개념서

문제편

COMPACT

고1

수학(상)

드리는 말

안녕하세요. 정지호입니다. 제가 사정이 생겨 수업을 그만두게 되었습니다. 이제까지 받은 것들이 너무 많아, 제 수업과 교재를 드리고 싶어 이렇게 글을 남깁니다.

이 교재는, 제 교재의 문제 중 강의가 있는 문제들만 추려서 만들었습니다. 그러니 이 문제들만 풀면 이 단원을 마스터했다라는 착각은 하지 마시고, 이 단원에 이런 문제들이 있다 정도로 봐주시면 좋을 것 같습니다. 하지만 많은 학생들이 풀고 도움이 되었으므로 이 문제들을 선보입니다.

강의 검색은 문제 옆의 대괄호안의 이름을 유튜브에 검색하면 나옵니다.

예) 수상 C135번

띄어쓰기도 지켜서 검색하시면 됩니다. 간혹가다 검색이 안 되는 문제들도 있는 듯한데, 그건 왜 그런지 저도 잘 모르겠습니다.... 미리 양해 부탁드립니다. 제가 부족해서 교재나 영상의 오타나 오류 등이 있을 수 있습니다. 그것도 미리 미안합니다. 다만, 조금이나마 여러분들에게 도움이 되었으면 하는 마음으로 올리게 되었습니다.

마지막으로 언제나 공부보다, 성적보다 비할 수 없을 정도로 소중한 여러분들임을 잊지 마셨으면 좋겠습니다. 세상에서 가장 멋진 여러분들을 만나게 되어 설렙니다. 항상 응원하고 사랑합니다.

마음으로 가르치는 강사 정 지 호

공 부 법

첫째, 조금이라도 애매하면 모르는 것입니다. 답지를 보거나 영상을 보세요.

둘째, 답지를 보거나 영상을 보았으면, 답지를 덮고, 반드시 다시 풀어야 합니다.

셋째, 책에 틀리거나 애매한 문제도 반드시 문제 옆에 표시하고, 꼭 다시 풀어야 합니다.

다항식

(1) 다항식의 연산

(2) 항등식

(3) 인수분해

방정식과 함수

(4) 복소수

(5) 이차방정식

(6) 이차방정식과 이차함수

(7) 여러 가지 방정식

부등식과 함수

(8) 이차부등식

도형의 방정식

(9) 점

(10) 직선의 방정식

(11) 원의 방정식

(12) 이동

다항식

(1) 다항식의 연산

(2) 항등식

(3) 인수분해

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

4. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

5. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

6. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

7. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

8. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

9. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

10. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

11. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

12. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

13. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

14. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

15. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$ (n이 홀수일 때)

16. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

17. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

18. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]$

19. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

20. $(a-\frac{1}{a})^2=(a+\frac{1}{a})^2-4$

21. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

1. $(a+b)^2=$

2. $(a-b)^2=$

3. $a^2+b^2=\qquad -2ab$

4. $a^2+b^2=\qquad +2ab$

5. $(a+b)^2=(a-b)^2+$

6. $(a-b)^2=(a+b)^2-$

7. $(a+b)(a-b)=$

8. $(a+b)^3=$

9. $(a-b)^3=$

10. $a^3+b^3=$

11. $a^3+b^3=(a+b)(\qquad\qquad)$

12. $a^3-b^3=$

13. $a^3-b^3=(a-b)(\qquad\qquad)$

14. $a^n-b^n=$

15. $a^n+b^n=(a+b)(\qquad\qquad\qquad)$ (n이 홀수일 때)

16. $(a+b+c)^2=$

17. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$

18. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=$

19. $a^3+b^3+c^3-3abc=$

20. $(a-\frac{1}{a})^2=$

21. $a^4+a^2b^2+b^4=(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$

1. $(a+b)^2=$

2. $(a-b)^2=$

3. $a^2+b^2=\qquad -2ab$

4. $a^2+b^2=\qquad +2ab$

5. $(a+b)^2=(a-b)^2+$

6. $(a-b)^2=(a+b)^2-$

7. $(a+b)(a-b)=$

8. $(a+b)^3=$

9. $(a-b)^3=$

10. $a^3+b^3=$

11. $a^3+b^3=(a+b)(\qquad\qquad)$

12. $a^3-b^3=$

13. $a^3-b^3=(a-b)(\qquad\qquad)$

14. $a^n-b^n=$

15. $a^n+b^n=(a+b)(\qquad\qquad\qquad\qquad)$ (n이 홀수일 때)

16. $(a+b+c)^2=$

17. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$

18. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=$

19. $a^3+b^3+c^3-3abc=$

20. $(a-\frac{1}{a})^2=$

21. $a^4+a^2b^2+b^4=(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$

다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 다항식의 정리 방법

① 내림차순 : 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것

② 오름차순 : 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것

(2) 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 덧셈 : 동류항끼리 모아서 정리한다.

② 뺄셈 : 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더한다.

(3) 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙 $A+B=B+A$

② 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈

식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

〈참고〉 다항식의 곱셈에서는 다음 지수법칙을 이용한다.

$x^m x^n = x^{m+n}$ (단, m, n은 자연수)

(2) 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

① 교환법칙 $AB=BA$

② 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

〈참고〉 두 다항식의 합과 차의 곱으로 이루어진 식은

$(\blacksquare+\bullet)(\blacksquare-\bullet)=\blacksquare^2-\bullet^2$

임을 이용하면 쉽게 전개할 수 있다.

곱셈 공식

① $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

② $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑤ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

⑥ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3+b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

④ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

⑤ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

⑥ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

1) [수상 C4번]
$2x^2+3xy-y^2+x-10y+1$를 x에 대하여 오름차순으로 정리하여라.

2) [수상 C5번]
$P=4x^3-2x^2y^4+5x^2y^3+3xy^2+5y^5-4x+2y+6$이 있다.
(1) P를 x에 관하여 내림차순으로 정리하여라.

(2) P를 y에 관하여 오름차순으로 정리하여라.

3) [수상 C14번]
다음 각 식을 간단히 하여라.
(1) $(-x^2y^3z)^5 \div (-xy^2z^4)^3$

(2) $(6a^4b^5c^3)^2 \times (-2ab^2)^3$

4) [수상 C15번]
다음 각 식을 간단히 하여라.
(1) $\{(a^l)^m\}^n$

(2) $(-a)^3 \times (-a)^5$

(3) $\left(\frac{q^2}{p^3}\right)^4 \div \left(\frac{q^4}{p^2}\right)^3$

다음 식을 전개하여라.
5) [수상 C18번]
$(x^2-2xy+3y)(x-y)$

6) [수상 C20번]
$(x^2-y)(2x^2+y)$

7) [수상 C22번]
다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

8) [수상 C23번]
다항식 $(3x-1)^3(x-2)^2$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 210 ② 216 ③ 225
④ 230 ⑤ 234

9) [수상 C24번]
다항식 $(x^2-x+1)(x^2-x+k)$의 전개식에서 x^2의 계수가 10일 때, x의 계수를 구하여라. (단, k는 상수이다.)

10) [수상 C25번]
다항식 $(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$의 전개식에서 x^5의 계수는?

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

곱셈 공식을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

11) [수상 C31번]

$(a+2b-c)^2$

12) [수상 C32번]

$(x+2)(x-4)(x+5)$

13) [수상 C36번]

$(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)$

14) [수상 C42번]

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x-2)(x+3)(x-4)$

(2) $(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$

(3) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

15) [수상 C44번]
다항식 $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)-(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$ 을 전개한 식이 ax^3+by^3일 때, $a-b$의 값을 구하여라.
(단, a, b는 상수이다.)

16) [수상 C47번]
$a+b=3$, $ab=-2$일 때, a^3+b^3

$x+\frac{1}{x}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

17) [수상 C51번]
$x^2+\frac{1}{x^2}$

18) [수상 C52번]
$x-\frac{1}{x}$

19) [수상 C61번]

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$, $ab=2$일 때, $a-b$의 값은? (단, $a>b$)

① $2\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ 6 ⑤ $2\sqrt{10}$

20) [수상 C62번]

$a+b+c=9$, $ab+bc+ca=8$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

21) [수상 C63번]

$a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=15$, $abc=3$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

22) [수상 C65번]

$x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=3$, $x^3+y^3+z^3=1$일 때, xyz의 값을 구하여라.

23) [수상 C70번]
두 다항식 A, B에 대하여 $A-B=-3x^2+2xy-2y^2$, $2A+B=xy-4y^2$일 때, $A-2B$를 계산하여라.

24) [수상 C74번]
다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$의 전개식에서 x^9의 계수는?

① 45 ② 50 ③ 55
④ 90 ⑤ 110

25) [수상 C75번]
다항식 $(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

26) [수상 C76번]
다항식
$(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$
을 전개하면?

① $2a^2+2b^2+2c^2$
② $4a^2+4b^2+4c^2$
③ $2a^2+2b^2+2c^2+4ab+4bc+4ca$
④ $4a^2+4b^2+4c^2-8ab-8bc-8ca$
⑤ $4a^2+4b^2+4c^2+8ab+8bc+8ca$

27) [수상 C79번]

$a+b+c=2,\ ab+bc+ca=-7,\ abc=-2$ 일 때,
$(a+b)(b+c)(c+a)$ 의 값을 구하여라.

28) [수상 C82번]

$k=\sqrt{2}$ 일 때,

$$\{(3+2k)^3+(3-2k)^3\}^2-\{(3+2k)^3-(3-2k)^3\}^2$$

의 값은?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$
④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

29) [수상 C86번]

$x+y=-1,\ xy=-3$ 일 때, $x^5+y^5+x^6+y^6$ 의 값은?

① 91　② 93　③ 95
④ 97　⑤ 99

30) [수상 C89번]

$x^2-3x+1=0$ 일 때, $x^3+3x^2-5x-7-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하여라.

31) [수상 C90번]

$a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=15,\ abc=-1$ 일 때,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

32) [수상 C91번]

$a-b=4,\ b-c=-1$ 일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 의 값을 구하여라.

33) [수상 C92번]
0이 아닌 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$$a+\frac{1}{b}=1,\ b+\frac{1}{c}=2,\ c+\frac{1}{a}=\frac{5}{6}$$

일 때, $abc+\frac{1}{abc}$의 값은?

① $-\frac{7}{3}$ ② $-\frac{13}{6}$ ③ -2
④ $-\frac{11}{6}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

다항식

(1) 다항식의 연산

(2) 항등식

(3) 인수분해

· 등식의 성질

(1) 등식

식 $20-4=16$, $2x+4=3x$와 같이 등호를 사용하여 나타낸 식을 등식이라고 한다.

