수능 특강

[정답과 해설]

수학1

수학2

미적분

정답과 해설 미적분

141

정답 ①

$f(n)=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n+1}-\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\{f(n)-f(n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{f(1)-f(n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+1}-\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

142

정답 ③

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)=1$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{(2n+1)a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{1}{n}}=\frac{1+0}{2\times1+0}=\frac{1}{2}$$

143

정답 ②

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{a_n}=3$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{a_n}{n^2}}=3 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4}{a_n(6a_n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\frac{a_n}{n^2}\times\left(\frac{6a_n}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{4}{\frac{1}{3}\times\frac{6}{3}}=6$$

144

정답 ④

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{an-1}{3n}=3$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an-1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{1}{n}}{3}=\frac{a}{3}=3 \qquad \therefore a=9$$

한편, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{18}{n}}-1\right)=b$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{18}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+18n}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{18n}{\sqrt{n^2+18n}+n}$$
$$=9$$

이므로 $b=9$ 이고 $a+b=18$ 이다.

145

정답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$a_n=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+2}+3}{4^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times(-2)^n+3}{-2\times(-2)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{-2}=-2$$

146

정답 ③

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^{-3n+1}}{a^{3n+1}+a^{-3n-2}}=\frac{1}{8}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^{-3n+1}}{a^{3n+1}+a^{-3n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}$$

(ⅰ) $0<a<1$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^{3n-2}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}=a^3=\frac{1}{8}$$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $a=1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}=\frac{1+1}{1+1}=1\neq\frac{1}{8}$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a>1$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^{-3n-2}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}=\frac{1}{a^3}=\frac{1}{8}$$

$\therefore a=2$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은 $\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

147

정답 ②

$9\times6^n=2^n\times3^{n+2}$에서 약수의 개수는 $(n+1)(n+3)$ 이므로

$a_n=(n+1)(n+3)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

미적분

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

148

정답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3 \qquad \cdots ㉠$$

또한

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-3)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)=5 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_nS_n-3na_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)$$
$$=3\times5=15$$

149

정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하고 $a_1=a$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{9}{10}$ 이므로 $-1<r<1$ 이어야 한다.

이때 $a_2=-1$ 이므로 $ar=-1$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{10},\ 10a=9-9r$$
$$10ar=9r-9r^2$$
$$9r^2-9r-10=0$$
$$(3r+2)(3r-5)=0 \qquad \therefore r=-\frac{2}{3}\ (\because\ -1<r<1)$$
$$\therefore a_1=a_2\times\frac{1}{r}=(-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

150

정답 ①

서로 다른 세 수 $3a+1$, $a+1$, 1이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항에 의하여

$$(a+1)^2=3a+1$$
$$a^2+2a+1=3a+1$$
$$a^2-a=0$$
$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=1$$

이때 $a=0$이면 세 수 $3a+1$, $a+1$, 1이 모두 같으므로 조건을 만족시키지 않는다.

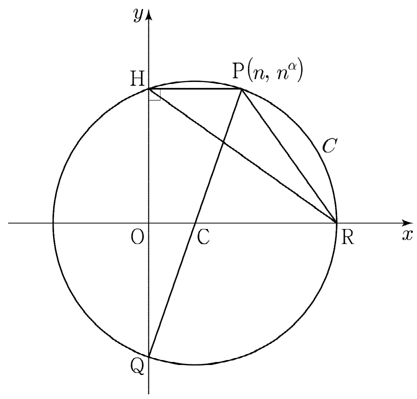
$$\therefore a=1$$

따라서 주어진 세 수는 4, 2, 1이므로 $r=\frac{1}{2}$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^n(1-r^n)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

151

정답 ③



$\angle HRP=\angle HQP$ 이므로 사각형 PRQH는 외접원 C를 가진다.

이때 $\angle PHQ=\frac{\pi}{2}$ 이므로 선분 PQ는 원 C의 지름이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}$ 이므로 원 C의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}$ 이다.

또한 선분 PQ의 중점을 C라 하면 $C\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ 이다.

즉, 원 C는 중심이 $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ 이고 반지름의 길이가

$\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}$ 이므로

점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}\right), 0\right)$ 이다.

$$\therefore f(n)=\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}\right)$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=k$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}}{2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\sqrt{\frac{1}{n^4}+4n^{2\alpha-6}}}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\sqrt{\frac{1+4n^{2\alpha-2}}{n^4}}}{2}$$
$$=0+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1+4n^{2\alpha-2}}{n^4}}\right)$$
$$=k$$

이때 k는 양수이므로

$$\alpha=3,\ k=1 \qquad \therefore k+\alpha=4$$

152

정답 ③

조건 (나)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{n^2+b_n}=3$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{n^2+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{b_n}{n^2}}=3$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{3}$$

조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_n)^2+9n^2(b_n)^2-n^2<6na_nb_n+2n+1$$

이므로

$$(a_n)^2-6na_nb_n+9n^2(b_n)^2<n^2+2n+1$$
$$(a_n-3nb_n)^2<(n+1)^2$$
$$3nb_n-n-1<a_n<3nb_n+n+1$$

$nb_n>0$ ($\because$ $b_n>0$)이므로 양변을 nb_n으로 나누면

$$3-\frac{n+1}{nb_n}<\frac{a_n}{nb_n}<3+\frac{n+1}{nb_n}$$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3\times\frac{b_n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{b_n}{n^2}}=0$이므로

극한의 대소 관계에 의하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{nb_n}=3$이다.

153

정답 ⑤

선분 OA_n은 x축 위에 있고 $\overline{\mathrm{OA}_n}=2n$이므로
삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 높이는 점 B_n의 y좌표와 같다.

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\times2n\times(3n-2)=n(3n-2)$$

한편, 사인법칙에 의하여

$$2R_n=\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{\sin(\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n)}$$

이때

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{(6n+1)^2+(3n-2)^2}=\sqrt{45n^2+5},$$
$$\sin(\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n)=\frac{3n-2}{\sqrt{(4n+1)^2+(3n-2)^2}}=\frac{3n-2}{\sqrt{25n^2-4n+5}}$$

이므로

$$2R_n=\sqrt{45n^2+5}\times\frac{\sqrt{25n^2-4n+5}}{3n-2}$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5S_n}{2n\times R_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n(3n-2)}{n\times\sqrt{45n^2+5}\times\frac{\sqrt{25n^2-4n+5}}{3n-2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5(3n-2)^2}{\sqrt{45n^2+5}\times\sqrt{25n^2-4n+5}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3-\frac{2}{n}\right)^2}{\sqrt{45+\frac{5}{n^2}}\times\sqrt{1-\frac{4}{25n}+\frac{1}{5n^2}}}$$
$$=\frac{9}{3\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

154

정답 ④

사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$은 평행한 두 변의 길이가 각각
$3^{n+1}+1-2^{n+1}$, 3^n+1-2^n이고, 높이가 1인 사다리꼴이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times(3^{n+1}+3^n-2^{n+1}-2^n+2)$$

한편 삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$은 밑변의 길이가 3^n-2^n+1, 높이가
n이므로

$$T_n=\frac{1}{2}\times n\times(3^n-2^n+1)$$

이고

$$T_{n+1}=\frac{1}{2}\times(n+1)\times(3^{n+1}-2^{n+1}+1)$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\times S_n}{T_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}\times(3^{n+1}+3^n-2^{n+1}-2^n+2)}{\frac{n+1}{2}\times(3^{n+1}-2^{n+1}+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^n-3\times2^n+2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times(3\times3^n-2\times2^n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{3^n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left\{3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^n}\right\}}$$
$$=\frac{4}{1\times3}=\frac{4}{3}$$

155

정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_n=1+(n-1)d=dn+1-d$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n}{a_n-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(d+1)n+1-d}{(d-2)n+1-d}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d+1+\frac{1-d}{n}}{d-2+\frac{1-d}{n}}=4$$

$$\frac{d+1}{d-2}=4\qquad\therefore\ d=3$$

따라서 $a_n=3n-2$이다.

또한 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{pn-4}{n+2}\right)=q$에서 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{pn-4}{n+2}\right)=0$$

한편,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{1}=3,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{pn-4}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{p-\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}}=p$$

이므로

$$3+p=0\qquad\therefore\ p=-3$$

$f(n)=\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{3n-2}{n}$라 하면 $\dfrac{3n+4}{n+2}=f(n+2)$이므로

미적분

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+4}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\{f(n)-f(n+2)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)\}$$
$$=1+2-\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n+2}\right)$$
$$=-3$$

따라서 $p=-3$, $q=-3$이고 $p\times q=9$이다.

