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)(3-2\sqrt{2})$이다.

[2]

접점 $\mathrm{A}=\left(p,\dfrac{1}{p}\right)$와 원의 중심 $\mathrm{C}(a,b)$에 대하여, 점 A, C를 지나는 직선과 점 A에서의 접선의 수직이다. 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{p^2}$이므로, 선분 AC의 기울기는 p^2이다. 따라서 원의 중심의 좌표 (a,b)는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{b-\frac{1}{p}}{a-p}=p^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

원이 y축에 접하므로 원의 반지름이 a이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=a$이므로, 다음 식을 만족한다.

$$(a-p)^2+\left(b-\frac{1}{p}\right)^2=a^2 \quad \cdots\cdots (2)$$

(1)과 (2)로부터,

$$(1+p^4)(a-p)^2=a^2 \quad \cdots\cdots (3)$$

이다. (3)으로부터 $\sqrt{1+p^4}\,(a-p)=a$ 또는 $\sqrt{1+p^4}\,(a-p)=-a$이다.
$a=\dfrac{p\sqrt{1+p^4}}{\sqrt{1+p^4}-1}$ 또는 $a=\dfrac{p\sqrt{1+p^4}}{\sqrt{1+p^4}+1}$에서, $a<p$이므로, $a=\dfrac{p\sqrt{1+p^4}}{\sqrt{1+p^4}+1}$이다. 이를

(1)에 대입하면, $b=p^2(a-p)+\frac{1}{p}=p^2\left(\frac{p\sqrt{1+p^4}}{\sqrt{1+p^4}+1}-p\right)+\frac{1}{p}=\frac{2-\sqrt{1+p^4}}{p}$ 이다.

따라서 $f(p)=\frac{p\sqrt{1+p^4}}{\sqrt{1+p^4}+1}$ 이고, $g(p)=\frac{2-\sqrt{1+p^4}}{p}$ 이다.

[3] 대학발표 예시답안

[2]에서 $h(p)=f(p)g(p)=\frac{\sqrt{1+p^4}\left(2-\sqrt{1+p^4}\right)}{\sqrt{1+p^4}+1}$ 이다. 이때, $t=\sqrt{1+p^4}$ 라 하면 $h(p)=\frac{t(2-t)}{t+1}$ 이고 이를 $H(t)$ 라 하자. 합성함수의 미분법에 의해서

$$h'(p)=H'(t)\times\frac{2p^3}{\sqrt{1+p^4}}$$

이고,

$$H'(t)=\left(\frac{t(2-t)}{t}\right)'=-\frac{(t^2+2t-2)}{(t+1)^2}$$

$0<p<1$ 이므로, $1<t<\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $t^2+2t-2=(t+1)^2-3>0$ 이므로, $h'(p)<0$ 이 되어 $h(p)$ 가 $0<p<1$ 에서 감소한다.

(2) p 에 대한 함수 $\frac{\sqrt{1+p^4}\left(2-\sqrt{1+p^4}\right)}{\sqrt{1+p^4}+1}$ 는 모든 실수에서 연속이므로,

$$\lim_{p\to0+}h(p)=\lim_{p\to0+}\frac{\sqrt{1+p^4}\left(2-\sqrt{1+p^4}\right)}{\sqrt{1+p^4}+1}=\frac{1\times(2-1)}{1+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 $p=0$ 에서의 $h(p)$ 의 우극한이 존재하고, 우극한은 $\frac{1}{2}$ 이다.

[4] 대학발표 예시답안

A와 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$과 C$'$ 이라고 하자. 그러면, 구하는 도형의 넓이는 $\int_{f(p)}^{p}\frac{1}{x}\,dx$ 에서 사다리꼴 ACC$'$A$'$ 의 넓이를 빼면 된다.

사다리꼴 ACC$'$A$'$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{CC'}}+\overline{\mathrm{AA'}})\times\overline{\mathrm{C'A'}}=\frac{1}{2}\left(g(p)+\frac{1}{p}\right)\times(p-f(p))$ 이다.