(2) 방정식

$x=3$이면 등식 $2x+(x-4)=5$는 참이 된다. 그러나 $x=1$, $x=2$, $x=4$이면 등식 $2x+(x-4)=5$는 거짓이 된다. 이와 같이 x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 x에 관한 방정식이라고 한다. 이때 문자 x를 미지수라 하고, 방정식을 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 그 방정식의 해 또는 근이라고 한다. 또, 방정식의 해를 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

(3) 항등식

등식 $3x=x+2x$는 미지수 x에 어떤 수를 대입하여도 항상 참이 된다. 이와 같이 x가 어떤 값을 가지더라도 항상 참이 되는 등식을 x에 관한 항등식이라고 한다.

항등식과 미정계수법

(1) 항등식 : 등식에 포함된 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식

(2) 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$ 이다.

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ 이다.

(3) 미정계수법

① 계수 비교법 : 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법

② 수치 대입법 : 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법

〈참고〉 항등식에서 미정계수를 구할 때

① 다항식의 전개가 간단하면 ⇨ 계수 비교법

② 어떤 수를 대입하여 0 이 되는 항이 여러 개 있으면 ⇨ 수치 대입법

다항식의 나눗셈

(1) 다항식의 나눗셈

두 다항식을 내림차순으로 정리한 후, 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

예를 들어 $(-x+6x^2+3)\div(-1+2x)$를 할 때 먼저

$$(6x^2-x+3)\div(2x-1)$$

과 같이 정리하고 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{3x+1} \\ \hline 2x-1 & 6x^2-\ x+3 \\ & 6x^2-3x \\ \hline & \quad\ \ 2x+3 \\ & \quad\ \ 2x-1 \\ \hline & \qquad\quad \boxed{4} \end{array} \qquad \xleftarrow{\text{몫}} \xrightarrow{} \qquad \begin{array}{r|l} & \boxed{26} \\ \hline 5 & 132 \\ & 10 \\ \hline & \ \ 32 \\ & \ \ 30 \\ \hline & \quad \boxed{2} \end{array}$$

나머지

<다항식의 나눗셈> <자연수의 나눗셈>

여기서 마지막 4는 $2x-1$보다 차수가 낮기 때문에 더 이상 나눌 수 없다. 따라서 $6x^2-x+3$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $3x+1$, 나머지는 4이다.

몫

$$6x^2-x+3=(2x-1)(\boxed{3x+1})+\boxed{4} \qquad 132=5\times\boxed{26}+\boxed{2}$$

나머지

(2) 다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단,(R의 차수)$<$(B의 차수))

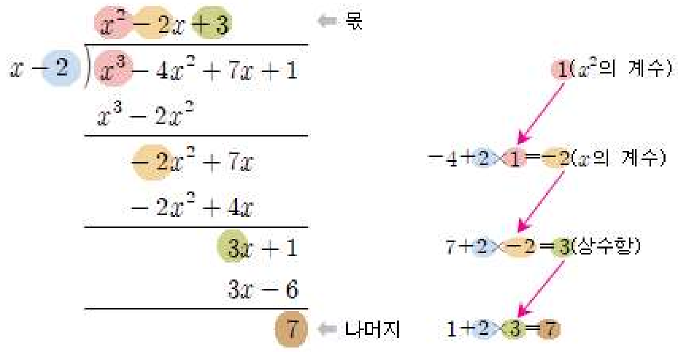
특히 $R=0$일 때, A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

조립제법

다항식 $f(x)$를 $x-a$꼴의 일차식으로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법이라고 한다.

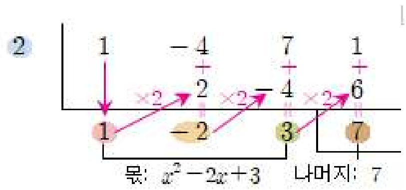
<예>

예를 들어 다항식 $P(x)=x^3-4x^2+7x+1$을 $x-2$로 나누면 다음과 같다.



따라서 몫은 x^2-2x+3이고, 나머지는 7이다.

이때 $P(x)$의 각 항의 계수만을 이용하여 오른쪽과 같이 몫의 각 항의 계수와 나머지를 차례로 구할 수 있다.



이와 같이 다항식 $P(x)$를 일차식으로 나눌 때 $P(x)$의 각 항의 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

<참고> 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$ $(a\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R$$
$$=(ax+b)\cdot\frac{1}{a}Q(x)+R$$

따라서 다항식 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 R'이라 하면

$$Q'(x)=\frac{1}{a}Q(x),\ R'=R$$

나머지정리와 인수정리

(1) 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$

(2) 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면$f(\alpha)=0$이다.

② $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

<참고> 다항식 $f(x)$를 n차식으로 나누었을 때의 나머지는 $(n-1)$차 이하의 다항식이므로 나머지를 $a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$으로 놓는다.(단, $a_1, a_2, \cdots, a_n$은 상수이다.)

1. 방정식 vs 항등식

$x(x-2)=0$ $\quad$ $x^2-2x=x(x-2)$

해가 존재 $\quad$ 모든 x에 대해 성립
x에 관계없이 성립

※ 모든 곱셈공식은 항등식

2. 항등식 푸는 방법

① 계수비교법 : 양변을 전개하여 비교한다.

ex1) $ax(x-1)+bx+c(x-1)=x^2+x+1$

$ax^2+(b+c-a)x-c=x^2+x+1$

$a=1, c=-1, b=3$

② 수치대입법 : 항등식이므로 아무 수치나 대입하여 구한다.

ex2) $ax(x-1)+bx+c(x-1)=x^2+x+1$

$x=1$대입 $b=3$

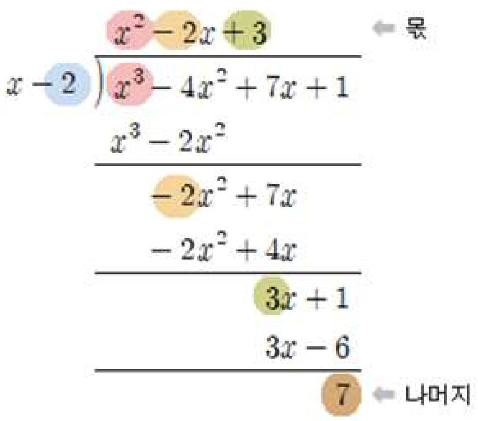
$x=0$대입 $-c=1, c=-1$

a는 좌변의 이차항의 계수, 우변의 이차항의 계수도 1이므로 $a=1$

3. 몫과 나머지를 구하는 방법

① 나눗셈

ex3) x^3-4x^2+7x+1을 $x-2$로 나눈 몫, 나머지

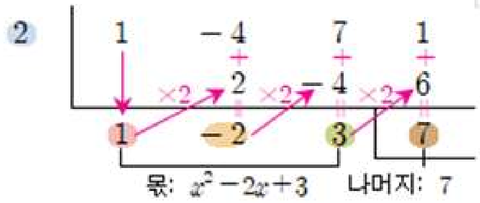


하지만, 나누고 난 후 가장 중요한 것은 표현하는 것이다.

$x^3-4x^2+7x+1=(x-2)(x^2-2x+3)+7$

② 조립제법(단, 일차식으로 나눌 때만 가능)

ex4) x^3-4x^2+7x+1을 $x-2$로 나눈 몫, 나머지



하지만, 조립제법을 쓰고 난 후 가장 중요한 것은 표현하는 것이다.

$x^3-4x^2+7x+1=(x-2)(x^2-2x+3)+7$

4. 나머지만 구하는 방법

① 나머지정리

ex5) x^3-4x^2+7x+1을 $x-2$로 나눈 나머지

$x^3-4x^2+7x+1=(x-2)Q(x)+R$

$x=2$대입 $7=R$

※ 이차로 나누었을 때는 나머지 $R(x)=ax+b$

삼차로 나누었을 때는 나머지 $R(x)=ax^2+bx+c$

② 인수정리(나머지 정리와 같다. 나머지 없을 때)

ex6) $3x^3+kx^2-6x-4$가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값을 구하여라.

$3x^3+kx^2-6x-4=(x-2)Q(x)$

$x=2$대입 $24+4k-16=0, k=-2$

34) [수상 C96번]

$(a+b)x^2-(b+2)x+(c-5)=x^2+1$

35) [수상 C106번]

등식 $kx^2+x+ky^2+y-13k+1=0$이 실수 k에 대한 항등식일 때, 상수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값은?

① -6　② -3　③ -1
④ 1　⑤ 3

36) [수상 C112번]

$y-x=1$을 만족시키는 모든 실수 $x,\ y$에 대하여

$$ax^2+2ax+by^2-cx-y-1=0$$

이 항상 성립할 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

37) [수상 C114번]

$x+2y=1$을 만족시키는 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $3ax+by=15$가 항상 성립할 때, 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

38) [수상 C115번]
x에 대한 항등식
$(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$
에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값과 $a_0+a_2+\cdots+a_8+a_{10}$을 구하여라.

39) [수상 C118번]
$(x^3-2x^2+5)\div(x-3)$의 몫과 나머지를 구하여라.

40) [수상 C122번]
다항식 $A=2x^3+x^2-7x+7$를 $B=2x-1$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 할 때, $A=BQ+R$꼴로 나타내어라.

41) [수상 C124번]
다항식 $2x^3-3x^2+x-3$을 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 $Q(2)+R(1)$의 값을 구하여라.

42) [수상 C125번]
다항식 x^3+ax^2+b가 x^2-x+2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

43) [수상 C126번]
x에 대한 다항식 x^3+ax+b가 x^2-x+1로 나누어 떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

44) [수상 C128번]
다항식 $x^4+ax^3+bx-11$을 x^2-2x+4로 나누었을 때의 나머지가 $x-3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -15 ② -10 ③ -5
④ 5 ⑤ 10

45) [수상 C133번]
다항식 $2x^3+x^2+3$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하여라.

46) [수상 C134번]
다항식 $2x^3-3x^2+3x+1$을
$2x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하여라.

47) [수상 C135번]
다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $f(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 적은 것은?

① $\frac{1}{3}Q(x),\ 3R$
② $\frac{1}{3}Q(x),\ R$
③ $Q(x),\ R$
④ $3Q(x),\ R$
⑤ $3Q(x),\ \frac{1}{3}R$

48) [수상 C136번]
다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R일 때, $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여라.

