SEOL:NAME

[수학1] 스킬 정리노트

이건 제발 하지 마

① 미지수 3개 이상으로 두고 문제 풀이
(특히, 지수함수/로그함수 좌표 관련된 문제)

② 그래프 안 그리고 '대충 이거겠지' 하고 넘어가는 습관

③ [수학1]은 특히 개수 구하고 그런 문제가 많아서 **검산은 필수적!** 검산 안 하고 넘기면 등짝스매싱 ^^

④ 특히 실수 쉬운 거 : $x^2 = n$이면 $x = \pm\sqrt{n}$이다.
($+\sqrt{n}$ 만 생각하면 안 됩니다^^)

⑤ 실력이 안 되는 상태에서 15, 22, 30번까지 풀려고 집착하지 않기! 3~4등급 라인은 아직 13번까지만 풀려고 시도해봤어도 충분! (단, 수열이 강하고 도형이 약하다면 오히려 13번을 빼고 15번을 푸는 전략도 있다.)

⑥ 실제 시험에서는 그럴 수 있지만, 모의고사 풀 때는 **선지에 있는 답 하나씩 대입해보면서 맞는 거 고른다음** "나 풀었음 ㅇㅇ" 시전하지 않기

이건 제발 좀 해줘

① 삼각함수의 그래프는 **주기성, 대칭성** 활용하기

② 도형 문제에서는 **길이/각도** 표시해주기

③ 수열 문제 한 번씩은 나열해주기

④ 도형 문제에서 어떤 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 등에 대한 식이면 각각 45°, 60° 의심하기!!

⑤ **강력한 조건**부터 문제 조건 해석해나가기!

⑥ 모든 x에 대해 성립하는 부등식은 **최댓값/최솟값**에서만 성립함을 보이면 됨.

⑦ 등식이나 부등식에서 한쪽 변에 0이 나오면 **'부호'**와 관련해서 꼭 고려해보기

01 지수함수와 로그함수

- 의외로 자주 쓰이는 공식

지수/로그 관련 식 변형 문제에서는

$$\frac{\log b}{\log a} = \log_a b$$

이 매우 자주 쓰인다.

[공식 응용]

(i) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$

(ii) $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \times \log_a b$

- 로그의 분석

① 로그가 여러 개 나오면 가능한 밑을 통일시킨다.
② 로그가 곱셈으로 붙어있으면 한 번쯤 떨어뜨리고, 로그가 덧셈으로 연결되어 있으면 한 번쯤 붙여보자.

| 예제 | $\log_2|x-2| + \log_4(x+2)^2 = 2$를 풀어라.

| 풀이 |

$\log_2|x-2| + \log_2|x+2| = 2$

$\log_2|x^2-4| = 2$

$|x^2-4| = 4 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm 2\sqrt{2}$

※ Comment : $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{2}$ 일 때 모두 위의 두 로그가 정의되므로 해이다.

- 지수함수의 그래프 분석

① $y = a^x$ 의 그래프를 그릴 때는 $a > 1$인지, $a < 1$인지를 **정확하게 알고** 출발해야 한다. 모르고 출발하면 나중에 낭패를 보기 쉽다.
② 최근의 트렌드는 **교점의 개수**이다. 그래프에서 점근선과 관련하여 교점의 개수를 묻는 문제가 자주 출제되니 유의하자.

- 로그 문제에서의 가장 큰 실수

진수 조건을 안 쓰면 그대로 나락간다.

| 예제 | $\log_2 x^2 < 3$인 정수 x의 개수는?

| 풀이 | $x^2 > 0$이고(진수 조건), $x^2 < 8$이므로
$x = -2,\ -1,\ 1,\ 2$로 4개

- 거듭제곱근의 개수

n이 짝수일 때 :

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는

$a>0$이면 2개, $a=0$이면 1개, $a<0$이면 0개

n이 홀수일 때 :

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 무조건 1개

- 로그함수와 지수함수의 점근선

① 로그함수

넣었을 때 로그의 진수가 0이 되는 게 점근선이다.

| 예제 | $y=\log_2(x-3)+1$의 점근선은 $x=3$이다.

| 풀이 | $x=3$일 때 $x-3=0$이기 때문이다.