따라서

$$S(p)=\ln\frac{p}{f(p)}-\frac{1}{2}\left(pg(p)-f(p)g(p)+1-\frac{f(p)}{p}\right)$$

논제 [2]에서 구한 $f(p)$ 와 $g(p)$ 의 식으로부터,

$$\lim_{p\to0+}\frac{f(p)}{p}=\lim_{p\to0+}\frac{\sqrt{1+p^4}}{\sqrt{1+p^4}+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{p\to 0+} pg(p) = \lim_{p\to 0+}\left(2-\sqrt{1+p^4}\right)=1,$$

$$\lim_{p\to 0+} f(p)g(p)=\frac{1}{2}$$

이므로, $\lim_{p\to 0+} S(p) = \ln 2 - \frac{1}{2}$ 이 된다.

45번 문항 해설

[1] 함수 $f(x)=x+\ln(1-x)+\dfrac{x^2}{2(1-x)}$는 $f(0)=0$ 이고, $0\le x<1$ 에 대하여

$f'(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x)^2}\ge 0$ 이므로 $f(x)\ge 0$ 이다. 따라서 주어진 부등식을 얻는다.

[2] 점 C, D의 좌표는 각각 $(n,\ \ln n)$, $(n+1,\ \ln(n+1))$ 이다. 그리고 점 D에서의 $y=\ln x$ 에서의 접선은 $y=\dfrac{1}{n+1}(x-n-1)+\ln(n+1)$ 이므로, 점 E의 좌표는 $\left(n,\ -\dfrac{1}{n+1}+\ln(n+1)\right)$ 이다. 점들의 좌표로부터 사다리꼴의 넓이를 구하면

$$a_n=\frac{\ln n+\ln(n+1)}{2},\quad c_n=\ln(n+1)-\frac{1}{2(n+1)}$$

이다. 따라서 $c_n-a_n=\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ 이다.

[3] 문항 (1), (2)의 결과를 이용하면

$$c_n-a_n=\frac{1}{2}\left[-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\right]\le\frac{1}{4n(n+1)}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)\le\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)}<\frac{1}{4}$$

임을 알 수 있다.

[4] 문항 (3)의 결과를 이용하면 $n\ge 2$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1}b_k-\frac{1}{4}<\sum_{k=1}^{n-1}a_k<\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

임을 알 수 있다. 그리고

$$\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\ln2+\ln3+\cdots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\int_1^n\ln x\,dx=n\ln n-n+1$$

이므로

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{3}{4}<\ln2+\ln3+\cdots+\ln(n-1)+\ln n<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+1$$

이다. 따라서 $n\ge 2$에 대하여

$$\ln\left(e^{\frac{3}{4}} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\right) < \ln(n!) < \ln\left(e \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\right)$$

이고

$$e^{\frac{3}{4}} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} < n! < e \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

이 성립한다.

46번 문항 해설

$$\frac{3x^4+4x^3\ln x-4x^3-8x^2\ln x+3x^2+8x\ln x+4x+4}{x^2-2x+2}=\frac{3x^4-4x^3+3x^2+4x+4}{x^2-2x+2}+4x\ln x$$

이고

$$\frac{3x^4-4x^3+3x^2+4x+4}{x^2-2x+2}=3x^2+2x+1+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{4}{x^2-2x+2}$$

이다. 한편,

$$\int_1^2\left(3x^2+2x+1+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\right)dx=\left[x^3+x^2+x+\ln\left|x^2-2x+2\right|\right]_1^2=11+\ln 2$$

이고

$$\int_1^2\frac{4}{x^2-2x+2}\,dx=4\int_1^2\frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx=4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta=4\int_0^1 1\,d\theta=\pi$$

이며,

$$\int_1^2 4x\ln x\,dx=\left[2x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2 2x\,dx=8\ln 2-3$$

이다. 따라서

$$\int_1^2\frac{3x^4+4x^3\ln x-4x^3-8x^2\ln x+3x^2+8x\ln x+4x+4}{x^2-2x+2}\,dx=8+\pi+9\ln 2$$

이다.