156

정답 12

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n+1}=-\frac{1}{2}a_{2n-1}$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=\frac{a_{2n-1}+a_{2n+1}}{2}=\frac{a_{2n-1}-\frac{1}{2}a_{2n-1}}{2}=\frac{1}{4}a_{2n-1}$$

이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $\frac{a}{4}$이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$$
$$=\frac{a}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{a}{4}}{1+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2a}{3}+\frac{a}{6}$$
$$=\frac{5a}{6}=10$$

$\therefore\ a=12$

157

정답 ④

직선 $\mathrm{OA_1}$과 직선 $\mathrm{O_1A_2}$는 x축과 이루는 각의 크기가 같으므로 서로 평행하고

$$\angle \mathrm{A_1OA_2}=\angle \mathrm{OA_2O_1}=\frac{\pi}{4}$$

삼각형 $\mathrm{OO_1A_2}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OO_1}}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{\mathrm{O_1A_2}}}{\sin\frac{\pi}{6}},\ \overline{\mathrm{O_1A_2}}=\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

모든 자연수 n에 대하여 직선 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_{n+1}$과 직선 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$가 x축과 이루는 각의 크기가 같으므로 서로 평행하고

$$\angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{OA}_{n+2}=\angle \mathrm{O}_n\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{O}_{n+1}=\frac{\pi}{4}$$

또한 삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}}}{\sin\frac{\pi}{6}},\ \overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}$$

이고 $\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}}=\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}}$이므로

$$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_{n+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}$$

$a_1=\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$라 하고 $a_n=\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}$이라 하면

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이다.

따라서 점 O_n의 x좌표는

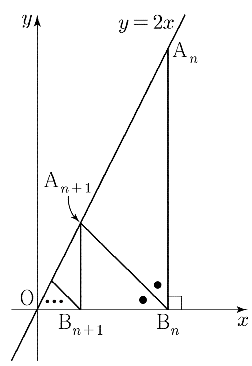
$$x_n=\overline{\mathrm{OO_1}}+\overline{\mathrm{O_1O_2}}+\overline{\mathrm{O_2O_3}}+\cdots+\overline{\mathrm{O}_{n-1}\mathrm{O}_n}$$
$$=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=2+\sqrt{2}$$

158

정답 ①



$\mathrm{B}_n(x_n, 0)$이고, $\angle \mathrm{OB}_n\mathrm{A}_{n+1}=\angle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}=\frac{\pi}{4}$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}:\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OB}_n}:\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$$

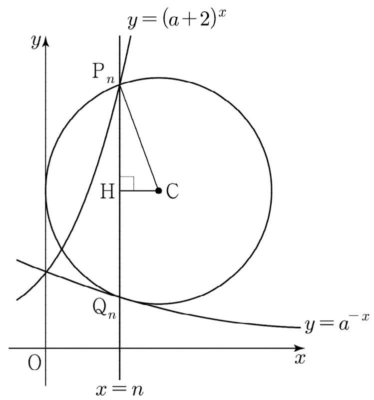
즉, 점 A_{n+1}은 선분 OA_n을 $1:2$로 내분하는 점이고 두 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$, $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$은 서로 닮음이므로 모든 자연수 n에 대하여

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n$$

이 성립한다. 따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 6, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\frac{6}{1-\frac{1}{3}}=9$$

159 정답 ②



두 점 P_n, Q_n을 모두 지나고 y축에 접하는 원의 중심을 C라 하고, 점 C에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P_n의 x좌표가 n이므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=r_n-n,\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}}=\frac{(a+2)^n-a^{-n}}{2}$$

따라서 피타고라스의 정리에 의하여

$$(r_n)^2=(r_n-n)^2+\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{4}$$

$$r_n=\frac{n}{2}+\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{8n}$$

이므로

$$n(2r_n-n)=\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{4}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n(2r_n-n)\times\frac{4^n}{7^{2n}+5^{2n}}\right\}=\frac{1}{4}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n(2r_n-n)\times\frac{4^n}{7^{2n}+5^{2n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2^{2n}}{4}\times\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{7^{2n}+5^{2n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{2a+4}{7}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{7a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{4a+8}{49a}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{7}\right)^{2n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

한편, $a>1$일 때 $0<\frac{2}{7a}<1$, $0<\frac{4a+8}{49a}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2a+4}{7}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{7a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{4a+8}{49a}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{7}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a+4}{7}\right)^{2n}$$

이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2a+4}{7}\right)^{2n}=1$이다.

따라서 $\frac{2a+4}{7}=1$이고 $a=\frac{3}{2}$이다.

160 정답 2

주어진 식 $a_{n+1}=a_2\times a_n$의 양변에 $n=1$을 대입하면

$$a_2=a_2\times a_1$$

에서 $a_2\neq 0$이므로 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공비가 $r=a_2$인 등비수열이다. 이때 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하려면 $-1<r<1$이어야 하고

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r}$로 수렴한다.

한편 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}=\frac{a_{n+1}}{1-r}=\frac{r^n}{1-r}$$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 $b_1=\frac{r}{1-r}$이고 공비가 r인 등비수열이다.

즉, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{r}{(1-r)^2}$로 수렴한다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=c$에서

$$\frac{1}{1-r}=\frac{r}{(1-r)^2}\qquad\therefore\ r=\frac{1}{2}\ (\because\ 0<|r|<1)$$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=2$이므로 $c=2$이다.

161 정답 21

등비수열 $\{b_n\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-\frac{1}{2}}=2b_1$$

조건 (가)에서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=-2b_1$$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(-1<r<1)$이라 하면

$$\frac{a_1}{1-r}+2b_1=0$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=-2(1-r)\qquad\cdots\ ㉠$$

조건 (나)에서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n}{b_n}=k$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n}{b_n}$이 수렴한다.

등비수열 $\left\{\frac{4a_n}{b_n}\right\}$의 공비는 $2r$이므로

$-1<2r<1$, 즉 $-\frac{1}{2}<r<\frac{1}{2}$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n}{b_n}=\frac{\frac{4a_1}{b_1}}{1-2r}=k$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{k(1-2r)}{4}\qquad\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$-2(1-r)=\frac{k(1-2r)}{4},\ k=\frac{8r-8}{1-2r}$$

$\frac{8r-8}{1-2r}=-4+\frac{2}{r-\frac{1}{2}}$ 에서 $-\frac{1}{2}<r<\frac{1}{2}$ 이므로 $k<-6$

따라서 정수 k의 최댓값 $M=-7$ 이다.

$k=M$ 일 때, $\frac{8r-8}{1-2r}=-7$, $8r-8=-7+14r$, $r=-\frac{1}{6}$

이다. ㉠에서 $3a_1+7b_1=0$ 이고, $a_1+b_1=-4$ 이므로

$a_1=-7$, $b_1=3$

$\therefore\ |a_1\times b_1|=21$

162

정답 ③

$f(x)=(x^2+4)\times\sin\frac{\pi x}{2}$ 에서

$$f'(x)=2x\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi(x^2+4)}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$$

이므로 $f'(2)=-4\pi$ 이다.

163

정답 ④

$f(x)=kx+4\cos x$ 에서

$f'(x)=k-4\sin x$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재해야 하므로

$-4<k<4$

따라서 정수 k의 값은 -3, -2, $\cdots$, 3 이므로 개수는 7이다.

164

정답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x-\cos^2 x+\cos^3 x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)-\cos^2 x(1-\cos x)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos x}{x^2}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

165

정답 9

$\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(a+2x)}{1-\cos x}=b$ 에서

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}\times\frac{\ln(a+2x)}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=b$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2\times\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(a+2x)}{x}$ 가 수렴하고 주어진 식은

$$\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(a+2x)}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(a+2x)}{x}\times2}{\frac{1}{2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\ln(a+2x)}{x}=b$$

이다.

$\lim_{x\to0}\frac{4\ln(a+2x)}{x}=b$ 에서 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to0}4\ln(a+2x)=0$ 에서

$\ln a=0 \qquad \therefore\ a=1$

또한 $b=\lim_{x\to0}\frac{4\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{8\ln(1+2x)}{2x}=8$ 이므로

$a+b=9$

166

정답 ②

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2$ 에서

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=2$

$f(x)=\sec x+\tan x$ 에서

$f'(x)=\sec x\tan x+\sec^2 x$

이고, 위의 식에 $x=a$를 대입하면

$f'(a)=\sec a\tan a+\sec^2 a=2$

위 식의 양변에 $\cos^2 a$를 곱하면

$\sin a+1=2\cos^2 a$

$2\sin^2 a+\sin a-1=0$

$(2\sin a-1)(\sin a+1)=0$

$\therefore\ \sin a=\frac{1}{2}$ ($\because\ 0<a<\frac{\pi}{2}$)

따라서 구하는 값은 $a=\frac{\pi}{6}$ 이다.

167

정답 ③

$\lim_{h\to0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-b}{h}=9$ 에서 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\left\{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-b\right\}=0$ 에서

$\sin^3\frac{\pi}{3}-b=0 \qquad \therefore\ b=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\lim_{h\to0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-\frac{3\sqrt{3}}{8}}{h}=9$ 에서 $f(x)=\sin^3 x$ 라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a\left\{f\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}}{ah}$$

$$=af'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

또한 $f'(x)=3\sin^2 x\cos x$ 이므로

$$af'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\times3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{9}{8}a=9$$

$\therefore\ a=8$

따라서 구하는 값은 $a\times b=8\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=3\sqrt{3}$ 이다.

168

정답 ①

$f(x)=x\sin\pi(e^x-1)$ 에서

$$f'(x)=\sin\pi(e^x-1)+\pi xe^x\cos\pi(e^x-1)$$

위의 식에 $x=\ln 2$ 를 대입하면

$$f'(\ln 2)=\sin\pi(e^{\ln 2}-1)+\pi(\ln 2)\times e^{\ln 2}\times\cos\pi(e^{\ln 2}-1)$$
$$=\sin\pi+2\pi(\ln 2)\cos\pi$$
$$=-2\pi\ln 2$$

169

정답 ②

$f(x)=e^x-\frac{4}{e^x}$ 에서

$$f'(x)=e^x+\frac{4}{e^x}$$

$g(a)=b$ 라 하면 $f(b)=a$ 이므로 $g'(a)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{1}{4}$ 이다.