② 지수함수

∞ 또는 $-\infty$를 넣었을 때 수렴하는 값이 점근선이다.

| 예제 | $y=3^{x-2}+1$의 점근선은 $y=1$이다.

| 풀이 | x에 $-\infty$를 넣었을 때 $3^{x-2}\to 0$이므로 y는 1로 수렴한다.

- a의 n제곱근 중 정수가 존재할 조건

자연수 a가 그냥 "몇"제곱수 등에 따라 달라진다.

$a=k^m$라고 하자. (즉, k가 m제곱수, m은 자연수)

a의 n제곱근, 즉, $k^{\frac{m}{n}}$이 정수여야 하므로,

$\frac{m}{n}$을 기약분수로 나타냈을 때 $\frac{m'}{n'}$이면

k는 n'제곱수여야 한다.

| 예제 | 정수 x에 대하여 x^3의 6제곱근 중 정수가 존재하려면?

| 풀이 | $x^{\frac{3}{6}}=x^{\frac{1}{2}}$가 정수여야 하므로 x는 제곱수

꿀팁 전수 어떤 식의 값이 정수이면 그 식의 값을 N이라 두고 정리하는 것도 좋은 선택!

- 로그함수와 지수함수의 대칭성

로그와 지수는 일종의 역함수 관계이기 때문에 대칭성을 가진다. → 로그함수와 지수함수가 동시에 있으면 대칭성은 특히나 굉장히 자주 활용된다.

- 로그와 지수 혼합형 문제의 기본 해법

① 대부분은 로그를 지수로 바꿔서 풀어주면 풀린다. (진수 조건 생각할 일도 없고 보통 편하다)

② 미지수는 웬만하면 주어진 조건을 직접 활용할 수 있는 곳에 잡는다.

| 예제 | 곡선 $y=\log_2(x-2)+1$ 위의 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점이 $y=4^{x+1}+2$ 위에 있을 때, A의 좌표는?

| 풀이 | $\mathrm{A}(a,\ b)$라 하면 $b=\log_2(a-2)+1$

로그는 지수 형태로 생각하는 게 편하다.

$2^{b-1}=a-2$이므로 $a=2^{b-1}+2$ ⋯ ㉠

점 A를 $y=x$에 대해 대칭이동시킨 점은 $(b,\ a)$이다.

이 점이 곡선 $y=4^{x+1}+2$ 위에 있으므로

$a=4^{b+1}+2$ ⋯ ㉡

㉠ = ㉡라 두면 $2^b=X$라 할 때,

$4X^2-\frac{1}{2}X=0$이므로, $X=\frac{1}{8}$이고,

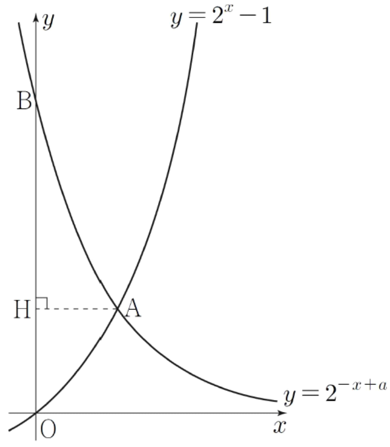
$b=-3$, $a=\frac{33}{16}$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{33}{16},\ -3\right)$이다.

- 로그함수 또는 지수함수 여러 개의 교점

로그나 지수 자체를 덩어리처럼 생각하고 접근하면 편하다. 즉, x의 자체를 구하기보다는 $\log_a x$나 a^x 등의 값을 구한다는 느낌으로 접근해보자.

| 예제 | $\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$일 때, a의 값은?



| 풀이 | ① 미지수는 주어진 조건을 직접 활용할 곳에 잡는다.
$\mathrm{H}(0, k)$라 잡으면, $\mathrm{B}(0, 3k)$이고,
이는 $y=2^{-x+a}$의 y절편이므로
$3k=2^{a}$
② A의 y좌표가 $k\ (k>0)$이므로
x좌표를 α라 두고 비교하면 된다.
$2^{\alpha}-1=2^{-\alpha+a}=k$ ← 지수를 덩어리로 생각
인데, $2^{-\alpha+a}=2^{-\alpha}\times 3k=k$이므로
$\alpha=\log_2 3$
$\Rightarrow\ k=2^{\alpha}-1=2^{\log_2 3}-1=2$
$\Rightarrow\ a=\log_2 3k=\log_2 6$