47번 문항 해설

$$\int_{1-a}^{1+a} \frac{\cos a - \cos 1 \cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \cos a \int_{1-a}^{1+a} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \cos 1 \int_{1-a}^{1+a} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \cos a\,[-\cot x]_{1-a}^{1+a} - \cos 1\left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{1-a}^{1+a}$$

$$= -\cos a\{\cot(1+a) - \cot(1-a)\} - \cos 1\left\{\frac{1}{\sin(1-a)} - \frac{1}{\sin(1+a)}\right\}$$

이다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 계산하면

$$-\cos a\{\cot(1+a) - \cot(1-a)\} - \cos 1\left\{\frac{1}{\sin(1-a)} - \frac{1}{\sin(1+a)}\right\}$$

$$= -\cos a\left\{\frac{\cos(1+a)}{\sin(1+a)} - \frac{\cos(1-a)}{\sin(1-a)}\right\} - \cos 1\left\{\frac{1}{\sin(1-a)} - \frac{1}{\sin(1+a)}\right\}$$

$$= \frac{\cos 1 - \cos a\cos(1+a)}{\sin(1+a)} - \frac{\cos 1 - \cos a\cos(1-a)}{\sin(1-a)}$$

$$= \frac{\cos 1 - \cos a(\cos 1\cos a - \sin 1\sin a)}{\sin(1+a)} - \frac{\cos 1 - \cos a(\cos 1\cos a + \sin 1\sin a)}{\sin(1-a)}$$

$$= \frac{\cos 1(1-\cos^2 a) + \cos a\sin 1\sin a}{\sin(1+a)} - \frac{\cos 1(1-\cos^2 a) - \cos a\sin 1\sin a}{\sin(1-a)}$$

$$= \frac{\cos 1\sin^2 a + \cos a\sin 1\sin a}{\sin(1+a)} - \frac{\cos 1\sin^2 a - \cos a\sin 1\sin a}{\sin(1-a)}$$

$$= \frac{\sin a(\cos 1\sin a + \cos a\sin 1)}{\cos 1\sin a + \cos a\sin 1} - \frac{\sin a(\cos 1\sin a - \cos a\sin 1)}{\sin 1\cos a - \cos 1\sin a}$$

$$= 2\sin a$$

이다. 즉

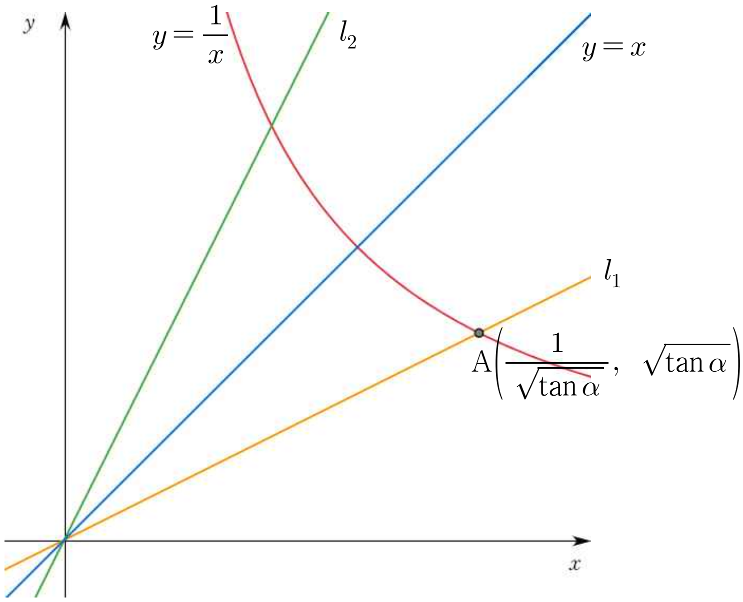
$$\int_{1-a}^{1+a} \frac{\cos a - \cos 1\cos x}{\sin^2 x}\,dx = 2\sin a = 2\sin f(a)$$

이고 $f(x)$는 $f(0)=0$인 다항식이므로 $f(x)=x$이다.

48번 문항 해설

직선 l_1과 x축이 이루는 각을 α라고 하자. (이때, $\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이다.)

직선 $y=(\tan\alpha)x$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$이 만나는 점 A는 $\left(\frac{1}{\sqrt{\tan\alpha}},\ \sqrt{\tan\alpha}\right)$이다.