다항식 $f(x)=4x^2+2x+1$를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.
49) [수상 C138번]
$2x+1$

50) [수상 C144번]
다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, 다항식 $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -1일 때, 다항식 $3f(x)-4g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

51) [수상 C146번]
두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지고, $f(x)-g(x)$는 $x-1$로 나누면 나머지가 2일 때, 다항식 $f(x)g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

52) [수상 C147번]
다항식 $2x^3+x^2-3x$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

53) [수상 C148번]
다항식 x^{99}을 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

54) [수상 C150번]
다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이고 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지가 $-x+2$일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지는?

① $x-5$ ② $x+1$ ③ $2x-1$
④ $2x+1$ ⑤ $2x+3$

55) [수상 C151번]
다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $2x+3$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. 이때 $f(x)$를 $(x^2-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는?

① $-x^2-2x+4$ ② $-x^2+2x-6$ ③ $-x^2+2x+4$
④ x^2-2x-6 ⑤ x^2+2x-6

56) [수상 C154번]
다항식 $f(x)$를 $2x^2+x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-5$일 때, 다항식 $f(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

57) [수상 C155번]
다항식 $f(x)$를 $(2x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지가 $4x-3$일 때, 다항식 $f(3x+1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

58) [수상 C156번]
다항식 $f(x)=x^3+ax+b$에 대하여 $f(x+1004)$를 $x+1005$로 나누었을 때의 나머지가 4이고, $f(x+1005)$를 $x+1004$로 나누었을 때의 나머지가 2이다. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

59) [수상 C158번]
다항식 $x^{30}+x^{29}+x$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

60) [수상 C159번]
다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이고, $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이다. 이때 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

61) [수상 C160번]
다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이고, 다항식 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -1일 때, $xf(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는?

① -15 ② -14 ③ -10
④ -6 ⑤ -4

62) [수상 C161번]

다항식 $f(x)=3x^3+kx^2-6x-4$가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값을 구하여라.

63) [수상 C164번]

다항식 x^4+mx^3+nx+4가 $x+2,\ x-1$로 모두 나누어떨어질 때, 상수 $m,\ n$에 대하여 $m-n$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

64) [수상 C166번]

다항식 x^3+x^2+ax+b가 $(x-1)(x+3)$으로 나누어떨어질 때, 이 다항식을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

65) [수상 C171번]

x, y의 값에 관계없이 $\frac{ax+by+1}{x+2y-3}$의 값이 항상 일정할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

(단, $x+2y-3 \neq 0$)

66) [수상 C179번]

다항식 $2x^3-3x^2+x-3$을 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(2)+R(1)$의 값을 구하여라.

67) [수상 C186번]

다항식 x^3+ax+b를 x^2+3x-2로 나누었을 때의 나머지가 2일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

68) [수상 C194번]

다항식 $2x^2+kx-5$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 R_1, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지를 R_2라 하자. $R_1R_2=25$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

69) [수상 C203번]
다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이고, $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이다. 이때 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

70) [수상 C204번]
다항식 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-12$이고, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이다. $P(x)$를 x^3-1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하여라.

71) [수상 C211번]
이차식 $P(x)$에 대하여 $P(1-x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -4이고, $xP(x)+x^2$은 x^2-4로 나누어떨어진다. 이때 $P(1)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

72) [수상 C215번]
x^3의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여 $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$일 때, $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

다항식

(1) 다항식의 연산

(2) 항등식

(3) 인수분해

인수분해

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 인수라고 한다. 또, 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 인수분해한다고 한다.

$$x^2+4x+3 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+3)$$

인수분해 공식

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

④ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

⑤ $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

〈참고〉 ⑤에서 $a+b+c=0$ 이면 $a^2+b^2+c^2=3abc$ 이다.

치환을 이용한 인수분해

(1) 공통부분이 있는 다항식

① 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

② 공통부분이 생기도록 주어진 식을 변형한 후 치환한다. $R=f(\alpha)$

(2) $\boldsymbol{x^4+ax^2+b}$ 꼴의 다항식

① $x^2=X$ 로 치환하여 X^2+aX+b 를 인수분해한다.

② 주어진 식을 $(x^4+cx^2+b)-dx^2$ 으로 나타내어 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

〈참고〉 (2) 복이차식에서 완전제곱식 꼴을 만들 때, x^4 항과 상수항을 고정시키고 x^2 항을 더하거나 뺀다.

여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해

두 개 이상의 문자를 포함한 식 중에서 인수분해 공식을 직접 적용할 수 없는 것은 다음과 같이 인수분해한다.

① **차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순**으로 정리하여 인수분해한다.

② 차수가 같을 때에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

〈참고〉 한 문자에 대하여 정리할 때, 그 문자가 아닌 나머지 문자들은 상수로 생각한다.

인수정리를 이용한 인수분해

삼차 이상의 다항식 $f(x)$에 인수분해 공식을 적용할 수 없을 때에는 다음과 같이 인수분해한다.

(i) $f(\alpha)=0$ 을 만족하는 상수 α 의 값을 구한다.

(ii) 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-\alpha$ 로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구한다.

(iii) $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 와 같이 정리한다.

(iv) $Q(x)$에 대하여 (i), (ii), (iii)의 방법을 적용한다.

〈참고〉 계수가 정수인 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$ 을 만족시키는 α 의 값은

$\pm\dfrac{f(x)\text{의 상수항의 약수}}{f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수}}$

중에서 찾는다.

예) $24x^3-8x^2-6x+2$

1. 기본전제 : 유리수 범위까지 인수분해하면 된다.

ex1) $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (x)

2. 복이차식

ex2)

$x^4+9x^2+25=(x^4-10x^2+25)+19x^2$

=x

$x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$

$=(x^2+5)^2-x^2=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

3. 복잡한 식: 차수가 가장 낮은 문자로 내림차순

ex3) $a^2b-a^3c+bc-ac^2=(a^2+c)b-a^3c-ac^2$

$=(a^2+c)b-ac(a^2+c)$

$=(a^2+c)(b-ac)$

ex4) $a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

4. 고차제곱식 : x^2으로 묶는다.

ex5) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

5. 조립제법 : 계수가 정수인 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$\pm\frac{f(x)\text{의 상수항의 약수}}{f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수}}$

중에서 찾는다.

ex6) $24x^3-8x^2-6x+2=4(x-\frac{1}{2})(3x-1)(2x+1)$

73) [수상 C216번]
다음 식을 인수분해 하여라.
(1) $(x-1)a+(x-1)$

(2) $1-x-y+xy$

(3) $ac-bd-ad+bc$

다음 식을 인수분해하여라.
74) [수상 C217번]
$2ab^2+6b$

75) [수상 C219번]
$1-m-n+mn$

76) [수상 C221번]
다음 중 $xy+y^2-xz-yz$의 인수인 것은?
① $x-y$ ② $z-x$ ③ $y-z$
④ $x+z$ ⑤ $y+z$

77) [수상 C226번]
다음 식을 인수분해 하여라.
(1) $3x^2+2x-8$

(2) $6x^2+5xy-6y^2$

78) [수상 C232번]
다음 식을 인수분해 하여라.
(1) $64x^2-9y^2$

(2) $12a^2-27b^2$

(3) $(2x+y)^2-(x-y)^2$

다음 식을 인수분해하여라.

79) [수상 C235번]

$x^3+9x^2+27x+27$

80) [수상 C236번]

$-8a^3+36a^2b-54ab^2+27b^3$

81) [수상 C238번]

$27a^3-64b^3$

82) [수상 C240번]

다음 식을 인수분해 하여라.

(1) $x^3-6x^2+12x-8$

(2) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$

83) [수상 C241번]

(1) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

(2) $x^2+y^2+1+2(xy+x+y)$

다음 식을 인수분해하여라.

84) [수상 C242번]

$a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$

85) [수상 C244번]

$a^3-b^3+c^3+3abc$

86) [수상 C245번]
다음 식을 인수분해하여라.
$x^3+y^3-3xy+1$

87) [수상 C246번]
다음 중 옳지 않은 것은?

① $a^3-3a^2+3a-1=(a-1)^3$
② $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3=(x-3y)^3$
③ $x^3-8=(x+2)(x^2-2x+4)$
④ $x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$
⑤ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

88) [수상 C248번]
다음 식을 인수분해하여라.
(1) $(x+1)^2-3(x+1)+2$

(2) $(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$

(3) $2(x+1)^2+(x+1)(x-3)-(x-3)^2$

(4) $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24$

89) [수상 C250번]
다음 식을 인수분해하여라.
(1) $(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)+5$

(2) $(x^2-2x)^2+2x^2-4x-15$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$

90) [수상 C251번]
다음 식을 인수분해하여라.
(1) x^3-2x^2-5x+6

(2) $x^4-3x^3+3x^2+x-6$

91) [수상 C255번]
x^4+9x^2+25

92) [수상 C256번]
다음 식을 인수분해하여라.
x^4+2x^2+9

93) [수상 C261번]
다음 식을 인수분해하여라.
x^3-4x^2+x+6

94) [수상 C263번]
다음 중 $x^3-ax^2-4a^2x+4a^3$의 인수가 아닌 것은?

① $x-a$
② $x+2a$
③ $x-2a$
④ $(x-a)(x-2a)$
⑤ $(x+a)(x+2a)$

95) [수상 C264번]
$x^3 - xy^2 - y^2z + x^2z$를 인수분해하면?

① $(x+y)(x-y)(z+x)$
② $(x+y)(x-y)(z-x)$
③ $(x+y)(y-z)(z+x)$
④ $(x-y)(x-z)(z+x)$
⑤ $(x-y)(y-z)(z+x)$

96) [수상 C265번]
다음 식을 인수분해하여라.
$x^3 + x^2z + xz^2 - y^3 - y^2z - yz^2$

97) [수상 C268번]
$x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + y - 3$

98) [수상 C269번]
다음 식을 인수분해하여라.
$x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 3y + 2$

99) [수상 C270번]
다음 중 $x^2+xy-2y^2+x+5y-2$의 인수인 것은?

① $x+y+1$ ② $2x+y+1$ ③ $x+2y+1$
④ $x+2y-1$ ⑤ $x-2y-1$

100) [수상 C272번]
다음 중 $(b-a)c^2+(c-b)a^2+(a-c)b^2$의 인수인 것은?

① $a+b$ ② $2b-c$ ③ $c-a$
④ $a+c$ ⑤ $b+c$

101) [수상 C273번]
$\dfrac{xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}$의 값을 구하여라.

(단, $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$)

102) [수상 C274번]
서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여
$\dfrac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$의 값을 구하여라.

103) [수상 C275번]
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ 를 인수분해하여라.

104) [수상 C276번]
$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$를 인수분해하여라.

105) [수상 C278번]
다음 중 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1$의 인수인 것은?

① x^2-x+1 ② x^2+x+1 ③ x^2+x-1
④ x^2+3x-1 ⑤ x^2-3x-1

106) [수상 C280번]
$x^4-3x^3-2x^2-3x+1$을 인수분해하면?