- 지수로그와 교점의 개수

로그함수와 지수함수의 핵심은 **점근선**이다.
① 지수함수와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수는 t가 지수함수의 점근선일 때를 기준으로 바뀌고,
② 로그함수와 직선 $x=t$가 만나는 점의 개수는 t가 로그함수의 점근선일 때를 기준으로 바뀐다.

꿀팁 전수

최근의 트렌드는 이러한 점근선을 활용하는 문제이다.
대칭성을 활용한 문제가 사설에 너무 고일 정도로 많이 나오다 보니 평가원에서도 새로운 방식을 택하는 듯 하다.
특히, 지수/로그함수를 구간으로 나누어진 함수를 이용해 출제가 자주 되고 있다.

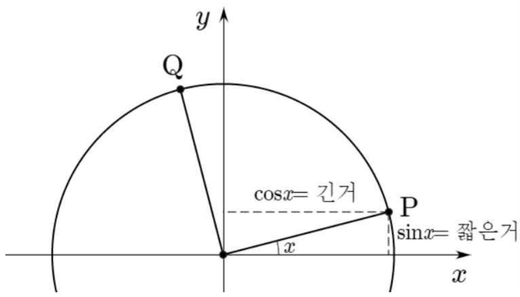
02 삼각함수

- 삼각함수의 성질 암기 방법

꿀팁 전수 공식을 따로 외우지 말고 단위원을 그리는 것이 가장 빠르다. 단위원 위에 적당히 작은 각 x를 표시해두고 각도의 변화에 따라 좌표 분석

기본 개념

단위원에서 $\cos$은 x좌표, $\sin$은 y좌표, $\tan$은 기울기이다.



| 예시 |

위의 그림에서 점 Q는 P를 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 것

ex) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$는 점 Q의 x좌표인데, 음수이고 짧은 거니까 $-\sin x$이다.

ex) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$는 점 Q의 y좌표인데, 양수이고 긴 거니까 $\cos x$이다.

- 삼각함수와 식 변형

기본 개념 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

꿀팁 전수 보통은 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$로 생각하는 게 편함

- 삼각함수 그래프의 기본 스킬

기본 개념

① sin, cos의 그래프는 최대점/최소점을 기준으로 대칭이라는 점을 기억해두자.
② $\sin(ax)$, $\cos(ax)$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$,
$\tan(ax)$의 주기는 $\frac{\pi}{a}$
→ 그래프가 반복되는 횟수를 이용해 $\sin ax=k$ 등의 방정식의 해의 개수를 구할 수도 있다.

꿀팁 전수

① $\sin x$, $\cos x$는 $[-1, 1]$의 값만 가진다는 것을 놓치는 경우가 있다. 특히 합성함수에서는 정의역을 좁히는 역할을 할 수 있으니 꼭 기억해두자.

② **가능하면 표시할 수 있는 좌표는 전부 표시해보자.**

특히, 삼각함숫값이 $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 처럼 특수각과 관련되어 나오는 것은 높은 확률로 좌표를 직접 구할 수 있다.
만약 다른 값이라면 그래프의 주기성과 대칭성을 잘 활용해보자.

- 도형 문제에서의 삼각함수 활용

① 코사인법칙을 사용해야만 하는 상황

두 변의 길이와 한 각의 크기를 아는 경우
→ 나머지 한 변을 미지수로 잡고 코사인법칙을 쓴다.