이때 $f'(b)=e^b+\frac{4}{e^b}=4$ 에서

$$e^{2b}-4e^b+4=0$$
$$(e^b-2)^2=0$$
$$e^b=2 \qquad \therefore\ b=\ln 2$$

따라서 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\frac{4}{e^{\ln 2}}=0$ 이므로 $a=0$ 이다.

170

정답 ③

선분 AR 이 $\angle$QAP 의 이등분선이므로 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$ 이고

점 Q 의 좌표는 $(t, \ln(2t-1))$ 이므로

$$\overline{AQ}=\sqrt{(t-1)^2+\{\ln(2t-1)\}^2}$$

이때 $x=t-1$ 이라 하면 $t\to1+$ 일 때 $x\to0+$ 이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}=\lim_{t\to1+}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$$
$$=\lim_{t\to1+}\frac{\sqrt{(t-1)^2+\{\ln(2t-1)\}^2}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1+}\sqrt{1+\left\{\frac{\ln(2t-1)}{t-1}\right\}^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\sqrt{1+\left\{\frac{\ln(2x+1)}{x}\right\}^2}$$
$$=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$$

171

정답 2

세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(e^t-1,\ t),\ \mathrm{B}(e^{3t}-1,\ 3t),\ \mathrm{C}(e^{3t}-1,\ t)$$

이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$$
$$=\frac{1}{2}\times\{(e^{3t}-1)-(e^t-1)\}\times2t$$
$$=t\times\{(e^{3t}-1)-(e^t-1)\}$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t\times\{(e^{3t}-1)-(e^t-1)\}}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(e^{3t}-1)-(e^t-1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{e^{3t}-1}{t}-\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t}$$
$$=3-1=2$$

172

정답 ②

점 P 에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ 이라 하면

$y'=x$ 이고 접선의 기울기는 t 이므로 점 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2$$

이 직선이 $(a,\ -2)$ 를 지나므로

$$-2=t(a-t)+\frac{1}{2}t^2$$
$$t^2-2at-4=0$$

이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-4$$

이고

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4a^2+16}$$

두 직선 $l_1,\ l_2$ 의 기울기는 각각 $\alpha,\ \beta$ 이므로 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\tan\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right|=\frac{\sqrt{4a^2+16}}{3}$$

에서

$$\sqrt{4a^2+16}=3\sqrt{3} \qquad \therefore\ a=\frac{\sqrt{11}}{2}\ (\because\ a>0)$$

173

정답 8

$x\neq0$ 일 때 $f(x)=\frac{(a-2\cos x)^3}{(\tan x-\sin x)^2}$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{(a-2\cos x)^3}{(\tan x-\sin x)^2}$$

미적분

에서 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}(a-2\cos x)^3=0$ 에서 $a-2\cos 0=0$ $\quad\therefore\ a=2$

따라서

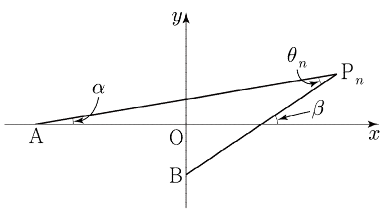
$$\begin{aligned}f(0)&=\lim_{x\to0}\frac{(2-2\cos x)^3}{(\tan x-\sin x)^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{8\times(1-\cos x)^3\times\cos^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{8\times\cos^2 x\times(1-\cos x)}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{8\times\cos^2 x\times\sin^2 x}{\sin^2 x\times(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{8\times\cos^2 x}{1+\cos x}\\&=\frac{8}{1+1}=4\end{aligned}$$

이므로 구하는 값은

$$a\times f(0)=2\times4=8$$

174

정답 ⑤



직선 AP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, 직선 BP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하자.

$$\tan\alpha=\frac{1}{n+3},\quad \tan\beta=\frac{2}{n}$$

이고 $\theta_n=\beta-\alpha$ 이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\tan\theta_n&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|\\&=\left|\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n+3}}{1+\frac{2}{n}\times\frac{1}{n+3}}\right|\\&=\frac{n+6}{(n+1)(n+2)}\quad(\because\ n\text{은 자연수})\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}\left(\tan\theta_n-\frac{1}{n+1}\right)&=\sum_{n=1}^{10}\left\{\frac{n+6}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+1}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{10}\frac{4}{(n+1)(n+2)}\\&=4\times\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=4\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

175

정답 6

$g(x)=e^{x^k}\sqrt{f(x)}$ 에서 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln g(x)=x^k+\frac{1}{2}\ln f(x)$$

이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=kx^{k-1}+\frac{f'(x)}{2f(x)}$$

$$\frac{g'(1)}{g(1)}=k+\frac{f'(1)}{2f(1)}$$

이고 양변에 $2g(1)f(1)$ 을 곱하면

$$2g'(1)f(1)=2kg(1)f(1)+f'(1)g(1)$$

이므로 상수 k의 값은 6이다.

176

정답 ①

두 점 $\mathrm{A}(a, 2a)$, $\mathrm{B}(b, 2b)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 두 실수 a, b는 방정식 $e^{2x}-5e^x+6=0$의 두 실근이다.

$$e^{2x}-5e^x+6=0$$
$$(e^x-2)(e^x-3)=0$$
$$e^x=2\ \text{또는}\ e^x=3$$
$$\therefore\ x=\ln2\ \text{또는}\ x=\ln3$$

즉, $a=\ln2$, $b=\ln3$ $(\because\ a<b)$

한편 $e^y-5e^x+6=0$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^y\frac{dy}{dx}-5e^x=0$$

$$\therefore\ y'=\frac{5e^x}{e^y}$$

위 식에 $x=\ln2$, $y=2\ln2$와 $x=\ln3$, $y=2\ln3$을 각각 대입하면 두 접선의 기울기는 각각 $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$이다.

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{5}{2}-\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}}\right|=\frac{5}{31}$$

177

정답 ③

시각 $t=a$에서 점 P가 y축 위에 있으므로 점 P의 x좌표는 0이다.

방정식 $\sin a+\cos a=0$에서 $0<a<\pi$이므로 $a=\frac{3}{4}\pi$

한편, $x=\sin t+\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=\cos t-\sin t$$

$y=2\cos t-\sin t$에서

$$\frac{dy}{dt}=-2\sin t-\cos t$$

시각 $t=a$에서의 점 P의 속도는

$$(\cos a-\sin a,\ -2\sin a-\cos a)=\left(-\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

따라서 점 P의 시각 $t=a$에서의 속력은

$$\sqrt{(-\sqrt{2})^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

178

정답 ②

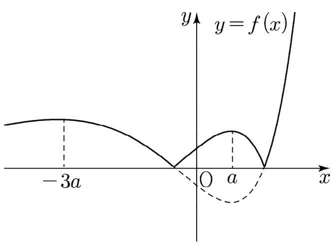
$g(x)=(x^2-3a^2)e^{\frac{x}{a}}$ 이라 하면

$$g'(x)=2xe^{\frac{x}{a}}+\frac{1}{a}(x^2-3a^2)e^{\frac{x}{a}}$$
$$=\frac{1}{a}(x^2+2ax-3a^2)e^{\frac{x}{a}}$$
$$=\frac{1}{a}(x+3a)(x-a)e^{\frac{x}{a}}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

한편, $e^{\frac{x}{a}}>0$ 이므로 $f(x)=|x^2-3a^2|e^{\frac{x}{a}}=|g(x)|$ 이고
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x=-3a$, $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$f(-3a)=|9a^2-3a^2|e^{\frac{-3a}{a}}=6a^2e^{-3}$$
$$f(a)=|a^2-3a^2|e^{\frac{a}{a}}=2a^2e$$

함수 $f(x)$ 의 모든 극댓값의 곱이 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$6a^2e^{-3}\times 2a^2e=12a^4e^{-2}=\frac{3}{4}$$
$$a^4=\frac{e^2}{16} \qquad \therefore\ a=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

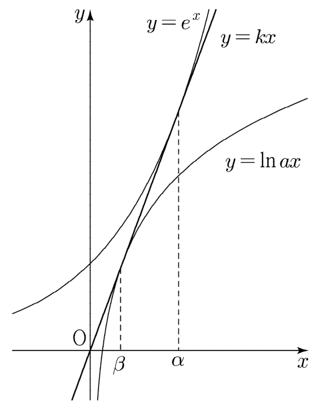
179

정답 ④

부등식 $\frac{\ln ax}{x}\le k\le\frac{e^x}{x}$ 에서 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$\ln ax\le kx\le e^x$$

이 성립하도록 하는 실수 k 의 값이 하나뿐이므로 그림과 같이
직선 $y=kx$ 는 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln ax$ 와 각각 접해야 한다.