① $(x^2-x-1)(x^2-2x-1)$
② $(x^2+x-1)(x^2-4x-1)$
③ $(x^2+x+1)(x^2-4x+1)$
④ $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$
⑤ $(x^2+x+1)(x^2+4x+1)$

107) [수상 C281번]
$x^4-x^3-4x^2+x+1$ 을 인수분해하면?

① $(x^2-x-1)(x^2+x-1)$
② $(x^2-x-1)(x^2-2x-1)$
③ $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$
④ $(x^2+x-1)(x^2-4x-1)$
⑤ $(x^2+x+1)(x^2+4x+1)$

108) [수상 C288번]
다항식 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$가 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k의 값을 구하여라.

109) [수상 C295번]
$x^2+2xy-3y^2+ax+4y+4$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 정수 a의 값을 구하여라.

110) [수상 C304번]
삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여
$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$
이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=c$ 인 이등변삼각형
② $b=c$ 인 이등변삼각형
③ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
④ 빗변의 길이가 b인 직각삼각형
⑤ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

.

111) [수상 C312번]
소수 N이 자연수 a에 대하여 $N=a^4-3a^2+9$와 같이 표현된다. 가능한 모든 소수 N의 값의 합을 구하시오

방정식과 함수

(4) 복소수

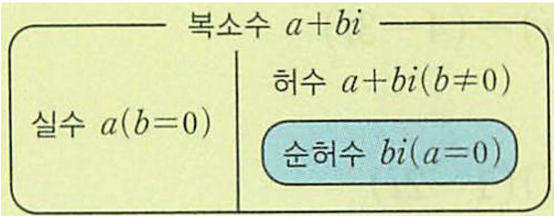
(5) 이차방정식

(6) 이차방정식과 이차함수

(7) 여러 가지 방정식

a, b 가 실수일 때,

복소수 $a+bi$ – –
- 실수 $a(b=0)$ – – –
  - 유리수 – –
    - 정수 – – – – – – – –
      - 양의 정수(자연수)
      - 0
      - 음의 정수
    - 정수가 아닌 유리수
  - 무리수
- 허수 $a+bi(b \neq 0)$ –
  - 순허수 $bi(a=0,\ b \neq 0)$
  - 순허수가 아닌 허수 $a+bi(a \neq 0,\ b \neq 0)$



복소수의 뜻과 복소수가 서로 같을 조건

(1) 제곱하여 -1이 되는 수를 i로 나타내고, 이것을 허수단위라 한다. 즉 $i^2=-1$이며, $i=\sqrt{-1}$로 나타낸다.

(2) 실수 a, b에 대하여 $a+bi$ 꼴의 수를 복소수라 하고, a를 $a+bi$의 실수부분, b를 $a+bi$의 허수부분이라 한다.

이때 $b=0$이면 $a+bi$는 실수이고, $b\neq0$이면 $a+bi$는 허수이다.

<참고> 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에서 $a=0$, $b\neq0$일 때, bi를 순허수라 한다.

(3) 복소수가 서로 같을 조건

두 복소수 $a+bi$, $c+di$ (a, b, c, d는 실수)에 대하여

① $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$

$a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

② $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이다.

$a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$

③ 임의의 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $z_1z_2=z_2z_1$

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라고 하면

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\ &= (ca-db)+(cb+da)i \\ &= (c+di)(a+bi) \\ &= z_2z_1 \end{aligned}$$

켤레복소수와 그 성질

(1)복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라 하며, 이것을 기호로 $\overline{a+bi}$와 같이 나타낸다.

(2) 켤레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 z_1, z_2라 할 때

① $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$ ② $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$(복호동순)

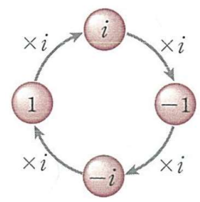
③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ ④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

<참고>
①복소수 $z=a+bi$ (a , b 는 실수)에 대하여 $\bar{z}=a-bi$ 이므로 $z+\bar{z}=2a$(실수), $z\bar{z}=a^2+b^2$(실수)
②$\bar{z}=z$ 이면 z 는 실수이다.
③$\bar{z}=-z$ 이면 z 는 순허수 또는 0 이다.

복소수의 덧셈과 뺄셈
$a,\ b,\ c,\ d$ 가 실수일 때
①$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
②$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
<참고> 복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고, 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

복소수의 곱셈과 나눗셈
$a,\ b,\ c,\ d$ 가 실수일 때
①$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
②$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq 0$)
<참고>
①복소수의 곱셈은 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고 전개한 다음 $i^2=-1$ 임을 이용하여 계산한다.
②복소수의 나눗셈은 분모의 컬레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 계산한다.
즉, $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

복소수의 거듭제곱
자연수 n 에 대하여 i^n 은
$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \cdots$
이 반복되어 나타나므로 다음과 같은 규칙을 찾을 수 있다.
$i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i$(단, k 는 자연수)
<참고> 두 자연수 $m,\ n$ 을 4 로 나누었을 때의 나머지가 같으면 $i^m,\ i^n$ 의 값이 같다.



음수의 제곱근

(1) $a>0$ 일 때

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

② $-a$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$ 이다.

(2) $a<0,\ b<0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

[증명]

$a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$a<0$, $b<0$일 때, $a=-x$, $b=-y$라고 하면 $x>0$, $y>0$이므로

$\sqrt{a}=\sqrt{-x}=\sqrt{x}\,i$, $\sqrt{b}=\sqrt{-y}=\sqrt{y}\,i$이다.

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\sqrt{b}&=\sqrt{x}\,i\times\sqrt{y}\,i\\&=\sqrt{x}\sqrt{y}\,i^2\times\sqrt{xy}\,i^2\\&=-\sqrt{xy}=-\sqrt{(-x)\times(-y)}=\sqrt{ab}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(3) $a>0,\ b<0$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$

[증명]

$a>0$, $b<0$일 때, $b=-y$라고 하면$y>0$이므로 $\sqrt{b}=\sqrt{-y}=\sqrt{y}\,i$이다.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}&=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{y}\,i}=\sqrt{\frac{a}{y}}\times\frac{1}{i}=\sqrt{\frac{a}{y}}\times\frac{i}{i^2}=-\sqrt{\frac{a}{y}}\,i\\&=-\sqrt{\frac{a}{-y}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

〈참고〉

실수 $a,\ b$ 에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이면 $a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq 0$

1. 체계표

$$
\text{복소수 } a+bi
\begin{cases}
\text{실수 } a(b=0) -- \begin{cases}
\text{유리수} - \begin{cases}
\text{정수} ------ \begin{cases} \text{양의 정수 (자연수)} \\ 0 \\ \text{음의 정수} \end{cases} \\
\text{정수가 아닌 유리수}
\end{cases} \\
\text{무리수}
\end{cases} \\
\text{허수 } a+bi(b \neq 0) - \begin{cases}
\text{순허수} \quad bi(a=0,\ b \neq 0) \\
\text{순허수가 아닌 허수 } a+bi(a \neq 0,\ b \neq 0)
\end{cases}
\end{cases}
$$

2. i의 성질

① $i^1 = i$

② $i^2 = -1$

③ $i^3 = -i$

④ $i^4 = 1$

⑤ $i^5 = i$

⑥ $i^6 = -1$

⑦ $i^7 = -i$

⑧ $i^8 = 1$

※ $(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$

3. 복소수

$z = a+bi$ (a: 실수부분, b: 허수부분, i =허수단위)

$\overline{z} = a-bi$

① $z + \overline{z} = 2a$

② $z\overline{z} = a^2 + b^2$

③ $z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$

4. 켤레 복소수

① $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

② $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ (복호동순)

③ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2 \neq 0$)

5. 제곱근

① $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

특이하게, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이면

$a < 0,\ b < 0$ 또는 $a = 0$ 또는 $b = 0$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

특이하게, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면

$a > 0,\ b < 0$ 또는 $a = 0$

6. 활용

① $x > 0$일 때, $(\sqrt{x})^2 = x$

② $x < 0$일 때, $(\sqrt{x})^2 = x$

ex) $(\sqrt{-5})^2 = -5$, $(\sqrt{3-x})^2 = 3-x$

[112] [수상 C313번]
다음 수를 허수단위 i를 사용하여 나타내어라.
(1) $\sqrt{-5}$

(2) $\sqrt{-16}$

(3) $\sqrt{-27}$

(4) $-\sqrt{-32}$

[113] [수상 C314번]
다음을 계산하여라.
(1) i^{25}

(2) $(-i)^5$

(3) $-i^7$

(4) $i^{100}+i^{200}$

114) [수상 C318번]
다음을 구하여라.
(1) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{4000}$

(2) $i+2i^2+3i^3+\ \cdots\ +49i^{49}+50i^{50}$

115) [수상 C321번]
다음을 구하여라.
$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\cdots+\frac{1}{i^{10}}$

116) [수상 C326번]
허수인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

[보 기]

ㄱ. $i-1$ ㄴ. $(\sqrt{-3})^2$
ㄷ. $\sqrt{-4}$ ㄹ. $2i^2$

다음 복소수의 실수부분과 허수부분을 구하여라.

117) [수상 C330번]

$3-i$

다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

118) [수상 C336번]

$(x+y)+4i=-2+2yi$

다음을 계산하여라.

119) [수상 C341번]

$(5+3i)+(-2+6i)$

120) [수상 C342번]

$(7+2i)-(4-3i)$

121) [수상 C343번]

$(3+4i)(1-2i)$

122) [수상 C344번]

$(1-i)(1+i)(3-\sqrt{2}i)^2(3+\sqrt{2}i)^2$.

다음을 계산하여라.

123) [수상 C348번]

$\frac{5-3i}{1+i}$

124) [수상 C349번]

두 실수 $a,\ b$에 대하여 $(2-i)(3+2i)+\frac{1+2i}{2-i}$를 $a+bi$꼴로 나타내어라.

125) [수상 C350번]

다음 식을 만족하는 실수 $x,\ y$의 값을 구하여라.

$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{5}{2+i}$

126) [수상 C355번]

$\frac{5i}{1+2i}$를 $a+bi$ ($a,\ b$는 실수) 꼴로 나타내어라.

다음 각 물음에 답하여라.

127) [수상 C359번]

$x=1+2i$ 일 때, x^3+2x^2-x+3 의 값을 구하여라.

128) [수상 C360번]

$x=\dfrac{3-i}{1+i}$ 일 때, x^3-3x^2+2x+5 의 값을 구하여라.