$y=x$의 그래프 아래의 넓이는

$$\int_0^1 x\,dx+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{\tan\alpha}}}\frac{1}{x}dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\tan\alpha}}}(\tan\alpha)x\,dx=-\frac{1}{2}\ln(\tan\alpha)$$

이다. 따라서 영역의 전체 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=2\times\left\{-\frac{1}{2}\ln(\tan\alpha)\right\}=-\ln(\tan\alpha)=-\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

이다. 합성함수의 미분법을 이용하여 f의 도함수를 구하면

$$f'(\theta)=-\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{1}{\cos\theta}$$

이므로 $f'(\theta)=2$를 만족하는 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

49번 문항 해설

[1] 제시문 (나)의 (4)에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)(\sin x - \cos x)dx$$

그런데 $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)dx$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

[2] 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

이다. 우변의 첫 번째 정적분에서는 $\frac{\pi}{4} - x = y$로 치환하고, 두 번째 정적분에서는 $x - \frac{\pi}{4} = y$로 치환하여 계산하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\sin(-y)(-dy) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\sin y\, dy$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\sin y\, dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\sin y\, dy$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}\sin x\, dx$$

이다. 따라서 $\boxed{A} = \frac{\pi}{4} + x$, $\boxed{B} = \frac{\pi}{4} - x$ 이다.

[3] 문항 [1]과 [2]의 결과에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}\sin x\,dx$$

이다. 평균값 정리에 의하여 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2xf'(c)$

를 만족하는 $c\in\left(\frac{\pi}{4}-x,\ \frac{\pi}{4}+x\right)\subset\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$가 적어도 하나 존재한다. 또 제시문 (나)의 (3)에 의하여 $m\le f'(c)\le M$이다. 따라서 제시문 (가)에 의하여

$$\sqrt{2}\,m\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx\le \sqrt{2}\,M\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx$$

이제 부분적분법을 이용하여 계산하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx=\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

위의 식을 이용하여 최종적인 결과를 얻는다.

$$\left(1-\frac{\pi}{4}\right)m\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx\le\left(1-\frac{\pi}{4}\right)M$$

50번 문항 해설

[1]

π초가 경과한 시점에서 P의 위치는 다음의 적분값 $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$이다. 제시문 (가)에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(t)\,dt &= \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}\sin((k+2)t)\right)dt\\ &= \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k+2}\cos((k+2)t)\right]_0^{\pi}\\ &= -\sum_{k=1}^{100}\frac{(-1)^{k+2}-1}{k(k+2)}\end{aligned}$$

이다. 여기서 $(-1)^{k+2}-1$은 k가 홀수일 때 -2, k가 짝수일 때 0이므로, 제시문 (나)를 이용하면

$$\begin{aligned}-\sum_{k=1}^{100}\frac{(-1)^{k+2}-1}{k(k+2)} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}\end{aligned}$$

51번 문항 해설

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. 구간 $[-a, a]$를 $[-a, 0]$과 $[0, a]$로 나누어 각각 부분적분하면

$$\int_0^a (a-x)f'(x)\,dx = \Big[(a-x)f(x)\Big]_0^a + \int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0) - af(0)$$

$$\int_{-a}^0 (a+x)f'(x)\,dx = \Big[(a+x)f(x)\Big]_{-a}^0 - \int_{-a}^0 f(x)\,dx = F(-a) - F(0) + af(0)$$

를 얻는다. 이를 합하면 $\int_{-a}^a (a-|x|)f'(x)\,dx = F(a) + F(-a) - 2F(0)$이 되고, 따라서 주어진 조건에 의해 모든 $x \geq 0$에 대해 $F(x) = -F(-x) + 2F(0)$임을 알 수 있다. 여기서 양변을 x에 대해 미분하면 $f(x) = f(-x)$가 모든 $x > 0$에 대해 성립한다.
$x = 0$인 경우에는 당연히 $f(x) = f(-x)$이고, $x < 0$인 경우에도 대칭성에 의해 $f(x) = f(-(-x)) = f(-x)$임을 알 수 있다.
따라서 모든 x에 대해 $f(x) = f(-x)$가 성립한다.