② 사인법칙을 사용해야만 하는 상황

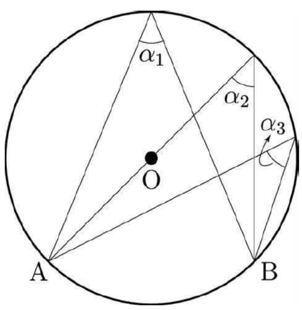
삼각함수값은 많이 알고 있는데, 막상 아는 변의 길이는 하나밖에 없는 상황
→ 사인법칙을 써서 나머지 변의 길이를 구한다. 코사인법칙보다 우선 순서이다. 가능하면 사인법칙 먼저 쓸 궁리하고 코사인법칙 쓰자. (코사인법칙은 식이 복잡)

③ 닮음과 직각, 원주각, 방멱

- 직각의 중요성

직각은 피타고라스의 정리를 사용하거나 넓이 등을 구함에 있어 매우 유용하다. 직각이 있으면 최대한 뽕을 뽑아보려 시도해보자.
특히, 원에서는 지름이 매우 중요한 역할을 한다.
이는 반지름의 길이는 항상 일정하다는 사실과 동시에 자주 쓰인다. 진짜 제발 기억하기.

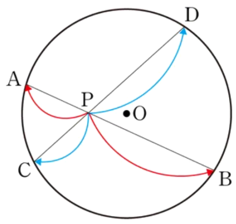
- 원주각



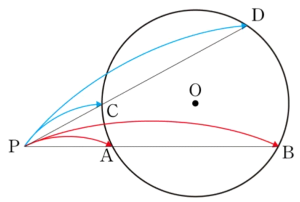
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

- 방멱 정리 (교과 외)

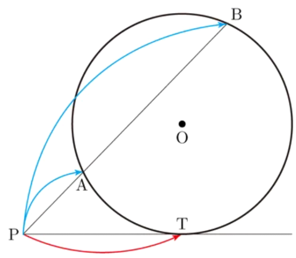
다음 공식들은 비록 교과에서는 빠졌지만 간접적으로 출제되는 성질들이다. 원주각과 닮음을 이용하면 충분히 증명할 수 있는 성질이므로 꼭 기억해두자.



$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$



$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$



$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

④ 같은 각, 같은 길이 표시 (닮음/합동 찾기)

이건 몇 번을 강조해도 좋은 게, 못 찾으면 그냥 문제가 안 풀리게 설정해둔다. ①~③을 통해 알게 된 정보를 통해 **같은 각도, 같은 길이는 무조건 표시를 별도로 해 주자. 제발. 제발.**

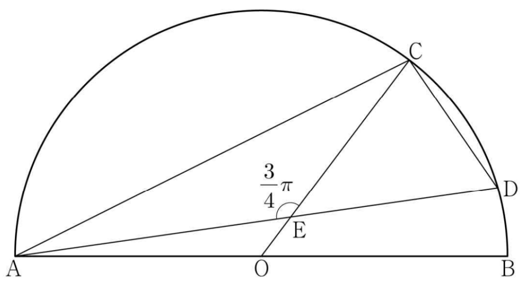
⑤ 보조선은 어디다 긋는가

보조선은 최후의 수단으로 사용해야 함을 잊지 말자.
비어보이는 곳, 아직 점과 점이 연결되지 않은 곳에 보조선을 그으면 대부분은 맞는다. 보조선을 그릴 때 너무 많은 선을 교차해서 지나가지 않는 곳에 우선적으로 그려보자. (단, 최소한의 정보라도 얻을 수 있는 곳에 그어야지 무턱대고 긋는 건 아니다.)

| 예제 | $\overline{AB}$ 는 지름, O 는 반원의 중심

$\overline{CE} = 4$, $\overline{ED} = 3\sqrt{2}$, $\angle CEA = \frac{3}{4}\pi$

$\overline{AC} \times \overline{CD}$ 의 값은?



| 풀이 |

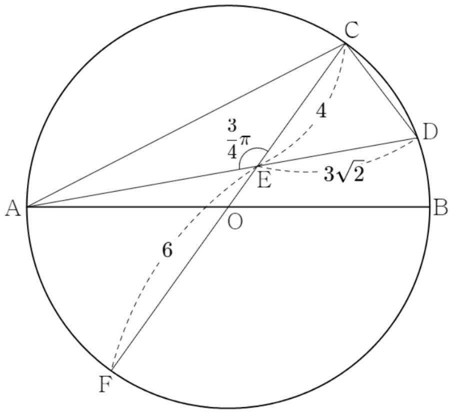
보이는 것만에서 구할 수 있는 길이를 전부 표시하면 코사인법칙 이용해 $\overline{\mathrm{CD}}$ 를 구할 수 있다.