129) [수상 C365번]

복소수 $z=(a^2-6a+8)+(a-2)i$에 대하여 z^2이 실수가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라.

130) [수상 C367번]

$3+2i$

131) [수상 C368번]

$-4i+1$

132) [수상 C369번]

-8

133) [수상 C370번]

$15i$

134) [수상 C373번]

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $z\overline{z}$는 실수이다.

② $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$은 순허수이다.

③ $z=\overline{z}$이면 z는 실수이다.

④ $z\overline{z}=0$이면 $z=0$이다.

⑤ $\overline{z}$가 순허수이면 z도 순허수이다.

135) [수상 C374번]

다음 중 $\overline{z}=-z$를 만족시키는 복소수 z의 개수를 구하여라.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

$-\sqrt{2}+i$,	$-2i$,	$(1+\sqrt{3})i$	
0,	$\sqrt{5}-\sqrt{3}i$,	i,	$\sqrt{2}+1$

136) [수상 C376번]
등식 $2x(2-i)-y(1+3i)=\overline{7-7i}$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

137) [수상 C379번]
등식 $(1+i)z+3\overline{z}=10-i$ 를 만족시키는 복소수 z 는?
(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $1+2i$ ② $2+2i$ ③ $3+2i$
④ $4+2i$ ⑤ $5+2i$

138) [수상 C381번]
복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여
$\dfrac{z+1}{1+\sqrt{3}i}+\dfrac{\overline{z}}{4}=2$를 만족시키는 복소수 z를 구하여라.

139) [수상 C386번]
복소수 $w=2-i$에 대하여 $z=\dfrac{w+2}{2w-1}$일 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

140) [수상 C387번]

복소수 $w=2-i$에 대하여 $z=\dfrac{w-2}{2w+1}$일 때, $z\overline{z}$의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

다음 수의 제곱근을 구하여라.

141) [수상 C388번]

-3

142) [수상 C389번]

-8

다음을 $a+bi$ $(a,\ b$는 실수) 꼴로 나타내어라.

143) [수상 C393번]

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}$

144) [수상 C394번]

$\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}$

145) [수상 C399번]
다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3}\sqrt{7}=-\sqrt{21}$ ② $\sqrt{-3}\sqrt{-7}=-\sqrt{21}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-7}}=\sqrt{-\frac{3}{7}}$ ④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=-\sqrt{\frac{3}{7}}$
⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=-\sqrt{\frac{3}{7}}$

146) [수상 C401번]
다음 계산 과정에서 등호가 잘못 사용된 부분을 구하여라.

$$3 \underset{①}{=} \sqrt{9} \underset{②}{=} \sqrt{(-3)(-3)} \underset{③}{=} \sqrt{-3}\sqrt{-3} \underset{④}{=} (\sqrt{-3})^2 \underset{⑤}{=} -3$$

147) [수상 C403번]
$\sqrt{a-7}\sqrt{4-a}=-\sqrt{(a-7)(4-a)}$를 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구하여라.

148) [수상 C405번]
0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$일 때, 다음 중 $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}$와 같은 것은?

① $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ② $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ ③ $\sqrt{-\frac{a}{b}}$
④ $-\sqrt{-\frac{a}{b}}$ ⑤ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

149) [수상 C407번]
$0 < a < 2$일 때,

$$\sqrt{a}\times\sqrt{-a}+\sqrt{a-2}\times\sqrt{2-a}+\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{a-2}}\times\sqrt{\frac{a-2}{2-a}}$$

를 간단히 하여라.

150) [수상 C408번]
두 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+3y=-21,\ xy=3$일 때,
$\sqrt{\frac{x}{3y}}+\sqrt{\frac{3y}{x}}$ 의 값을 구하시오.

151) [수상 C416번]

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $f(a,\ b)=\dfrac{a+bi}{a-bi}$라 할 때, $f(2,\ 1)+f(4,\ 2)+f(6,\ 3)+\cdots+f(40,\ 20)$의 값을 구하여라.

152) [수상 C418번]

복소수 $z=i(a+2i)^2$이 실수가 되도록 하는 양수 a의 값을 α, 그때의 z의 값을 β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하여라.

153) [수상 C429번]

복소수 $z=a+bi$ $(a,\ b$는 0이 아닌 실수)에 대하여 z^2+z가 실수일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

|보 기|

ㄱ. $\overline{z^2+z}$는 허수이다.
ㄴ. $z+\overline{z}=-1$
ㄷ. $z\overline{z}<\dfrac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

154) [수상 C433번]

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z+\overline{z}=4,\ z\overline{z}=20$이 성립할 때, 복소수 z를 모두 구하여라.

방정식과 함수

<u>**해 = x**</u>
<u>**값 = y**</u>

가우스기호

$[x]$: x보다 크지 않은 최대의 정수
$n \le x < n+1$ 일 때, $[x]=n$ (n은 정수)임을 이용할 수 있도록 x의 값의 범위를 나눈다.

<u>**이차방정식의 풀이**</u>

(1) 인수분해를 이용한 풀이

$\underline{(ax-b)(cx-d)=0}$ $(ac \ne 0) \Leftrightarrow x=\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{d}{c}$

⌊ $AB=0$ 이면 $A=0$ 또는 $B=0$

(2) 근의 공식을 이용한 풀이

① $ax^2+bx+c=0$ $(a \ne 0) \Leftrightarrow x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

② $ax^2+2b'x+c=0$ $(a \ne 0) \Leftrightarrow x=\dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$

〈참고〉 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 풀면 계산이 간단해진다.

이차방정식의 판별식

$a,\ b,\ c$가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서
$D=b^2-4ac$라 하면
(ⅰ) $D>0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(ⅱ) $D=0$ 이면 중근(실근)을 갖는다.
(ⅲ) $D<0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

〈참고〉 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ 에서는 판별식 $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ 를 이용하면 편리하다.

〈참고〉
x에 대한 이차식 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 다음은 모두 $b^2-4ac=0$ 과 같은 의미이다.
① 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.
② 이차식 $f(x)$가 완전제곱식이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

① $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$　　② $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

③ $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$ (단, $\alpha,\ \beta$는 실수이다.)

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

〈참고〉
① 이차방정식의 두 근의 차가 k이면 두 근을 $\alpha,\ \alpha+k$ 로 놓는다.
② 이차방정식의 두 근의 비가 $m:n$ 이면 두 근을 $m\alpha, n\alpha(\alpha \ne 0))$ 로 놓는다.

이차방정식의 실근의 부호

$a,\ b,\ c$가 실수일 때 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의
두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하고, $D=b^2-4ac$라 하면
① 두 근이 모두 양이면 $D\geq 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$
② 두 근이 모두 음이면 $D\geq 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$
③ 두 근이 서로 다른 부호가 서로 다르면 $\underline{\alpha\beta<0}$ $(ac<0$이므로 항상 $b^2-4ac>0)$
〈참고〉
① 두 근의 부호가 서로 다르고, 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 크면 $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$
② 두 근의 부호가 서로 다르고, 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 작으면 $\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta<0$

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 $\alpha,\ \beta$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차 방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$
〈참고〉 일반적으로 $\alpha,\ \beta$를 두 근으로 하는 이차 방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$
으로 놓을 수 있다.(단, $a\neq 0$)

이차식의 인수분해

이차식은 이차방정식의 근을 이용하여 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있다. 즉 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$
와 같이 인수분해 된다.
예) $x^2+2x+2=0$의 두 근이 $x=-1\pm i$이므로 이차식
$x^2+2x+2=0$를 인수분해하면
$x^2+2x+2=(x+1+i)(x+1-i)$

이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
① $a,\ b,\ c$가 유리수일 때, 한 근이 $p+\sqrt{q}$이면 다른 한 근은 $p-\sqrt{q}$이다. (단, p는 유리수, $\sqrt{q}$는 무리수이다.)
② $a,\ b,\ c$가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, $p,\ q$는 실수, $q\neq 0,\ i=\sqrt{-1}$이다.)

이차방정식의 활용

이차방정식의 활용 문제는 다음의 순서로 해결한다.
(ⅰ) 문제의 의미를 파악하여 구하고자 하는 것을 미지수 x로 놓는다.
(ⅱ) 주어진 조건들을 이용하여 이차방정식을 세운다.
(ⅲ) (ⅱ)에서 세운 이차방정식을 풀고 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

└ 선분의 길이, 제품의 가격은
항상 0보다 크다.

1. 방정식
① n차 방정식의 해의 개수 => 언제나 n개

② 해, 근 => x, 값 => y

③ 인수분해 또는 근의 공식으로 구한다.

2. $ax^2+bx+c=0$의 해
① 해가 α, β
$\Leftrightarrow$
② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$\Leftrightarrow$
③ ax^2+bx+c에 α, β를 대입하면 0이 된다.(식이 성립한다)

3. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.
ex1) $2x^2+5x=0$의 해 = $2x^2+3x=-2x$의 해

4.근의 공식과 판별식
① $ax^2+bx+c=0$, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$D=b^2-4ac$

② $ax^2+2b'x+c=0$, $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$
$D/4=b'^2-ac$

③ $D>0$ => 서로 다른 두 실근
$D=0$ => 서로 같은 두 실근(=중근)
$D<0$ => 서로 다른 두 허근

5. 근과 계수의 관계
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}, \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

6. 켤레근(조건을 주의해야한다.)
ex2) $ax^2+bx+c=0(a,b,c$가 실수)
$1+2i$가 근 => $1-2i$도 근
※ 만약 a,b,c가 복소수라면 성립하지 않는다.

ex3) $ax^2+bx+c=0(a,b,c$가 실수)
$1+\sqrt{2}$가 근 => $1-\sqrt{2}$도 근이라고 볼 수 없다.
※ 만약 a,b,c가 유리수라면 $1-\sqrt{2}$도 근이 되겠지만, 조건이 실수이므로 성립하지 않는다.

7. 근의 종류
① $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 모두 양수
=> $D\ge 0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$

② $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 모두 음수
=> $D\ge 0, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$

③ $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호가 서로 다름
=> $\alpha\beta<0$

155) [수상 C442번]
x 에 대한 방정식 $(a^2-1)x=a+1$ 을 풀어라.

156) [수상 C446번]
다음 방정식을 풀어라.
(1) $|x-1|=2x+4$

(2) $|x+2|+|x-3|=7$

(3) $|x-1|=|3-x|$

157) [수상 C449번]
이차방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

158) [수상 C453번]
다음 문제를 풀어라.
(1)이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 할 때, $(2-\alpha^2-\alpha)(2-\beta^2-\beta)$의 값을 구하여라.

(2) 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$의 값을 구하여라.