곡선 $y=e^x$ 과 직선 $y=kx$ 가 접하는 점의 x 좌표를 α 라 하면
함수 $y=e^x$ 의 도함수는 $y'=e^x$ 이므로

$$k=\frac{e^\alpha}{\alpha}=e^\alpha$$

에서 $\alpha=1$, $k=e$
또한 곡선 $y=\ln ax$ 와 직선 $y=ex$ 가 접하는 점의 x 좌표를 β 라
하면 함수 $y=\ln ax$ 의 도함수는 $y'=\frac{1}{x}$ 이므로

$$e=\frac{\ln a\beta}{\beta}=\frac{1}{\beta}$$

에서 $\beta=\frac{1}{e}$, $\ln\frac{a}{e}=1 \qquad \therefore\ a=e^2$

[다른 풀이]

양의 실수 x 에 대하여 $f(x)=\frac{\ln ax}{x}$, $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 이라 하면
함수 $f(x)$의 최댓값 M, 함수 $g(x)$ 의 최솟값 m 에 대하여

$$\frac{\ln ax}{x}\le M\le k\le m\le\frac{e^x}{x}$$

이때 조건을 만족시키는 실수 k 의 값이 하나뿐이므로
$M=m$ 이다.

$f'(x)=\frac{1-\ln ax}{x^2}$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{e}{a}$

$$M=f\left(\frac{e}{a}\right)=\frac{a}{e}$$

$g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ 이므로 $g'(x)=0$ 에서 $x=1$

$$m=g(1)=e$$

$M=m$ 에서 $\frac{a}{e}=e$ 이므로 $a=e^2$ 이다.

180

정답 ②

$f(x)=e^{ax^2}$ 이라 하면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 이므로
곡선 $y=f(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이다.
따라서 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 두 접선의 기울기는 각각
-2, 2 이다.
즉, 직선 $y=2x$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 접한다.
접점의 좌표를 (t, e^{at^2}) 이라 하면 양수 t 에 대하여 접선의
기울기는

$$f'(t)=2ate^{at^2} \qquad \cdots\ ㉠$$

이므로 점 (t, e^{at^2}) 에서 그은 접선의 방정식은

$$y-e^{at^2}=2ate^{at^2}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-e^{at^2}=2ate^{at^2}(0-t)$, $2at^2e^{at^2}=e^{at^2}$

∴ $2at^2=1$ (∵ $e^{at^2}>0$) ⋯ ㉡

㉠에서 양수 t에 대하여 접선의 기울기 $f'(t)$는 양수이므로

$2ate^{at^2}=2$

㉡에서 $2at=\frac{1}{t}$, $at^2=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{t}\times\sqrt{e}=2$ ∴ $t=\frac{\sqrt{e}}{2}$

따라서 상수 a의 값은 $a=\frac{1}{2t^2}=\frac{2}{e}$

181

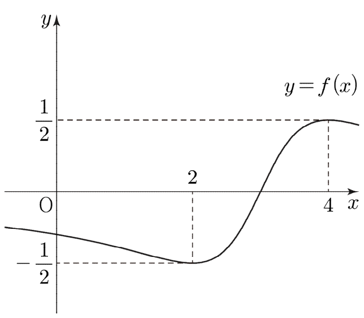
정답 43

$f(x)=\frac{x-3}{x^2-6x+10}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+10-(x-3)(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2}=-\frac{(x-2)(x-4)}{(x^2-6x+10)^2}$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘



$g(1)$, $g(5)$는 각각 닫힌구간 $[-1, 1]$, $[-5, 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이므로

$g(1)=f(-1)=-\frac{4}{17}$, $g(5)=f(4)=\frac{1}{2}$

∴ $g(1)+g(5)=-\frac{4}{17}+\frac{1}{2}=\frac{9}{34}$

따라서 $p=34$, $q=9$이고 $p+q=43$이다.

[참고]

$f(x)=\frac{x-3}{x^2-6x+10}=\frac{x-3}{(x-3)^2+1}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면 $y=\frac{x}{x^2+1}$이므로 더 간단하게 미분할 수 있다.

182

정답 10

두 직선 AB, AC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=\frac{8k^2-5k^2}{2k-k}=3k$, $\tan\theta_2=\frac{8k^2-5k^2}{4k-k}=k$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\tan(\angle\mathrm{BAC})&=\tan(\theta_1-\theta_2)\\&=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|\\&=\left|\frac{3k-k}{1+3k\times k}\right|\\&=\frac{2k}{1+3k^2}\ (\because\ k>0)\end{aligned}$$

$\frac{2k}{1+3k^2}=\frac{2}{\frac{1}{k}+3k}$에서 $\frac{1}{k}>0$, $3k>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{\frac{1}{k}+3k}\le\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(단, 등호는 $\frac{1}{k}=3k$, 즉 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 성립)

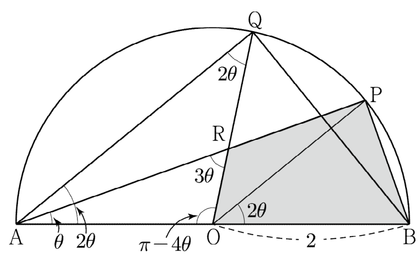
따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $M=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$30\times a\times M=30\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=10$

183

정답 16

사각형 OBPR의 넓이는 삼각형 PAB의 넓이에서 삼각형 AOR의 넓이를 뺀 값과 같으므로 다음과 같이 구할 수 있다.



삼각형 PAB에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\theta=4\cos\theta$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times4\times4\cos\theta\times\sin\theta$$
$$=8\sin\theta\cos\theta$$

이고 삼각형 AOQ에서 $\angle\mathrm{OQA}=2\theta$이므로

$\angle\mathrm{AOQ}=\pi-4\theta$

삼각형 AOR에서 $\angle\mathrm{ORA}=3\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin3\theta}$ ∴ $\overline{\mathrm{OR}}=\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}$

삼각형 AOR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\pi-4\theta)$$
$$\frac{1}{2}\times2\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin4\theta=\frac{2\sin\theta\sin4\theta}{\sin3\theta}$$

따라서

$$S(\theta)=8\sin\theta\cos\theta-\frac{2\sin\theta\sin 4\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{8\sin\theta\cos\theta-\dfrac{2\sin\theta\sin 4\theta}{\sin 3\theta}}{\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{8\sin\theta\cos\theta}{\theta}-\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\sin 4\theta}{\theta\times\sin 3\theta}\\&=8-\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 4\theta}{\sin 3\theta}\\&=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}=\alpha\end{aligned}$$

$\therefore\ 3\alpha=16$

184

정답 ③

$g(x)=f(x)-xf'(x)$ 에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x)-f'(x)-xf''(x)\\&=-xf''(x)=\frac{\pi^2}{a^2}x\sin\frac{\pi x}{a}\end{aligned}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공차가 $2a$인 등차수열을 이룬다.

$a_n=(2n-1)a$이고 $(a_2)^2=a_1+a_3$이므로

$9a^2=6a \qquad \therefore\ a=\frac{2}{3}$

$f'(x)=\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}=\frac{3}{2}\pi\cos\frac{3}{2}\pi x$ 이므로 $f'(2)$ 의 값은

$\frac{3}{2}\pi\times(-1)=-\frac{3}{2}\pi$

185

정답 ④

$f'(x)=a(1-x)e^{-x}$이고 $a>0$이므로 $x\geq 1$에서 정의된 함수 $f(x)$는 감소함수이다.

함수 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)f'(g(x))=1$

$\therefore\ f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}$

$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{g'(x)}\right\}=-\frac{g''(x)}{\{g'(x)\}^2}$ 이고 $\frac{1}{g'(x)}$ 이 열린구간 $(0, 1)$ 에서 감소하므로 열린구간 $(0, 1)$ 에서

$-\frac{g''(x)}{\{g'(x)\}^2}\leq 0 \qquad \therefore\ g''(x)\geq 0$

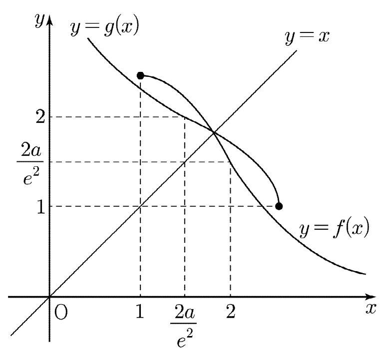
즉, 곡선 $y=g(x)$는 열린구간 $(0, 1)$ 에서 아래로 볼록이어야 한다.

$f''(x)=a(x-2)e^{-x}$이므로 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(2, \infty)$ 에서 아래로 볼록인 곡선이고, $f(2)=\frac{2a}{e^2}$이므로 곡선 $y=g(x)$는 열린구간 $\left(0, \frac{2a}{e^2}\right)$에서 아래로 볼록인 곡선이다.

방정식 $f''(x)=0$에서 $x=2$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{a}{e}$	$\searrow$	$\frac{2a}{e^2}$	$\searrow$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\frac{2a}{e^2}\geq 1$일 때 주어진 조건을 만족시키고,

$a\geq\frac{e^2}{2}$이므로 a의 최솟값은 $\frac{e^2}{2}$이다.