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{10}$$

더 이상 구할 수 있는 게 없으므로 보조선을 긋자.
이 그림에서 아직 연결되지 않은 두 점은 O, D 이므로 이어보자.
$\overline{\mathrm{OE}}=r-4$, $\overline{\mathrm{OD}}=r$ 이므로 삼각형 OED 에서 코사인법칙을 사용하자.

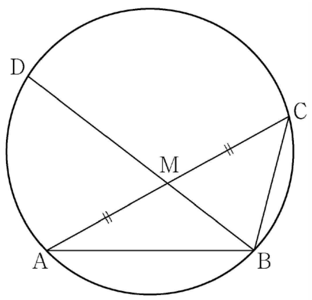
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OD}}^2&=r^2\\&=(r-4)^2+18-2\times(r-4)\times3\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=r^2-2r+10\end{aligned}$$

이므로 방정식 $r^2=r^2-2r+10$ 을 풀면 $r=5$



위의 그림처럼 원의 나머지 부분을 그리고 $\overline{\mathrm{EO}}$ 를 연장하면 방멱 정리를 쓸 수 있다.
$4\times6=3\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{AE}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=4\sqrt{2}$
$\triangle\mathrm{ACE}$ 에서 코사인법칙을 쓰면 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{5}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=20\sqrt{2}$

| 예제 | 선분 AC 의 중점은 M 이다. $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}>3$, $\cos(\angle\mathrm{BAC})=\frac{7}{8}$ 일 때, 선분 MD 의 길이는?



| 풀이 |

삼각형 ABC 에서 두 변의 길이와 한 각에 대한 정보가 나왔으므로 코사인법칙 사용.

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=4=\overline{\mathrm{AC}}^2+3^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times3\times\frac{7}{8}$$

$\overline{\mathrm{AC}}=x\ (x>3)$ 라 하면

$$x^2-\frac{21}{4}x+5=0\ \Rightarrow\ (x-4)\left(x-\frac{5}{4}\right)=0$$

곧, $x=4\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MC}}=2$
코사인법칙 한 번 더 쓰면

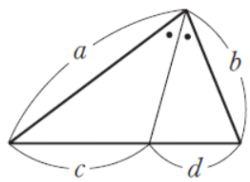
$$\overline{\mathrm{MB}}=\sqrt{2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{7}{8}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

방멱 정리에 의해 $\overline{\mathrm{MD}}\times\sqrt{\frac{5}{2}}=2\times2$ 이므로

$$\overline{\mathrm{MD}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

- 각의 이등분선 정리

표시된 두 각의 크기가 같을 때, 다음이 성립한다.



$a:b=c:d$

- 내심, 외심, 무게중심

다음 사실들을 통해 특정 점이 삼각형의 내심, 외심, 무게중심인지 판단할 수 있다. 출제자의 의도에 따라 이를 노리지 않을 수도 있으니 참조로만 기억해두자.

① **각의 이등분선**과 관련된 조건들이 나오면 내심을 의심해보자.

② 변의 수직이등분선과 관련된 조건이나 이등변삼각형이 나오면 **외심**을 의심해보자.

③ 어떤 점이 선분을 2 : 1 로 내분하거나, 삼각형의 한 변에서 중점을 잡는 등의 행동이 있으면 **무게중심**을 의심해보자.

- 그 외에 자주 사용되는 도형 스킬

① 평행선에서의 **엇각이 같다**는 스킬은 정말 빌어먹을 정도로 자주 사용된다.

② **원주각이 같으면 호와 현의 길이가 같다**는 스킬은 기출에 나왔을 정도로 정말 많이 사용된다.

③ **등변사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 이등변삼각형** 등과 관련하여 도형의 성질을 이용하는 문제가 잘 출제된다. 각각의 도형의 정의와 특징은 기억해두자.

⑤ 도형의 **닮음과 합동**을 이용하는 문제가 자주 출제된다. 앞에서 **각과 길이를 표시**해두라는 것도 이러한 이유에서이다.