159) [수상 C456번]
다음 이차방정식을 풀어라.
(1) $x^2-5x+4=0$

(2) $10x^2-x-3=0$

160) [수상 C460번]
다음 이차방정식을 풀어라.
(1) $x^2+3x+1=0$

(2) $2x^2+3x+4=0$

(3) $x^2-8x+28=0$

(4) $2(x-1)^2=x^2-2x+3$

161) [수상 C462번]

$2x^2+5x+4=0$

162) [수상 C464번]

$3(x+1)^2=2x+1$

163) [수상 C467번]

방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 할 때, $2\alpha-\beta$ 의 값은? (단, $\alpha<\beta$)

① $\sqrt{2}-1$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{2}+1$

164) [수상 C468번]

다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2+2x-4

(2) x^2+25

(3) $2x^2-3x+2$

165) [수상 C472번]
다음 물음에 답하여라.
(1) 방정식 $|x|^2-2|x|-2=0$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

(2) 방정식 $x^2-|x|-2=\sqrt{(x-1)^2}$ 의 모든 근의 합을 구하여라.

166) [수상 C475번]
다음 이차방정식의 근을 판별하여라.
(1) $x^2-3x-1=0$

(2) $9x^2-6x+1=0$

(3) $3x^2-5x+5=0$

다음 이차방정식의 근을 판별하여라.
167) [수상 C476번]
$5x^2-x-3=0$

168) [수상 C479번]
다음 조건을 만족시키는 이차방정식만을 보기에서 있는 대로 골라라.

[보 기]

ㄱ. $x^2+5x+3=0$	ㄴ. $2x^2-3x+2=0$
ㄷ. $x^2+2x-5=0$	ㄹ. $4x^2-4x+1=0$
ㅁ. $2x^2+4x+3=0$	ㅂ. $2x^2+2x-1=0$

(1) 서로 다른 실근을 갖는다.

(2) 중근을 갖는다.

(3) 허근을 갖는다.

(4) 실근을 갖는다.

169) [수상 C481번]
이차방정식 $x^2-3x+k=0$ 에 대하여 다음을 구하여라.
(1) 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위

(2) 중근을 갖도록 하는 실수 k 의 값

(3) 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위

170) [수상 C483번]
이차방정식 $(k+2)x^2+2kx+k+3=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

171) [수상 C485번]
x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-(k+1)x+1=0$이 완전제곱식이 될 때, 실수 k의 값을 구하여라.

172) [수상 C487번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$이 중근 m을 가질 때, $a+m$의 값은? (단, a, m은 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

173) [수상 C489번]
x에 대한 이차방정식

$$x^2-2(k-a)x+(k^2-6k+b)=0$$

이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

174) [수상 C492번]
이차방정식 $x^2+2x-2=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2+\beta^2$

(4) $|\alpha-\beta|$

175) [수상 C494번]
이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(3) $(\alpha-1)(\beta-1)$

(4) $\dfrac{\alpha}{\alpha+2}+\dfrac{\beta}{\beta+2}$

176) [수상 C496번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근을 α, β라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+bx+a=0$ 의 두 근은 $\alpha+1$, $\beta+1$이다. 이때 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

177) [수상 C496번]
x에 대한 이차방정식 $x^2-(3a-2)x+1=0$의 두 근이 α, β 일 때, $(\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)$의 값은?
(단, a는 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

178) [수상 C498번]
이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\beta}{\alpha^2-4\alpha+2}+\frac{\alpha}{\beta^2-4\beta+2}$의 값을 구하여라.

x^2의 계수가 1이고, 다음 두 수를 근으로 하는 x에 대한 이차방정식을 구하여라.

179) [수상 C500번]
$-4,\ 3$

180) [수상 C501번]
$3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2}$

181) [수상 C503번]
다음 두 수를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.
(1) $-1,\ 2$

(2) $3+2\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}$

182) [수상 C504번]
이차방정식 $2x^2-3x+6=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$에 대하여 두 수 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 6인 이차방정식을 구하여라.

183) [수상 C505번]
이차방정식 $x^2+3x-1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, 다음 중 $\frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\beta}$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2-10x+1=0$ ② $x^2+10x-1=0$
③ $x^2+11x-1=0$ ④ $x^2+11x+1=0$
⑤ $x^2-11x+1=0$

184) [수상 C506번]
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3+2i$일 때, 실수 $a,\ b$의 값을 구하여라.

185) [수상 C512번]
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=6$이다. 이때 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

186) [수상 C515번]
x에 대한 이차방정식 $x^2-5(m-1)x-16m=0$의 두 근의 비가 $1:4$일 때, 상수 m의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

187) [수상 C517번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+6mx-m^2+1=0$의 한 근이 다른 근의 2배일 때, 양수 m의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{8}{3}$

188) [수상 C520번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+a^2-2a=0$의 두 근의 차가 2일 때, 모든 실수 a의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

189) [수상 C521번]
x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+k-2=0$의 두 근의 차가 4일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 5
④ 6 ⑤ 8

190) [수상 C522번]
x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+a+1=0$ 의 두 근이 연속된 자연수일 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

191) [수상 C530번]

이차방정식 $kx^2-(a+1)x-kb=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 $x=-1$을 근으로 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

192) [수상 C573번]

다음 중 이차식 x^2+4x+5의 인수인 것은?

① $x-2-2i$ ② $x-1+i$
③ $x+1-2i$ ④ $x+1+i$
⑤ $x+2-i$

방정식과 함수

해 = x
값 = y

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

(1) $y=|f(x)|$의 그래프
$y=f(x)$의 그래프에서 $y \geq 0$인 부분은 그대로 두고,
$y<0$인 부분은 x축에 대칭이동한다.
(2) $y=f(|x|)$의 그래프
$x \geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, $x<0$인 부분은 $x \geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.
(3) $|y|=f(x)$의 그래프
$y \geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고
$y<0$부분은 $y \geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.
(4) $|y|=f(|x|)$의 그래프
$x \geq 0$,$y \geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한다.

〈참고〉
① $y=|x-a|+|x-b|$와 같이 두 개 이상의 절댓값 기호를 포함한 식은 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나눈 다음, 각 구간에서 그래프를 그린다.
② $y=a|x-m|+n$에서 $x=m$이면 $y=n$이므로 그래프에서 꺽인 점의 좌표는 $(m,\ n)$이다.

가우스 함수

실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타 낼 때, $f(x)=[x]$를 가우스 함수라 한다.
이 때 정수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$n \leq x < n+1 \rightarrow f(x)=[x]=n$$

〈참고〉
① 함수 $f(x)=[x]$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 정수 전체의 집합이다.
② x가 정수이면 $[x]=x$이다.

절댓값 기호가 있을 때 최댓값, 최솟값

(1) $y=|x-\alpha|+k$ 꼴
⇨ $x=\alpha$에서 최솟값 k를 갖는다.
(2) $y=|x-\alpha|+|x-\beta|+|x-\gamma|$ 꼴 (단, $\alpha<\beta<\gamma$)
⇨ $x=\beta$에서 최솟값 $\gamma-\alpha$를 갖는다.

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같다.
① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$이면 만나지 않는다.
〈참고〉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같다.

① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$이면 만나지 않는다.

〈참고〉 x^2의 계수가 서로 다른 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식 D를 이용하여 판단할 수 있다.

함수의 그래프와 방정식

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$, 즉 x축의 교점의 개수와 같다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
〈참고〉 (1) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$에서 $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$라 할 때

① 두 근이 모두 p보다 크다.
- $D\ge 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다.
- $D\ge 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다.
- $f(p)<0$

④ 두 근이 $p,\ q\ (p<q)$사이에 있다.
- $D\ge 0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\dfrac{b}{2a}<q$

〈참고〉
이차방정식의 근의 분리에 대한 문제는 (ⅰ) 판별식, (ⅱ) 함숫값, (ⅲ) 대칭축 조건을 순서대로 따져 준다.

제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$인 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최대·최소는 다음과 같다.

(1) $\alpha\le p\le\beta$일 때,
$f(\alpha),\ f(\beta),\ f(p)$중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
(2) $p<\alpha$또는 $p>\beta$일 때,
$f(\alpha),\ f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

〈참고〉
제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소를 구할 때에는 이차함수의 그래프를 그려서 생각하는 것이 편리하다.

이차함수의 최대·최소의 활용

이차함수의 최대 · 최소의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.
(ⅰ) 구하는 값을 x에 대한 이차식 $f(x)$로 나타낸다.
(ⅱ) 주어진 상황을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.
(ⅲ) $f(x)$를 완전제곱식으로 변형하여 (ⅱ)에서 구한 범위에서의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

1. 해, 근 => x,   값 => y

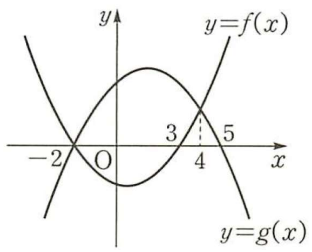
2. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.
ex1) $2x^2+5x=0$의 해 $\Leftrightarrow$ $2x^2+3x=-2x$의 해

3. 함수와 방정식의 관계
① 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 관계
$\Leftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$과 $y=mx+n$와의 관계

② 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 관계
$\Leftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$와 $y=0(x$축$)$의 관계

4. 함수와 방정식의 실근
① 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근
$\Leftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$과 $y=mx+n$의 교점의 x좌표

예)
두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 모든 해의 합을 구하여라.



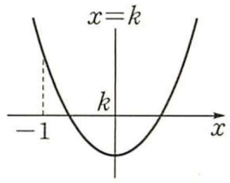
풀이]
$f(x)-g(x)=0$에서 $f(x)=g(x)$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 해는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로
$x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 구하는 모든 해의 합은 2이다.

② 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근
$\Leftrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$와 $y=0(x$축$)$의 교점의 x좌표

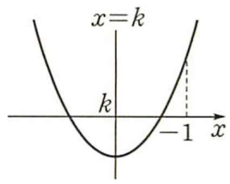
예)
이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 실근이 모두 -1보다 클 때, 모든 정수 k의 범위를 구하시오.

풀이]
$x^2-2x+k-1=0$는 $y=x^2-2x+k-1$과 $y=0(x$축$)$과의 관계로 볼 수 있다. 따라서 근의 분리에 의해서 $-2<k\le 2$

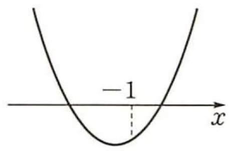
5. 근의 분리
① 두 근이 모두 -1보다 크다.
⇨ $D\ge 0$, $f(-1)>0$, $k>-1$



② 두 근이 모두 -1보다 작다.
⇨ $D\ge 0$, $f(-1)>0$, $k<-1$



③ 두 근 사이에 -1이 있다.
⇨ $f(-1)<0$



6. 응용
A원이 1년동안 $p\%$올랐다 => $A(1+\frac{p}{100})$

A원이 2년동안 $p\%$씩 올랐다 => $A(1+\frac{p}{100})^2$

B원이 1년동안 $p\%$내렸다 => $B(1-\frac{p}{100})$

B원이 2년동안 $p\%$씩 내렸다 => $B(1-\frac{p}{100})^2$

193) [수상 C582번]
다음 보기 중 다항함수가 아닌 것만을 있는 대로 골라라.