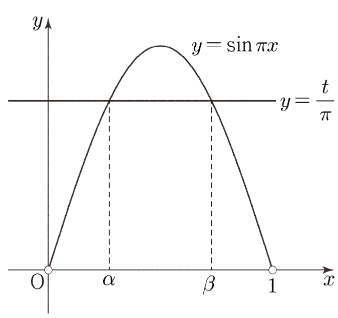
186

정답 ③

$f(x)=\cos\pi x+tx$에서 $f'(x)=-\pi\sin\pi x+t$이므로

방정식 $f'(x)=0$에서 $\sin\pi x=\frac{t}{\pi}$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta\ (\alpha<\beta)$에서 극값을 가지므로 α, β는 각각 함수 $y=\sin\pi x\ (0<x<1)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{\pi}$가 만나는 두 점의 x좌표와 같다.



$h(t)=\alpha\left(0<h(t)<\frac{1}{2}\right)$이라 하면

함수 $y=\sin\pi x\ (0<x<1)$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\beta=1-h(t)$이다.

$\therefore\ g(t)=\beta-\alpha=\{1-h(t)\}-h(t)=1-2h(t)$ $\cdots$ ㉠

또한 $\sin\{\pi h(t)\}=\frac{t}{\pi}$ 에서 $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때, $\sin\left\{\pi h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \pi h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, 즉 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}$ $\left(\because\ 0<h(t)<\frac{1}{2}\right)$

$\sin\{\pi h(t)\}=\frac{t}{\pi}$ 의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\pi h'(t)\cos\{\pi h(t)\}=\frac{1}{\pi}$ $\cdots$ ㉡

㉡에 $t=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$\pi h'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left\{\pi h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{\pi}$, 즉 $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3\pi^2}$

㉠에서 $g'(t)=-2h'(t)$ 이므로

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\times\frac{2\sqrt{3}}{3\pi^2}=-\frac{4\sqrt{3}}{3\pi^2}$

187

정답 ④

$f(x)=e^{tx}\cos x$ 에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(-\sin x+t\cos x)\times e^{tx}$

x에 대한 방정식 $-\sin x+t\cos x=0$의 실근을

$\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $t=\tan\alpha$ 이므로 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $t>0$에서

실수 α의 값의 개수는 1이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이자 최댓값을 가지므로

$g(t)=e^{t\alpha}\cos\alpha$ 이고 $t=\tan\alpha$ 이다.

$t=1$일 때, $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 이고

$t=\tan\alpha$ 에서 양변을 t에 대하여 미분하면 $\frac{dt}{d\alpha}=\sec^2\alpha$ 이다.

한편 $g(t)=e^{t\alpha}\cos\alpha$ 의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$g'(t)=\left(e^{t\alpha}\right)'\cos\alpha+e^{t\alpha}(-\sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$
$$=\left(\alpha+t\frac{d\alpha}{dt}\right)e^{t\alpha}\cos\alpha+e^{t\alpha}(-\sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$
$$=\alpha e^{t\alpha}\cos\alpha+(t\cos\alpha-\sin\alpha)e^{t\alpha}\times\frac{d\alpha}{dt}$$

$t=1$일 때 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 이고 $\frac{d\alpha}{dt}=\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$ 이므로 위의 식에 대입하면

$$g'(1)=\frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\frac{\pi}{4}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}e^{\frac{\pi}{4}}$$

188

정답 36

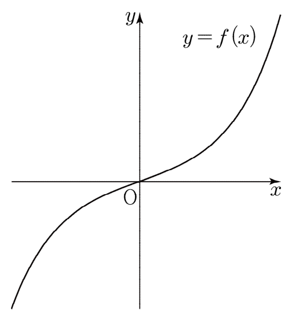
$f(x)=\frac{a}{n}\left(e^x-e^{-x}\right)$ 에서

$f'(x)=\frac{a}{n}\left(e^x+e^{-x}\right)$, $f''(x)=\frac{a}{n}\left(e^x-e^{-x}\right)$

$f''(x)=0$ 에서 $x=0$ 이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f'(0)=\frac{2a}{n}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{2a}{n}x$

이고, 직선 $y=2nx$와 기울기를 비교하여 교점의 개수와 접선의 형태를 확인한다.

$y=2nx$의 기울기가 접선 $y=\frac{2a}{n}x$의 기울기보다 클 때는 곡선 $y=f(x)$와 교점의 개수가 3이고, 모두 접하지 않고,

$y=2nx$의 기울기가 접선 $y=\frac{2a}{n}x$의 기울기와 같을 때는 접하므로 $g(n)=0$이고

$y=2nx$의 기울기가 접선 $y=\frac{2a}{n}x$의 기울기와 작을 때는 원점에서만 만나고 접하지 않는다.

따라서,

$\frac{2a}{n}<2n$, $n>\sqrt{a}$ 일 때 $g(n)=3$

$\frac{2a}{n}=2n$, $n=\sqrt{a}$ 일 때 $g(n)=0$

$\frac{2a}{n}>2n$, $n<\sqrt{a}$ 일 때 $g(n)=1$

즉, $\sum_{n=1}^{8}g(n)=11$을 만족시키는 $g(n)$의 값은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	1	1	1	1	1	0	3	3

따라서 $\sqrt{a}=6$ 이고 $a=36$ 이다.

189

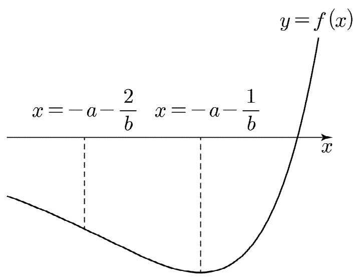
정답 ⑤

$f(x)=(x+a)e^{bx}$ 에서

$$f'(x)=e^{bx}+b(x+a)e^{bx}=b\left(x+a+\frac{1}{b}\right)e^{bx},$$

$$f''(x)=be^{bx}+b^2\left(x+a+\frac{1}{b}\right)e^{bx}=b^2\left(x+a+\frac{2}{b}\right)e^{bx}$$

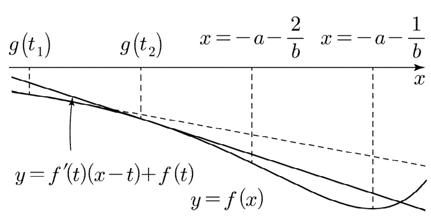
함수 $f(x)$ 는 $x=-a-\frac{1}{b}$ 에서 극소이고, $x=-a-\frac{2}{b}$ 에서 변곡점을 갖는다.
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(t)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 가 만나는 점 중 x 좌표가 가장 작은 점의 x 좌표이다.

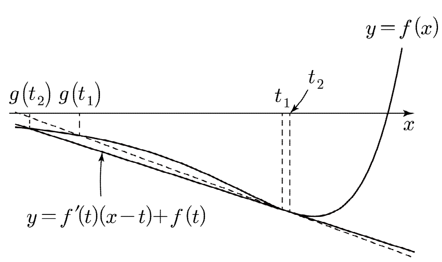
(ⅰ) $t\le -a-\frac{2}{b}$ 일 때

$g(t)=t$ 이므로 그림과 같이 $t_1<t_2$ 일 때 $g(t_1)<g(t_2)$ 이고 함수 $g(t)$ 는 증가한다.



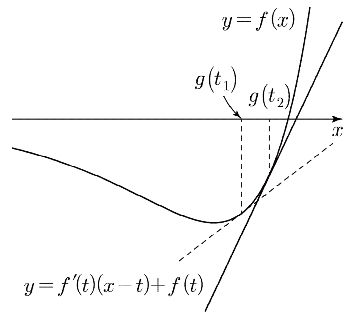
(ⅱ) $-a-\frac{2}{b}\le t<-a-\frac{1}{b}$ 일 때

그림과 같이 $t_1<t_2$ 일 때 $g(t_1)>g(t_2)$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 감소한다.



(ⅲ) $t\ge -a-\frac{1}{b}$ 일 때

$g(t)=t$ 이므로 그림과 같이 $t_1<t_2$ 일 때 $g(t_1)<g(t_2)$ 이고 함수 $g(t)$ 는 증가한다.



(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 함수 $g(t)$ 가 감소하는 실수 t 의 값의 범위는 $-a-\frac{2}{b}\le t<-a-\frac{1}{b}$ 이므로 조건에 의하여

$$-a-\frac{2}{b}=-10,\ -a-\frac{1}{b}=-6$$

두 식을 연립하면 $a=2,\ b=\frac{1}{4}$ 이므로 $a\times b=\frac{1}{2}$

190

정답 112

$h(x)=g(x)\sin\frac{\pi}{g(x)}$ 에서

$$h'(x)=g'(x)\sin\frac{\pi}{g(x)}-\frac{\pi g'(x)}{g(x)}\cos\frac{\pi}{g(x)}$$
$$=g'(x)\cos\frac{\pi}{g(x)}\left\{\tan\frac{\pi}{g(x)}-\frac{\pi}{g(x)}\right\}$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=|f(x)|+2\ge 2$ 이므로

$$0<\frac{\pi}{g(x)}\le\frac{\pi}{2}$$

따라서 $\cos\frac{\pi}{g(x)}\ge 0,\ \tan\frac{\pi}{g(x)}\ge\frac{\pi}{g(x)}$ 이므로 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소는 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소와 같다.
삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(\alpha)=0$ 인 실수 α 가 반드시 존재하므로

$$h(\alpha)=2\times\sin\frac{\pi}{2}=2$$

조건에 의하여 방정식 $h(x)=2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이어야 하므로 방정식 $g(x)=2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이어야 한다.
따라서 함수 $g(x)$ 는 극솟값 2를 갖는다. … ㉠

또한 $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{|f(x)|+2}=0,$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi}{|f(x)|+2}=0$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\pi\times\frac{\sin\frac{\pi}{g(x)}}{\frac{\pi}{g(x)}}=\pi,$$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\pi\times\frac{\sin\frac{\pi}{g(x)}}{\frac{\pi}{g(x)}}=\pi$$

이고 반드시 $h(\beta)=3$ 인 실수 β 가 존재한다.
조건에 의하여 방정식 $h(x)=3$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이어야 한다.
이때

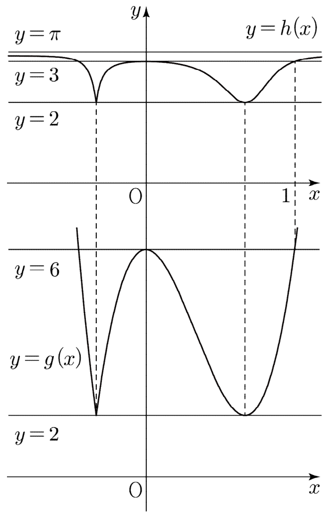
$$h(0)=h(1)=6\times\sin\frac{\pi}{6}=3$$

이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가져야 한다.