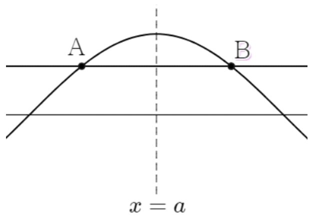
⑥ 이 글에는 ④번이 없다는 사실을 잘 알아둬야 한다.

- 삼각함수의 그래프와 대칭성

삼각함수의 그래프 문제는 대칭성이 정말 자주 활용된다. 자주 나오는 대칭성은 다음과 같다.

① 최대/최솟값 대칭

사인함수나 코사인함수는 최댓값, 최솟값을 기준으로 선대칭성을 가진다.

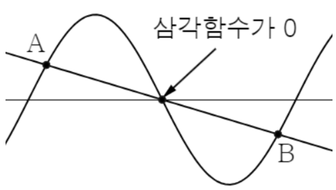


ex) 사인함수나 코사인함수의 그래프가 위와 같이 $x=a$에서 최댓값을 가지면 점 A, B도 마찬가지로 $x=a$에 대하여 대칭이다.

꿀팁 전수 어떤 두 점 A, B가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이면 $x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}=2a$이다.
(x_{A}, x_{B}는 A, B의 x좌표이다.)

② 영점 대칭

말그대로 삼각함수의 값이 0이 되는 지점에서 생기는 대칭성을 말한다. 이 점에서 삼각함수는 점대칭성을 가진다.



ex) 사인함수나 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프가 일차함수와 위와 같이 만날 때, 점 A, B는 삼각함수가 0이 되는 점에 대하여 대칭이다.

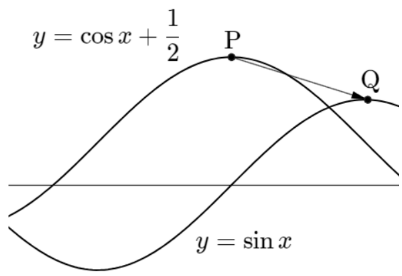
꿀팁 전수 어떤 두 점 A, B가 점 (p, q)에 대하여 대칭이면 $x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}=2p$, $y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}=2q$이다.

꿀팁 전수

최근 기출에서는 삼각함수의 대칭성을 일차함수나 도형의 특징과 관련하여 연계시키는 방향으로 많이 출제되었으나, 앞으로 **구간에 따라 나뉜 삼각함수, 절댓값+삼각함수** 등의 소재도 충분히 출제 가능하다.

- 사인함수와 코사인함수의 관계

주기와 진폭이 같은 한,
사인함수와 코사인함수는 서로 평행이동한 관계이다.



평행이동을 얼마나 한 것인지는 **특정한 한 점**이 얼마나 평행이동했는지를 살펴보면 된다.

ex) 위의 경우 $y=\cos x+\frac{1}{2}$ 위에 최댓값을 갖는 점 P가 있고, $y=\sin x$ 위에 최댓값을 갖는 점 Q가 있다고 하면 점 P가 Q로 옮겨진 평행이동은 결국 $y=\cos x+\frac{1}{2}$을 $y=\sin x$로 옮기는 평행이동과 같다.

- 삼각함수의 그래프의 주기성 **(앞에서도 언급했지만..)**

기본 개념 $\sin ax$, $\cos ax$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이다.

꿀팁 전수

외우는 것도 좋지만 단위원에서 동경이 다시 2π로 돌아오려면 $ax=2\pi$가 되어야 한다는 사실로 기억해두면 조금 더 인상이 잘 남는다.

기본 개념 $\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{a}$이다.

꿀팁 전수

마찬가지로 기울기가 똑같아지려면 동경이 π만큼 돌아가야 한다는 점으로 기억해두자.

03 수열

- 등차수열의 합을 구하는 빠른 방법

① 처음 항과 마지막 항을 알고 있다면
(두 항의 평균) × (항 개수)로 구한다. (많이 쓰임)

② 정중앙에 항이 존재한다면
(정중앙 항) × (항 개수)로도 구할 수 있다.

- 등차중항

너무 자주 쓰이는 거라 할 말이 없을 정도이다.