[보 기]

ㄱ. $y=\frac{3}{x}$ ㄴ. $y=1$ ㄷ. $y=\frac{1}{x^2-1}$

ㄹ. $y=x^2+2x-(x^2-x)$ ㅁ. $y=2x+1$

194) [수상 C584번]
다음 그래프를 그려라.

(1) $y=2$

(2) $x=2$

(3) $y=0$

(4) $x=0$

195) [수상 C586번]
기울기가 $\frac{1}{2}$, $(4,4)$을 지나는 일차함수를 구하고, 그래프를 그려라.

196) [수상 C587번]
$(-1,2),(1,6)$을 지나는 일차함수를 구하고, 그래프를 그려라.

197) [수상 C588번]
x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이고, y절편이 -1인 일차함수를 구하고, 그래프를 그려라.

다음 조건을 만족시키는 이차함수의 식을 구하고, 그래프를 그려라.

198) [수상 C594번]

그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 4)$이고, 점 $(0, 8)$을 지나는 이차함수

199) [수상 C595번]

그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이고, 두 점 $(2,\ -12)$, $(4,\ -32)$를 지나는 이차함수

200) [수상 C596번]

그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(-2,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ 이고, 한 점 $(-3,\ -1)$을 지나는 이차함수

다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

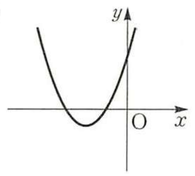
201) [수상 C606번]

$f(x)=-x^2+1 \quad (-1 \le x \le 2)$

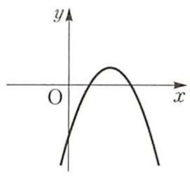
202) [수상 C618번]

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 다음과 같을 때, 상수 a, b, c의 부호를 정하여라.

(1)



(2)



다음 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 구하여라.

203) [수상 C621번]

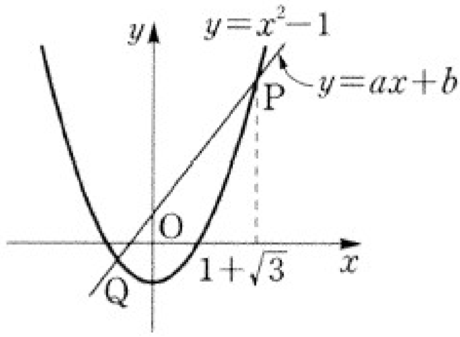
$y=x^2-x+5$, $y=3x+1$

204) [수상 C622번]

$y=-x^2+4x+1$, $y=-x+5$

205) [수상 C628번]

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점 P, Q 중 점 P의 x좌표가 $1+\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

206) [수상 C630번]

직선 $y=2x+k$가 이차함수 $y=x^2-6x+12$의 그래프와 두 점에서 만나고 그 두 점 사이의 거리가 $6\sqrt{5}$일 때, 실수k의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

다음 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 구하여라.

207) [수상 C633번]

$y=3x^2-6x$

208) [수상 C639번]

이차함수$y=x^2-x+1$의 그래프와 다음 직선의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=x$

(2) $y=3x-2$

(3) $y=-x-4$

209) [수상 C643번]
이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하여라.
(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

(4) 만난다.

다음 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 개수를 구하여라.
210) [수상 C648번]
$y=2x^2-8x+4$

다음 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구하여라.
211) [수상 C651번]
$y=2x^2-x+5$

212) [수상 C653번]

이차함수 $y=x^2-4x+k$의 그래프가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 k의 값 또는 범위를 구하여라.

(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) x축에 접한다.

(3) x축과 만나지 않는다.

213) [수상 C655번]

다음 함수의 그래프를 그려라. (단, y축은 그리지 마세요.)

(1) $y=(x-2)(x-4)$

(2) $y=(x-2)^2$

(3) $y=x^2-4x+6$ ($x^2-4x+6=0$의 실근은 존재하지 않는다.)

다음 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 조사하여라.

214) [수상 C657번]

$y=x^2+2x+2$, $y=-x+1$

215) [수상 C658번]

$y=2x^2-3x+4$, $y=x+2$

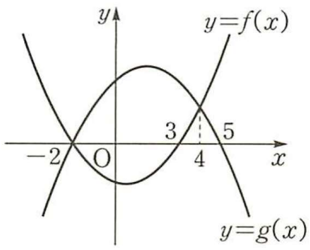
216) [수상 C669번]

다음을 구하여라.

(1) 이차함수 $y=2x^2-3x+2$의 그래프 위의 점 $(1,\ 1)$에서 이 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

(2) 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프와 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$를 구하여라.

217) [수상 C672번]
두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 모든 해의 합을 구하여라.



218) [수상 C701번]
이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=0$의 두 실근의 곱은?

(가) $f(1)=2$
(나) $f(x)$의 최댓값은 4이다.
(다) 방정식 $f(x)+10=0$의 두 실근의 합은 6이다.

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

219) [수상 C706번]
$-2 \le x \le 3$에서 함수 $y=x^2+2|x|-3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① -48 ② -36 ③ -30
④ -24 ⑤ -18

220) [수상 C710번]
함수 $y=(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)$가 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하여라.

221) [수상 C713번]
실수 a, b에 대하여 $-2 \le a \le 1$이고, $a-2b=3$일 때, ab의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

222) [수상 C714번]
$x-2y^2=1$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+2y^2-5x의 최솟값을 구하시오.

방정식과 함수

(4) 복소수

(5) 이차방정식

(6) 이차방정식과 이차함수

(7) 여러 가지 방정식

해 = x
값 = y

삼차방정식과 사차방정식의 풀이
(1) $f(x)=0$ 꼴의 삼차방정식과 사차방정식
인수분해 공식, 인수정리, 조립제법 등을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한 후 다음 성질을 이용하여 해를 구한다.
$ABC=0$ ⇨ $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$
(2) $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)$ 꼴의 방정식
① $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.
② $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형하여 인수분해한다.
(3) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\ (a\neq 0)$ 꼴의 방정식
각 항을 x^2으로 나눈 다음 $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하여 t에 대한 이차방정식을 푼다.

〈참고〉 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$의 한 근이 α이면 $\frac{1}{\alpha}$도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계
(1) 삼차방정식의 근과 계수의 관계
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$
(2) 세 수를 근으로 하는 삼차방정식
세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$
〈참고〉 n차방정식 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$에서
(모든 근의 합)$=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, (두 근끼리의 곱의 합)$=\frac{a_{n-2}}{a_n}$
(세 근끼리의 곱의 합)$=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$, (모든 근의 곱)$=(-1)^n\cdot\frac{a_0}{a_n}$

삼차방정식과 사차방정식의 켤레근
삼차방정식 또는 사차방정식에서
① 모든 계수가 유리수일 때, 한 근이 $p+\sqrt{q}$이면 $p-\sqrt{q}$도 근이다. (단, p는 유리수, $\sqrt{q}$는 무리수이다.)
② 모든 계수가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, $p,\ q$는 실수, $q\neq 0,\ i=\sqrt{-1}$이다.)

방정식 $\boldsymbol{x^3}=1$의 허근 ω의 성질
방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 다음이 성립한다.(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레 복소수이다.)
① $\omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1$
② $\omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
③ $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$
④ $\omega+\frac{1}{\omega}=-1,\ \overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=-1$
⑤ 다른 한 허근은 ω^2이고, $\omega^2=\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$이다.

〈참고〉 삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 하면 다음이 성립한다.
① $\omega^3=-1$ ② $\omega^2-\omega+1=0$
③ $\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$ ④ $\omega^2=-\overline{\omega},\ \overline{\omega^2}=-\omega$

미지수가 3개인 연립방정식

(1) 미지수가 3개인 연립방정식의 풀이

세 개의 미지수 중 한 개를 소거하여 미지수가 2개인 연립방정식을 만들어 푼다.

(2) 미지수가 3개인 순환형의 연립방정식의 풀이

(ⅰ) 주어진 방정식을 변끼리 더한다.

(ⅱ)(ⅰ)에서 구한 식과 주어진 식을 이용하여 연립방정식을 푼다.

연립이차방정식

(1) 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 정리한 후, 이차방정식에 대입하여 푼다.

(2) 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식

① 인수분해되는 식이 있을 때, 인수분해가 되는 이차방정식을 인수분해하여 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 두 개의 연립방정식을 푼다.

② 인수분해되는 식이 없을 때 두 식을 연립하여 상수항을 소거하거나 이차항을 소거하여 푼다.

(3) $x,\ y$에 대한 대칭식인 연립방정식 $x+y=u,\ xy=v$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

1. 삼차방정식의 세 근α, β, γ

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

$\Leftrightarrow\ a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

ex1) $x^3+3x^2+4x-7=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$의 값을 구하여라.

풀이] -1

$x^3+3x^2+4x-7=0$

$\Leftrightarrow\ 1(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$x=1$대입

$1^3+3 \cdot 1^2+4 \cdot 1-7=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$1=-(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$-1=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

2. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 근과 계수의 관계

① $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

② $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\frac{c}{a}$

③ $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

3. 켤레근

ex2) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a,b,c,d$가 실수)

$1+2i$가 근 => $1-2i$도 근

$\Rightarrow$ 인수로 x^2-2x+5를 가진다.

※ 만약 a,b,c가 복소수라면 성립하지 않는다.

ex3) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a,b,c,d$가 유리수)

$1+\sqrt{2}$가 근 => $1-\sqrt{2}$도 근

$\Rightarrow$ 인수로 x^2-2x-1를 가진다.

※ 만약 a,b,c가 실수라면 성립하지 않는다.

4. $x^3=1$의 한 허근을 ω

① $\omega^3=1$

② $\overline{\omega}^3=1$

③ $\omega^2+\omega+1=0$

④ $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

⑤ $\omega+\overline{\omega}=-1$

⑥ $\omega\overline{\omega}=1$

5. $x^3=-1$의 한 허근을 ω

① $\omega^3=-1$

② $\overline{\omega}^3=-1$

③ $\omega^2-\omega+1=0$

④ $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$

⑤ $\omega+\overline{\omega}=1$

⑥ $\omega\overline{\omega}=1$

6. 연립방정식

① 두 방정식의 공통의 해를 찾는다.