미적분

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=kx^2(x-1)+4$ $(k>0)$이라 하면

$$f'(x)=3kx\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27}k+4=0$이므로 $\quad k=27$

따라서 $f(x)=27x^2(x-1)+4$이므로

$$f(2)=112$$

191

정답 9

$x<0$일 때 $f'(x)=2x+a$이고 방정식 $f'(x)=0$에서 $x=-\frac{a}{2}$

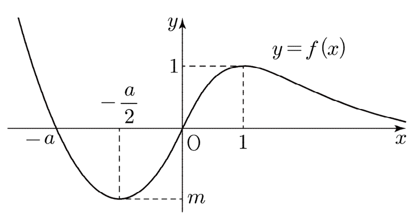
$x>0$일 때

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

이고 $f'(x)=0$에서 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	0	↗	1	↘

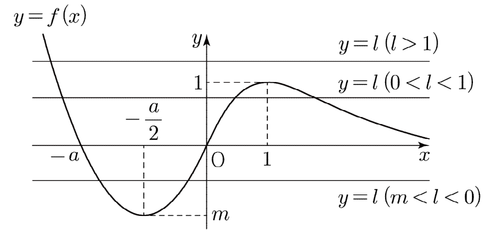
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)+k$의 서로 다른 실근의 개수가 $g(t)$이므로 $g(t)$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)+k$가 만나는 점의 개수에 따라 변한다.

$f(t)+k=l$, 함수 $f(x)$의 극솟값을 m이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=l$이 만나는 점의 개수는

$m<l\le 0$ 또는 $l=1$일 때 2, $0<l<1$일 때 3, $l>1$일 때 1이므로 $l=0$, $l=1$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=l$이 만나는 점의 개수가 변한다.



즉, $l=0$, $l=1$일 때 함수 $g(t)$는 불연속이다.

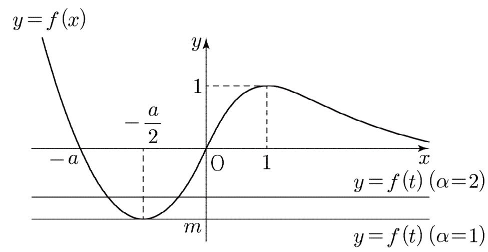
조건 (가)에 의하여 함수 $g(t)$의 불연속점의 개수가 3이므로

$l=0$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수와

$l=1$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수의 합이 3이어야 한다. … ㉠

(ⅰ) $l=0$일 때

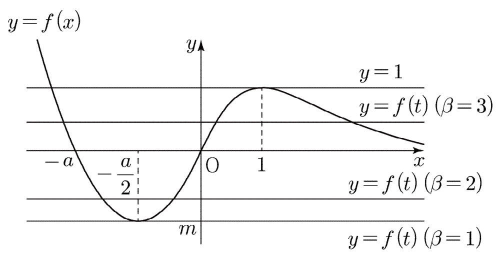
$f(t)=-k<0$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수를 α라 하면 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$이다.



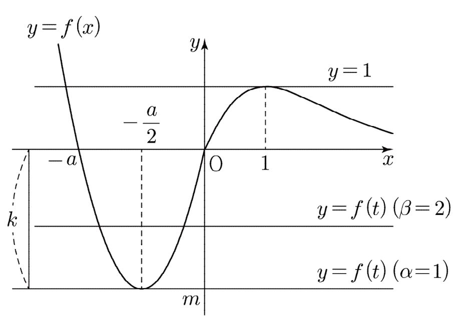
(ⅱ) $l=1$일 때

$f(t)=1-k<1$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수를 β라 하면

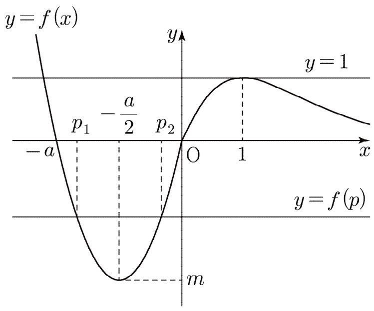
$\alpha\le\beta$이고 $\beta=1$ 또는 $\beta=2$ 또는 $\beta=3$이다.



(ⅰ), (ⅱ)와 ㉠에 의하여 $\alpha+\beta=3$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2$이다.



조건 (나)에서 $\left|\lim_{t\to p+} g(t) - \lim_{t\to p-} g(t)\right| = 2$를 만족시키려면 $t\to p+$ 일 때와 $t\to p-$ 일 때의 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=l$이 만나는 점의 개수의 차가 2이어야 하므로 $l=1$이어야 한다.



즉, $\left|\lim_{t\to p+} g(t) - \lim_{t\to p-} g(t)\right| = 2$를 만족시키는 실수 p는 $f(p)+k=1$, $p^2+ap+k-1=0$을 만족시키고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 합은 $-a=-3$이므로 $a=3$이다.

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x^2+3x & (x\le 0) \\ \dfrac{2x}{x^2+1} & (x>0) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$이므로

$k=\dfrac{9}{4}$이고 $k\times f(-4)=\dfrac{9}{4}\times 4=9$이다.

192

정답 ②

$f(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$에서 $f'(x)=x^{\frac{1}{2}}$이고, $0\le x\le 3$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_0^3 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

193

정답 ③

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-3}e^{\frac{1}{x}}\,dx$에서 $\dfrac{1}{x}=t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$,

$x=\dfrac{1}{2}$일 때 $t=2$이고, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-3}e^{\frac{1}{x}}\,dx=-\int_{\frac{1}{2}}^1\left\{\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right\}dx$$
$$=-\int_2^1 te^t\,dt$$
$$=\int_1^2 te^t\,dt$$
$$=\Big[te^t\Big]_1^2-\int_1^2 e^t\,dt$$
$$=(2e^2-e)-\Big[e^t\Big]_1^2=e^2$$

194

정답 ③

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{24}{9x^2-\pi^2}\int_{\frac{\pi}{3}}^x\frac{\cos t}{\cos t+1}\,dt$에서 $f(t)=\dfrac{\cos t}{\cos t+1}$라 하면

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하자.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{24}{9x^2-\pi^2}\int_{\frac{\pi}{3}}^x\frac{\cos t}{\cos t+1}\,dt$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{24}{(3x+\pi)(3x-\pi)}\int_{\frac{\pi}{3}}^x f(t)\,dt$$
$$=\frac{4}{\pi}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^x f(t)\,dt$$
$$=\frac{4}{\pi}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{4}{\pi}F'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{\pi}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{4}{\pi}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3\pi}$$

195

정답 ②

$\displaystyle\int_1^2\frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$에서

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}\quad (a,\ b\text{는 상수})$$
$$=\frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(a+b)x+(2a+b)}{(x+1)(x+2)}$$

$a+b=1$, $2a+b=0$

$\therefore\ a=-1$, $b=2$

즉,

$$\int_1^2\frac{x}{x^2+3x+2}\,dx=\int_1^2\frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[2\ln(x+2)-\ln(x+1)\Big]_1^2$$
$$=5\ln 2-3\ln 3$$

196

정답 ②

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{e^{\sqrt{\frac{k}{n}}}}{n}=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$에서 $\sqrt{x}=t$라 하면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이고

$x=t^2$에서 $\frac{dx}{dt}=2t$이므로

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1 2te^t\,dt$$
$$=\left[2te^t\right]_0^1-\int_0^1 2e^t\,dt$$
$$=2e-\left[2e^t\right]_0^1=2$$

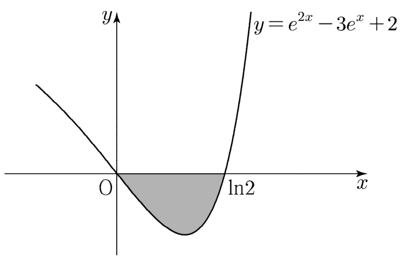
197

정답 ①

방정식

$$e^{2x}-3e^x+2=(e^x-1)(e^x-2)=0$$

에서 곡선 $y=e^{2x}-3e^x+2$는 x축과 $x=0$, $x=\ln 2$에서 만난다.