기본 개념

등차수열의 경우 m, n이 자연수일 때

$$a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$$

이 성립한다.

꿀팁 전수

① 이 정보는 등차수열의 어떤 항의 값이 0이라는 정보가 있을 때 유용하게 쓰인다. 수열이 그 점을 기점으로 부호가 바뀐다는 것을 의미하기 때문이다.

② $|a_m| = |a_n|$일 때도 매우 유용하게 쓰이는 정보이다. 공차가 0이 아닌 이상 $a_m = -a_n$이므로 등차중항이 0이 된다는 의미이기 때문이다.

Cf. 예를 들어, $a_2 = -a_5$이면 등차중항은 $a_{3.5} = 0$
여기서 $a_{3.5}$란 a_3과 a_4의 평균값이라 생각하면 편하다. (ex. $a_3 = 2$, $a_4 = 3$이면 $a_{3.5} = 2.5$)
다만, 이러한 $\times .5$항은 가급적 등차수열에서만 사용하자.

| 예제 | $a_1 = -45$, 공차 d인 등차수열 $\{a_n\}$이

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$

모든 자연수 d의 합은?

| 풀이 | $a_m = -a_{m+3}$이므로 등차중항 성질에 의해
$a_{m+1.5} = 0$이다.

즉, $a_{m+1} = -\dfrac{d}{2}$, $a_{m+2} = \dfrac{d}{2}$이고,

조건 (나)에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 최솟값이 -100보다 크다.

a_{m+1}까지 $a_n < 0$이므로 최솟값은

$n = m+1$일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k$이다.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = a_{m+1} + \cdots + a_1$$
$$= \left(-\frac{d}{2}\right) + \left(-\frac{3d}{2}\right) + \cdots + \left\{-\frac{(2m+1)d}{2}\right\}$$
$$= -\frac{(m+1)^2 d}{2} > -100 \quad \cdots ㉠$$

첫째항이 -45이므로

$$-\frac{(2m+1)d}{2} = -45 \quad \Rightarrow \quad (2m+1)d = 90$$

$2m+1$이 3 이상의 홀수이므로
$d = 10, 18, 30$이 가능.
이 중 $d = 10$일 때만 ㉠을 만족하지 않는다.
따라서 $d = 18, 30$이므로 $18 + 30 = 48$

- 등비중항

기본 개념

등비수열의 경우는 m, n이 자연수일 때

$$a_m \times a_n = \left(a_{\frac{m+n}{2}}\right)^2$$

이 성립한다.

| 예제 | $a_3 = 1$, $a_9 = 9$인 등비수열에서 a_6은?

| 풀이 | $a_3 \times a_9 = (a_6)^2$이므로 $a_6 = \pm 3$

- 수열의 합과 일반항의 관계

S_n이 주어져 있으면 a_n을 구할 수 있다.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

참조 ① S_n이랑 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$는 같은 것 / ② $S_1 = a_1$

꿀팁 전수

가끔 S_{2n}에 대한 식이 주어지는 경우가 있다.
이때는 S_{2n-1}을 구할 수는 없기 때문에

$$S_{2n} - S_{2n-2} = a_{2n} + a_{2n-1}$$

으로 정보를 얻는 것이 최선이다.

- 귀납적으로 정의된 수열의 분석

① 순방향으로 분석하거나, 거꾸로 분석하거나 둘 중 하나이다. 적절한 것을 택하자.

(Tip : 일반적으로 문제에서 구하는 값의 반대 방향으로 분석하는 것이 맞다. 예를 들어, a_1을 구하는 거면 a_k부터 역방향으로 분석하는 것이다.)

② 도저히 이 수열이 뭔지 모르겠으면 일단 나열해보는 것이 가장 좋은 방법이다.
(나열을 해야 방정식을 세우든 뭘 하든 하니까)

③ 반복성 확인은 무조건 해야 한다.

| 예제 | a_1이 자연수일 때,

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \ge 0) \\ a_n+5 & (a_n<0) \end{cases}$$

$a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은?

| 풀이 |

a_1이 자연수이고, $a_n \ge 0$에서는 계속 2씩 빠지므로 언젠가 $a_n=0$ 또는 $a_n=1$인 지점을 지날 수 밖에 없다.