(다른 풀이)

$$\int_{-a}^a (a-|x|)f'(x)\,dx = \int_{-a}^0 (a+x)f'(x)\,dx + \int_0^a (a-x)f'(x)\,dx$$

$$= \Big[(a+x)f(x)\Big]_{-a}^0 - \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \Big[(a-x)f(x)\Big]_0^a + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= af(0) - \int_{-a}^0 f(x)\,dx - af(0) + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

따라서 임의의 양수 a에 대해 $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$이 성립하므로 양변을 a에 대해 미분하면 $-f(-a) \times (-1) = f(a)$, $f(-a) = f(a)$이다.

즉, 양의 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다. …… ①

$x = 0$이면 ①이 성립한다.

음의 실수 x에 대하여 ①에서 $f(-(-x)) = f((-x))$이고 $f(x) = f(-x)$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(-x)$이다.

52번 문항 해설

자연수 k에 대해 닫힌구간 $[k, k+1]$을 생각하자. $y=f(x)$를 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $\left(k+1, \dfrac{1}{k+1}\right)$에서의 접선이라 하고, $y=g(x)$를 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 두 점 $\left(k, \dfrac{1}{k}\right)$과 $\left(k+1, \dfrac{1}{k+1}\right)$을 지나는 직선이라 하자. 그러면

$$f(x)=-\frac{1}{(k+1)^2}\{x-(k+1)\}+\frac{1}{k+1},\ g(x)=-\frac{1}{k(k+1)}(x-k)+\frac{1}{k}$$

이다. 이때 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 $\dfrac{1}{x}-f(x)=\dfrac{(x-k-1)^2}{x(k+1)^2}\geq 0$이고

$g(x)-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{(x-k)(x-k-1)}{xk(k+1)}\geq 0$이다.

즉, 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 $f(x)\leq\dfrac{1}{x}\leq g(x)$이므로

$$\int_k^{k+1} f(x)dx\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\leq\int_k^{k+1} g(x)dx$$

이다. 이때

$$\int_k^{k+1} f(x)dx=\int_k^{k+1}\left[-\frac{1}{(k+1)^2}\{x-(k+1)\}+\frac{1}{k+1}\right]dx=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}$$

$$\int_k^{k+1} g(x)dx=\int_k^{k+1}\left\{-\frac{1}{k(k+1)}(x-k)+\frac{1}{k}\right\}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\ln(k+1)-\ln k$$

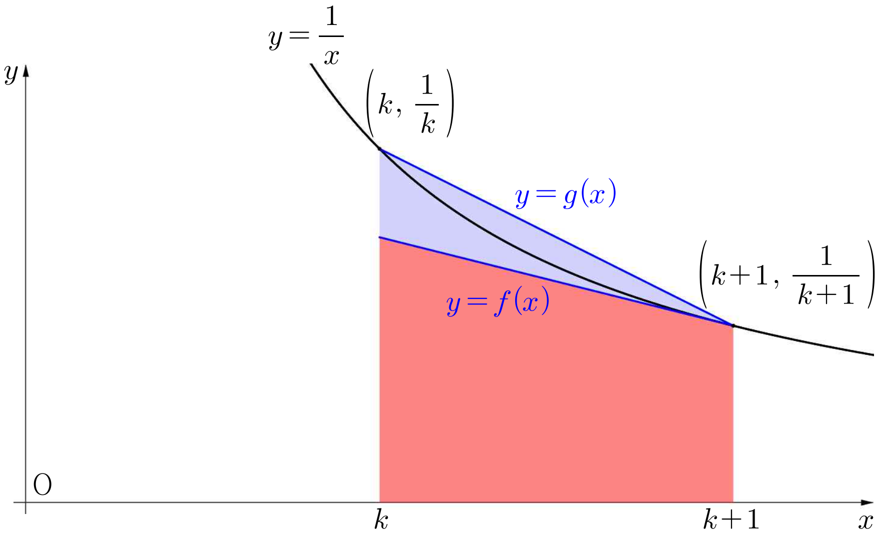
이므로

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\leq\ln(k+1)-\ln k\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

이다. 위의 부등식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\}\leq\ln(n+1)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

이 성립한다.