따라서 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\ln 2}\left|e^{2x}-3e^x+2\right|dx=-\left[\frac{e^{2x}}{2}-3e^x+2x\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

198

정답 ⑤

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=e^t+e^{-t},\quad y=2t+1$$

이므로

$$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\quad \frac{dy}{dt}=2$$

따라서 시각 $t=\ln 3$에서 $t=\ln 6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\ln 3}^{\ln 6}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+4}\,dt$$
$$=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}\,dt$$
$$=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}\,dt$$
$$=\int_{\ln 3}^{\ln 6}(e^t+e^{-t})\,dt$$
$$=\left[e^t-e^{-t}\right]_{\ln 3}^{\ln 6}$$
$$=6-\frac{1}{6}-3+\frac{1}{3}=\frac{19}{6}$$

199

정답 ②

주어진 입체도형을 x축 위의 점 $(t, 0)$ $\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}<t<\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 한 변의 길이가 $\sqrt{t\cos(t^2)}$인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{t\cos(t^2)}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}t\cos(t^2)$$

따라서 곡선 $y=\sqrt{x\cos(x^2)}$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}S(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}t\cos(t^2)\,dt$$

$t^2=x$라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$일 때 $x=\frac{\pi}{6}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$일 때 $x=\frac{\pi}{3}$이고 $\frac{dx}{dt}=2t$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}t\cos(t^2)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{16}$$

200

정답 ③

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{10x}{x^2+1}\ \text{ 또는 }\ f(x)=6-x$$

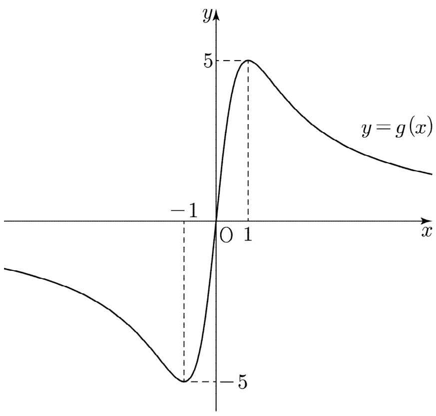
$g(x)=\frac{10x}{x^2+1}$라 하면

$$g'(x)=\frac{10(x^2+1)-10x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-10(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

방정식 $g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	5	$\searrow$

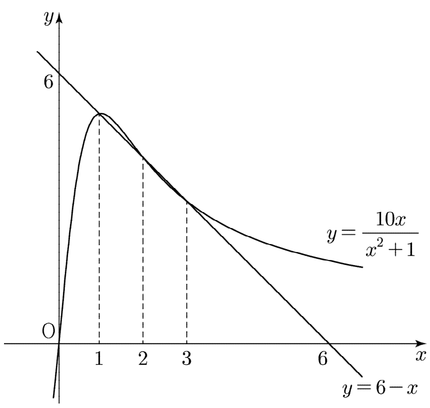
이때 $\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



곡선 $y=\dfrac{10x}{x^2+1}$ 와 직선 $y=6-x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{10x}{x^2+1}=6-x$$
$$x^3-6x^2+11x-6=0$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$
$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

곡선 $y=\dfrac{10x}{x^2+1}$ 와 직선 $y=6-x$ 는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ 의 값이 최소이기 위해서는

$0\le x\le 1$ 또는 $2\le x\le 3$일 때 $f(x)=\dfrac{10x}{x^2+1}$ 이고,
$1\le x\le 2$일 때 $f(x)=-x+6$ 이어야 한다.

따라서 $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ 의 최솟값은

$$\int_0^1 \frac{10x}{x^2+1}dx+\int_1^2 (6-x)dx+\int_2^3 \frac{10x}{x^2+1}dx$$
$$=\Big[5\ln(x^2+1)\Big]_0^1+\Big[6x-\frac{x^2}{2}\Big]_1^2+\Big[5\ln(x^2+1)\Big]_2^3$$
$$=5\ln 2+\frac{9}{2}+5\ln 2$$
$$=\frac{9}{2}+10\ln 2$$

201

정답 ①

$(x-e)f(x)=\displaystyle\int_1^x (t-k)\ln t\,dt$ 에서 양변에 $x=e$ 를 대입하면

$$\int_1^e (t-k)\ln t\,dt=0 \qquad \cdots ㉠$$

이므로

$$\int_1^e (t-k)\ln t\,dt=\left[\left(\frac{1}{2}t^2-kt\right)\ln t\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}t-k\right)dt$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-ke\right)-\left[\frac{1}{4}t^2-kt\right]_1^e$$
$$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-k=0$$
$$\therefore\ k=\frac{e^2+1}{4} \qquad \cdots ㉡$$

또한 함수 $f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=e$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x\to e} f(x)=f(e)$$
$$\lim_{x\to e} f(x)=\lim_{x\to e}\frac{\int_1^x (t-k)\ln t\,dt}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e}\frac{\int_1^e (t-k)\ln t\,dt+\int_e^x (t-k)\ln t\,dt}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e}\frac{\int_e^x (t-k)\ln t\,dt}{x-e} \qquad (\because ㉠)$$

$g(t)=(t-k)\ln t$ 라 할 때, $g(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하자.

$$=\lim_{x\to e}\frac{\int_e^x g(t)\,dt}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e}\frac{G(x)-G(e)}{x-e}$$
$$=g(e)$$
$$=e-\frac{e^2+1}{4} \qquad (\because ㉡)$$
$$\therefore\ f(e)=\frac{4e-1-e^2}{4}$$

202

정답 ④

$u'=4\sin^3 x\cos x,\ v=\ln(1+\cos x)$ 라 하면 부분적분법에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{4\sin^3 x\cos x\ln(1+\cos x)\}dx$$
$$=\Big[\sin^4 x\ln(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(1-\cos^2 x)^2}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\,dx$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\,dx$에서 $\cos x = t$라 하면

$\frac{dt}{dx} = -\sin x$이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\,dx\\ &= -\int_1^0 (1-t)(1-t^2)\,dt\\ &= \int_0^1 (1-t-t^2+t^3)\,dt\\ &= \left[t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}\right]_0^1\\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

203

정답 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 모든 실수 x에 대하여

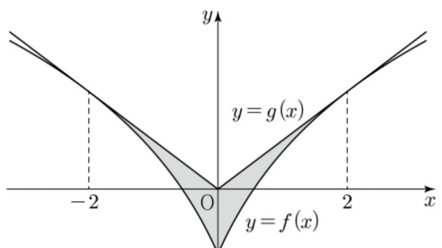
$f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$

이므로 두 함수의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이다.
즉, 두 함수의 그래프는 $x<0$, $x>0$에서 각각 한 점에서 접해야 한다.

따라서 직선 $y=\frac{1}{3}x$는 곡선 $y=\ln(x+1)+a$와 접하고, 접점의 x좌표를 t라 하면

$\ln(t+1)+a=\frac{1}{3}t$, $\frac{1}{t+1}=\frac{1}{3}$

이므로 $t=2$, $a=\frac{2}{3}-\ln 3$이다.



따라서 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}&2\times\int_0^2\left\{\frac{1}{3}x-\ln(x+1)-\frac{2}{3}+\ln 3\right\}dx\\ &=2\times\left[\frac{1}{6}x^2-(x+1)\ln(x+1)+x+1-\left(\frac{2}{3}-\ln 3\right)x\right]_0^2\\ &=2\left\{\left(\frac{2}{3}-3\ln 3+3-\frac{4}{3}+2\ln 3\right)-1\right\}=\frac{8}{3}-2\ln 3\end{aligned}$$

[참고]

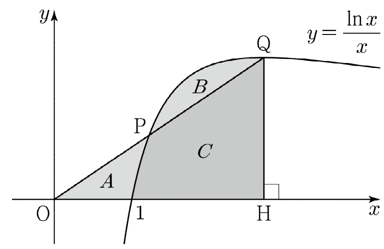
$\int \ln x\,dx = x\ln x + x + C$ (단, C는 적분상수)이므로 상수 a에 대하여

$\int \ln(x+a)\,dx=(x+a)\ln(x+a)-(x+a)+C$

204

정답 ①

$y=\frac{\ln x}{x}$에서 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$는 $x=e$에서 극댓값을 갖고, 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프는 그림과 같다.



점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 x축 및 두 선분 PQ, QH로 둘러싸인 영역을 C라 하면 조건에 의하여

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)+(C의 넓이)

이다.
(A의 넓이)+(C의 넓이)는 삼각형 OQH의 넓이와 같고,
점 Q의 x좌표를 α라 하면

(B의 넓이)+(C의 넓이)는 $\int_1^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx$와 같다. … ㉠

삼각형 OQH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{QH}}=\frac{1}{2}\times\alpha\times\frac{\ln\alpha}{\alpha}=\frac{\ln\alpha}{2}$

이고, $\int_1^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$라 하면 $x=1$일 때 $t=0$,

$x=\alpha$일 때 $t=\ln\alpha$이고, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$\int_1^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^{\ln\alpha}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln\alpha}=\frac{(\ln\alpha)^2}{2}$

㉠에 의하여 $\frac{\ln\alpha}{2}=\frac{(\ln\alpha)^2}{2}$, 즉 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=e$

이때 점 Q의 y좌표는 양수이어야 하므로 $\alpha>1$이고, $\alpha=e$

따라서 점 Q의 y좌표는 $\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$이다.