$a_n=0$이면 :

$0 \to -2 \to 3 \to 1 \to -1 \to 4 \to 2 \to 0$ 반복

$a_n=1$이면 :

$1 \to -1 \to 4 \to 2 \to 0 \to -2 \to 3 \to 1$ 반복

a_1이 최솟값을 가지려면 가능한 이 반복 구간이 많이 나와야 한다.

반복주기가 7이며, a_1부터 a_{15}까지 반복 구간이 2번 있으면 $a_1=a_8=a_{15}<0$이므로 a_1이 자연수라는 사실에 모순.

따라서 반복 구간은 최대 1번만 존재한다.

즉, a_1은 -1부터 4까지의 정숫값은 가질 수 없다.

(ⅰ) $a_n=0$일 때 :

$a_{15}=-2$이고, 반복 구간이 한 번 있으면 $a_1=5$에서 최소.

(ⅱ) $a_n=1$일 때 :

$a_{15}=-2$일 때, 반복 구간이 한 번 있으면 $a_1=5$에서 최소.

따라서 두 경우 모두 a_1의 최솟값은 5이다.

꿀팁 전수 $a_n \ge 0$, $a_n<0$으로 범위가 나누어진 수열은 일반적으로 특정 주기마다 어떤 성질이 반복되는 수열일 가능성이 높다.

- 거듭제곱의 합 공식

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

꿀팁 전수 연속된 홀수의 합은 제곱수이다.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

- 등차수열의 합 공식

괜한 공식 외우지 말고 원리로 기억하자.

$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots,\ a_1+(n-1)d$

까지 중에

a_1은 n번 나오고

d는 $1++\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$ 번 나온다.

따라서

$$S_n=na_1+\frac{(n-1)n}{2}d$$

이다.

- 수열의 합과 부분분수분해

분수 형태의 수열의 합을 구하는 데에는 사실 **부분분수분해**만한 게 없다.

분모가 이차식이거나, 괄호로 묶여져 있으면 무조건 의심해보아야 한다.

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

- 등차수열과 절댓값

등차수열을 어렵게 만드는 요소는 사실 절댓값이 90%를 차지한다.
절댓값과 등차수열이 융합되었을 때 주어진 식으로부터 확인해야 할 요소는 다음과 같다.

① 처음으로 부호가 바뀌는 항은 어디인가?

| 예제 | 공차가 2이고, 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 \times a_6 < 0$일 때, a_8의 값은?

| 풀이 | a_5와 a_6의 부호가 다르려면 $a_5 = -1$, $a_6 = 1$인 경우만 가능하다. ($\because$ 모든 항 정수)
따라서 $a_8 = a_6 + 4 = 5$이다.

② 공차나 특정 항에 대한 정보가 주어져있는가?

| 예제 | 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{n=1}^{15} a_n = 30$, $|a_4| = 2$일 때, a_1의 값은?

| 풀이 | $\sum_{n=1}^{15} a_n = a_8 \times 15 = 30$이므로 $a_8 = 2$이다.
이때, $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로
$a_4 \neq 2$이다. 따라서 $a_4 = -2$이고, $d = 1$
곧, $a_1 = a_8 - 7 = -5$이다.

꿀팁 전수 등차수열에서 시그마는 하나의 항에 대한 정보를 그대로 줄 수 있는 핵심 조건이다.

(정중앙 항) × (항 개수)

공식을 까먹지 말자!

③ 특별한 규칙이 파생되지는 않는가?

다음과 같은 등차수열들은 핵심 경계 대상이다.
흔히, 사차함수의 **'특수 개형'**처럼 등차수열의 **'특정 패턴'**으로 기억해두면 좋다.

③-1. 등차수열 중에 '0'이 나오는 수열

③-2. 공차 d에 대하여

$$\cdots,\ -\frac{3d}{2},\ -\frac{d}{2},\ \frac{d}{2},\ \frac{3d}{2},\ \cdots$$

의 패턴으로 진행되는 수열이 있다.
원하는 수열이 이러한 패턴을 가지지는 않는지 한 번쯤 의심해보면 좋은 성과를 얻을지도 모른다.