$y=\dfrac{1}{x}$
y
$\left(k,\ \dfrac{1}{k}\right)$
$y=g(x)$
$\left(k+1,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$
$y=f(x)$
O
k
$k+1$
x

53번 문항 해설

[1]

곡선 위의 점 $(t, \cos(\ln t))$에서 접선의 방정식은 $y-\sin(\ln t)=\dfrac{\cos(\ln t)}{t}(x-t)$이다. 원점을 지나므로 $(x, y)=(0, 0)$을 대입하면 $\sin(\ln t)=\cos(\ln t)$가 된다. $t\geq 1$이므로 $\ln t\geq 0$이고 $\ln t=\dfrac{\pi}{4},\ \pi+\dfrac{\pi}{4},\ 2\pi+\dfrac{\pi}{4},\ \cdots$ 이다. 따라서 $a_n=e^{\pi(n-1)+\frac{\pi}{4}}$이다. 등식 $\dfrac{1}{\left(n-\frac{3}{4}\right)\left(n+\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{1}{n-\frac{3}{4}}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{4}}$을 이용하면 구하는 값은 아래와 같다.

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(\ln a_n)(\ln a_{n+1})}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n-\frac{3}{4}}-\frac{1}{n+\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{\pi^2}\left(4-\frac{4}{41}\right)=\frac{160}{41\pi^2}$$

[2]

$\alpha\leq 0$일 때, $2e^{3x}-3\alpha e^{2x}+8\geq 8$이므로 x축과 만나지 않는다. $\dfrac{dy}{dx}=6e^{2x}\left(e^x-\alpha\right)$이므로 $\alpha>0$인 경우에 $e^x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다. x축과 한점에서 만나기 위하여 $e^x=\alpha$를 함수에 대입하면 $2\alpha^3-3\alpha^3+8=0$이 되어야 한다. 따라서, $\alpha_0=2$일 때 x축과 한점에서 만나고 $x_0=\ln\alpha_0=\ln 2$이다. 주어진 정적분의 값은 아래와 같다.

$$\int_0^{x_0}\left(2e^{3x}-3\alpha_0 e^{2x}+8\right)dx=\left[\frac{2}{3}e^{3x}-\frac{3\alpha_0}{2}e^{2x}+8x\right]_0^{x_0}=8\ln 2-\frac{13}{3}$$

54번 문항 해설

$g(x)=xe^{-x}$ 에 대하여 $g(0)=0$, $g(1)=e^{-1}$ 이고 열린구간 $(0,1)$ 에 속한 임의의 x 에 대하여 $g'(x)=(1-x)e^{-x}>0$ 이므로 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0,1]$ 에서 증가함수가 되어 $g:[0,1]\rightarrow\left[0,\frac{1}{e}\right]$ 는 일대일대응이다. 따라서 제시문 [나]에 의하여 g 의 역함수 $g^{-1}:\left[0,\frac{1}{e}\right]\rightarrow[0,1]$ 가 존재하며, $g^{-1}(x)=xe^{g^{-1}(x)}$ 를 만족한다.

한편, 함수 $f:\left[0,\frac{1}{e}\right]\rightarrow[0,1]$ 가 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x)=xe^{f(x)}$, 즉 $\frac{f(x)}{e^{f(x)}}=x$ 이고, $g(x)=xe^{-x}$ 에서 $g(f(x))=f(x)e^{-f(x)}=\frac{f(x)}{e^{f(x)}}=x$ 이다. $(g\circ f)(x)=x$ 를 만족하므로 $f(x)=g^{-1}(x)$ 이다. 그러므로 함수 f 의 역함수가 존재하며 $f^{-1}(x)=g(x)=xe^{-x}$ 이다.

따라서 $\int_0^{\frac{1}{e}}f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$ 는 두 변의 길이가 1, $\frac{1}{e}$ 인 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_0^{\frac{1}{e}}f(x)dx=\frac{1}{e}-\int_0^1 xe^{-x}dx=\frac{1}{e}-\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx\right)=\frac{1}{e}-\left(1-\frac{2}{e}\right)=\frac{3}{e}-1$$

이다.