205

정답 2

$\left\{\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\right\}^2\neq\left\{\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\right\}^2$에서

$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\neq\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$이고

$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\neq-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$이어야 한다.

(i) $\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$일 때

$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$이기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)\geq 0$이어야 한다.
이때 직선 $y=f(x)$의 기울기는 $(e^x)'=e^x$에서 항상 양수이므로 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1 이하여야 한다.

따라서 $f(x)=e^t(x-t)+e^t$에서 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점은 $(t-1, 0)$이므로

$t-1 \le -1 \qquad \therefore\ t \le 0$

그러므로 직선 $y=f(x)$는 $t>0$일 때

$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx \ne \int_{-1}^{1}f(x)dx$이다.

(ii) $\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=-\int_{-1}^{1}f(x)dx$일 때

$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=-\int_{-1}^{1}f(x)dx$이기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)\le 0$이어야 한다.

이때 직선 $y=f(x)$의 기울기는 $(e^x)'=e^x$에서 항상 양수이므로 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1 이상이어야 한다.

따라서 $f(x)=e^t(x-t)+e^t$에서 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점은 $(t-1, 0)$이므로

$t-1 \ge 1 \qquad \therefore\ t \ge 2$

그러므로 직선 $y=f(x)$는 $t<2$일 때

$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx \ne -\int_{-1}^{1}f(x)dx$이다.

(i), (ii)에 의하여 $\left\{\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\right\}^2 \ne \left\{\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\right\}^2$을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $0<t<2$이고 $\beta-\alpha=2$이다.

206

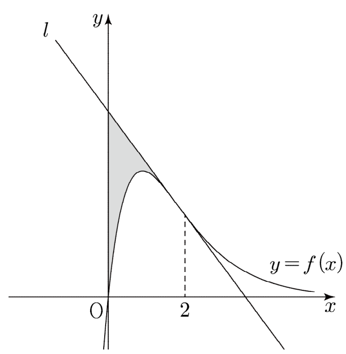
정답 ①

$f'(x)=ae^{-x}-axe^{-x}=a(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-ae^{-x}-a(1-x)e^{-x}=-a(2-x)e^{-x}$

이므로 $f''(x)=0$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 변곡점을 갖고, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선 l의 방정식은

$y=-\frac{a}{e^2}(x-2)+\frac{2a}{e^2}$



직선 l은 두 점 $\left(2, \frac{2a}{e^2}\right)$, $\left(0, \frac{4a}{e^2}\right)$를 지나므로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{2a}{e^2}+\frac{4a}{e^2}\right)-\int_0^2 f(x)\,dx$

$=\frac{6a}{e^2}-\int_0^2 axe^{-x}dx$

$=a\left(\frac{6}{e^2}+\Big[(x+1)e^{-x}\Big]_0^2\right)$

$=a\left(\frac{9}{e^2}-1\right)=3+e$

$\therefore\ a=\dfrac{3+e}{\dfrac{9}{e^2}-1}=\dfrac{e^2(3+e)}{9-e^2}=\dfrac{e^2}{3-e}$

[참고]

$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-(x+1)e^{-x}+C$

(단, C는 적분상수)

207

정답 ②

$f(x)=k\ln x$에서 $f'(x)=\frac{k}{x}$이고, 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, k\ln t)$에서의 접선을 l이라 할 때 직선 l의 방정식은

$l : y-k\ln t=\frac{k}{t}(x-t)$

이때 직선 l이 원점을 지나므로

$-k\ln t=\frac{k}{t}\times(-t) \qquad \therefore\ t=e\ (\because\ k>0)$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(e, k)$이고, 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}(e, 0)$이다.

점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선을 l'이라 하면 직선 l'의 방정식은

$l' : y-k=-\frac{e}{k}(x-e)$

이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(e+\frac{k^2}{e}, 0\right)$이다.

삼각형 PHQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{2}\times k\times\frac{k^2}{e}=\frac{k^3}{2e}$

또한 곡선 $y=f(x)$와 직선 PH, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_1^e k\ln x\,dx=k\Big[x\ln x-x\Big]_1^e=k$

주어진 조건에 의하여

$\frac{k^3}{2e}=k \qquad \therefore\ k=\sqrt{2e}\ (\because\ k>0)$

208

정답 ①

$a=0$이면 함수 $f(x)$는 상수함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오직 한 점에서 만날 수 없다.

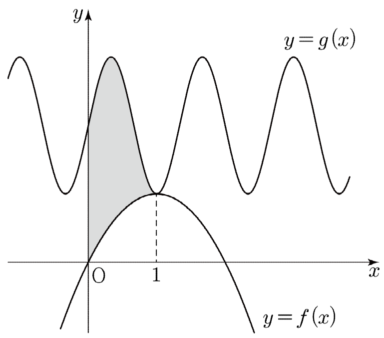
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -a)$이다.

$a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오직 한 점에서 만날 수 없으므로 $a<0$이다.

두 함수의 그래프가 오직 $\mathrm{P}(1, f(1))$에서만 만나고 $f'(1)=0$이므로

$g(1)=\sin b\pi+2=1,\ g'(1)=b\pi\cos b\pi=0$

즉, $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$ ($\because\ 1<b<2$)이다.



따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 및 $y=g(x)$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)+2-\left(-x^2+2x\right)\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi}{2}x+2x+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^1=\frac{4}{3}+\frac{2}{3\pi}$$

209

정답 90

$g(x)=\int_{-1}^{x}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt$ 에서

$$g'(x)=\frac{xf(x)}{1+2^{f(x)}}=\frac{ax^2(x+1)(x-1)}{1+2^{a(x^3-x)}}$$

방정식 $g'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ 이고, a의 값에 따라 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a<0$인 경우

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	$g(0)$	↗	극대	↘

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $g(-1)$을 갖는다.
이때 $g(-1)=0$이므로 모순이다.

(ii) $a=0$인 경우
모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이므로 모순이다.

(iii) $a>0$인 경우

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	$g(0)$	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $g(1)$을 갖는다.

$g(1)=\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt=-2$ 에서

$$\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt=\int_{-1}^{0}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt+\int_{0}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt \quad \cdots ㉠$$

$\int_{-1}^{0}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt$ 에서 $t=-s$라 하면 $t=-1$일 때 $s=1$, $t=0$일 때 $s=0$이고, $\frac{dt}{ds}=-1$이므로

$$\int_{-1}^{0}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt=\int_{1}^{0}\frac{sf(-s)}{1+2^{f(-s)}}ds$$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$\int_{1}^{0}\frac{sf(-s)}{1+2^{f(-s)}}ds=\int_{0}^{1}\frac{sf(s)}{1+2^{-f(s)}}ds=\int_{0}^{1}\frac{2^{f(s)}sf(s)}{1+2^{f(s)}}ds$$

㉠에서

$$\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt=\int_{0}^{1}\frac{2^{f(t)}tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt+\int_{0}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{tf(t)\left(1+2^{f(t)}\right)}{1+2^{f(t)}}\right\}dt$$

$$=\int_0^1 tf(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 a\left(t^4-t^2\right)dt$$

$$=a\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{15}a$$

따라서 $-\frac{2}{15}a=-2$이므로 $a=15$

(i)~(iii)에 의하여 $f(x)=15(x^3-x)$이고 $f(2)=90$이다.

210

정답 12

방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 증가함수이고 조건 (나)에서
$f(2)=e^5>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
즉, 모든 실수 x에 대하여
$\ln\{f(x)f(-x)\}=\ln f(x)+\ln f(-x)=0$이므로

$$\ln f(x)=-\ln f(-x) \quad \cdots ㉠$$

$\int_{-5}^{5}\{g(e^x)\}^2dx$에서 $g(e^x)=t$라 하면 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $e^x=f(t)$, 즉 $x=\ln f(t)$이고 $\frac{dx}{dt}=\frac{f'(t)}{f(t)}$이다.

$$\int_{-5}^{5}\{g(e^x)\}^2dx=\int_{g(e^{-5})}^{g(e^5)}\left\{t^2\times\frac{f'(t)}{f(t)}\right\}dt$$

이때 조건 (나)에서 $f(2)=e^5$이므로 $g(e^5)=2$이고,
조건 (가)에 의하여 $f(-2)=\frac{1}{f(2)}=e^{-5}$이므로 $g(e^{-5})=-2$이다.
따라서

$$\int_{-5}^{5}\{g(e^x)\}^2dx=\int_{-2}^{2}\left\{t^2\times\frac{f'(t)}{f(t)}\right\}dt$$

$$=\left[t^2\times\ln f(t)\right]_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}\{2t\times\ln f(t)\}dt$$

$$=4\ln f(2)-4\ln f(-2)-2\int_{-2}^{2}\{t\ln f(t)\}dt$$

$$=8\ln f(2)-4\int_0^2\{t\ln f(t)\}dt \ (\because ㉠)$$

$$=8\times5-4\times7 \ (\because \text{조건 (나)})$$

$$=12$$

MEMO

MEMO