② 문자의 개수와 식의 개수가 일치할 때, 숫자인 해를 구할 수 있다.

ex4) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이] $x=2,\quad y=-3,\quad z=-2$

ex5) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이] $x=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}z$

한 문자를 다른 한 문자로 표현은 가능하다. 하지만 해를 숫자로 구할 수 없다.

223) [수상 C736번]
x에 대한 삼차방정식 $x^3-2x^2+kx+6=0$의 한 근이 3일 때, 다른 두 근의 곱은? (단, k는 실수이다.)

① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

224) [수상 C737번]
삼차방정식 $x^3-(1+2k)x+2k=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 합을 구하여라.

225) [수상 C751번]
방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 실근은?

① $-1\pm\sqrt{3}$ ② $-3\pm2\sqrt{2}$ ③ $2\pm\sqrt{3}$
④ $2\pm2\sqrt{5}$ ⑤ $3\pm\sqrt{5}$

226) [수상 C752번]
사차방정식 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 한 실근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3
④ 5 ⑤ 7

227) [수상 C761번]
세 수 -1, 2, 4를 근으로 하고, x^3의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식을 구하여라.

228) [수상 C766번]
삼차방정식 $x^3+ax-b=0$ 의 두 근이 $-2, 1-\sqrt{3}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

229) [수상 C767번]
삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$의 두 근이 $2-\sqrt{2}i$, c일 때, 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -7 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 7

230) [수상 C771번]
방정식 $x^2+x+1=0$을 만족하는 x에 대하여 $x^{2012}+x^{2011}+x^{2010}+x^{2009}+x^{2008}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

231) [수상 C787번]

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2y=1 \\ x^2+y^2+x+y=2 \end{cases}$를 만족시키는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하여라.

다음 연립방정식을 풀어라.

232) [수상 C791번]

$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-8 \end{cases}$

233) [수상 C794번]

다음 물음에 답하여라.

(1) 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=18 \end{cases}$이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 양수$a$의 값을 구하여라.

(2) 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2(a-3) \\ xy=a^2+4 \end{cases}$가 실근을 가질 때, 실수$a$의 최댓값을 구하여라.

234) [수상 C805번]
사차방정식 $x^4+3x^2+36=0$의 네 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$라 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}$의 값을 구하여라.

235) [수상 C811번]
삼차방정식 $x^3-4x^2+(k+4)x-2k=0$의 근이 모두 실수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\geq -1$　② $k\leq 2$　③ $1\leq k\leq 4$
④ $k\leq 1$　⑤ $k\geq 2$

236) [수상 C823번]
방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보 기

ㄱ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{100}=\omega+1$
ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)=2\omega$
ㄷ. $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=1$
ㄹ. $\frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=0$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

237) [수상 C824번]
방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\frac{\omega-1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega-1}$의 값을 구하여라.

238) [수상 C825번]

$\omega = \dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$일 때, $\omega^{2019} + \dfrac{1}{\omega^{2019}}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

239) [수상 C826번]

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}$이라 하자. 이때 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$의 값을 구하여라.

240) [수상 C834번]

연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족시키는 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 모두 구하여라.

241) [수상 C836번]

연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+xy+k=0 \end{cases}$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

부등식과 함수

(8) 이차부등식

해 = x
값 = y

부등식의 기본성질
① $a>b,\ b>c$ 이면 $a>c$
② $a>b$ 이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$
③ $a>b$, $c>0$ 이면 $ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
④ $a>b$, $c<0$ 이면 $ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$
└── 음수를 곱하거나 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다
〈참고〉
① $a,\ b$ 가 같은 부호이면 $ab>0,\ \frac{a}{b}>0$
② $a,\ b$ 가 다른 부호이면 $ab<0,\ \frac{a}{b}<0$

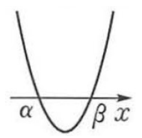
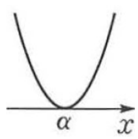
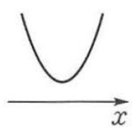
두 수 또는 두 식의 대소 관계
(1) 차의 부호를 조사
① $A-B>0$ 이면 $A>B$
② $A-B=0$ 이면 $A=B$
③ $A-B<0$ 이면 $A<B$
(2) 제곱의 차의 부호를 조사 : $A>0,\ B>0$ 일 때
$A^2-B^2>0$ 이면 $A>B$
(3) 두 수의 비를 조사 : $A>0,\ B>0$ 일 때
① $\frac{A}{B}>1$ 이면 $A>B$
② $\frac{A}{B}=1$ 이면 $A=B$
③ $\frac{A}{B}<1$ 이면 $A<B$

절댓값 기호를 1개 포함한 일차부등식
$a>0,\ b>0$ 일 때,
① $|x|<a$ 이면 $-a<x<a$
② $|x|\geq a$ 이면 $x\leq -a$ 또는 $x\geq a$
③ $a<|x|<b$ 이면
$-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$ (단,, $b>a$)
〈참고〉 절댓값 기호를 포함한 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0 이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 푼다.

절댓값 기호를 2개 이상 포함한 일차부등식
절댓값 기호를 2 개 이상 포함한 $|x-a|+|x-b|<c$ 꼴의 부등식은 x 의 값의 범위를 다음과 같이 세 경우로 나누어 푼다. (단, $a<b,\ c>0$)
(ⅰ) $x<a$ (ⅱ) $a\leq x<b$ (ⅲ) $x\geq b$
이때 위의 세 가지 경우에서 구한 각 범위를 모두 합한 범위가 구하는 부등식의 해이다.

이차부등식의 해

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$에서 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 이차부등식의 해는 다음과 같다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=f(x)$의 그래프			
$f(x)>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$f(x)<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.

〈참고〉 $a<0$일 때에는 이차부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수를 양수로 바꾸어 생각한다. 이때 부등호의 방향이 바뀜에 주의한다.

해가 주어진 이차부등식

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

(2) 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0$

〈참고〉 주어진 해를 이용하여 이차부등식을 작성할 때에는 이차부등식의 부등호의 방향을 먼저 정한다.

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

① $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a>0, D<0$

② $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a<0, D<0$

③ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow a>0, D\leq 0$

④ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow a<0, D\leq 0$

〈참고〉 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하고, $f(x)<0$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

연립이차부등식

(1) 연립부등식 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 의 해는 두 부등식 $f(x)>0$, $g(x)>0$의 공통부분이다.

(2) 부등식 $f(x)<g(x)<h(x)$의 해는 두 부등식

$f(x)<g(x)$, $g(x)<h(x)$의 공통부분이다.

〈참고〉 연립부등식은 각 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸 다음 공통부분을 찾는다.

1. 부등식의 해, 근 => x범위

2. 대소비교 : ‘차’를 통해서 주로 비교한다.

ex1) $0<a<b$이면 $3b^2>a^2+2ab$를 밝히세요.
풀이]
$3b^2-(a^2+2ab)=3b^2-2ab-a^2=(3b+a)(b-a)>0$
$3b^2>a^2+2ab$

3. 절댓값 부등식

ex2) 부등식 $|x|<a\ (a>0)$을 풀어라.
풀이]
$-a<x<a$

ex3) 부등식 $|x|\geq a\ (a>0)$을 풀어라.
풀이]
$-a\geq x$ or $a\leq x$

ex4) $2|x-1|<x$

풀이]
(ⅰ) $x<1$일 때, $-2(x-1)<x$, $-3x<-2$
$\therefore\ x>\frac{2}{3}$
그런데 $x<1$이므로 $\frac{2}{3}<x<1$
(ⅱ) $x\geq 1$일 때, $2(x-1)<x\ \ \therefore\ x<2$
그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x<2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{2}{3}<x<2$

※ 기본적으로 (ⅰ), (ⅱ)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $x\geq 1$, $x<1$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (ⅰ)의 답도 답이 되고, (ⅱ)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다. $\frac{2}{3}<x<1$ 또는 $1\leq x<2$이 정답이다. 하지만 수학적으로 ‘$\frac{2}{3}<x<1$ 또는 $1\leq x<2$’이나 $\frac{2}{3}<x<2$이나 같은 정답이다. 그러므로 굳이 따로 전자처럼 쓸 필요가 없는 것이다. 그래서 학교 서술형에도 후자처럼 써야한다.

ex5) 부등식 $2|x-1|+3|x+1|<9$을 풀어라.
풀이]
부등식 $2|x-1|+3|x+1|<9$에서
(ⅰ) $x<-1$일 때
$-2(x-1)-3(x+1)<9$, $-2x+2-3x-3<9$
$-5x<10 \qquad \therefore\ x>-2$
그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$
(ⅱ) $-1\leq x<1$일 때
$-2(x-1)+3(x+1)<9$, $-2x+2+3x+3<9$
$\therefore\ x<4$
그런데 $-1\leq x<1$이므로 $-1\leq x<1$
(ⅲ) $x\geq 1$일 때
$2(x-1)+3(x+1)<9$, $2x-2+3x+3<9$
$5x<8 \qquad \therefore\ x<\frac{8}{5}$
그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x<\frac{8}{5}$
이상에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<\frac{8}{5}$

ex6) 부등식 $1<|2x+1|<6$을 풀어라.
풀이]
$1<|2x+1|<6$에서
$1<2x+1<6$ 또는 $-6<2x+1<-1$
(ⅰ) $1<2x+1<6$에서 $0<2x<5$ $\therefore$ $0<x<\frac{5}{2}$
(ⅱ) $-6<2x+1<-1$에서 $-7<2x<-2$
$\therefore -\frac{7}{2}<x<-1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-\frac{7}{2}<x<-1$ 또는 $0<x<\frac{5}{2}$

4. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.
$2x^2+5x\le 0$의 해 = $2x^2+3x\le -2x$의 해

5. 함수와 부등식과의 관계
부등식 $x^2-2x+1<x+5$의 실근
$\Rightarrow$ $y=x^2-2x+1$가 $y=x+5$보다 아래에 놓여있는 x범위

6. 보통의 해($a>0$, $\alpha<\beta$)
① $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ $\Rightarrow$ $\alpha<x<\beta$
② $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ $\Rightarrow$ $x<\alpha$ 또는 $\beta<x$

ex7) $x^2-3x+2<0$
풀이]
$x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$
$\therefore$ $1<x<2$

ex8) $x^2+2x-8\ge 0$
풀이]
$x^2+2x-8\ge 0$에서 $(x+4)(x-2)\ge 0$
$\therefore$ $x\le -4$ 또는 $x\ge 2$

7. 특수한 해

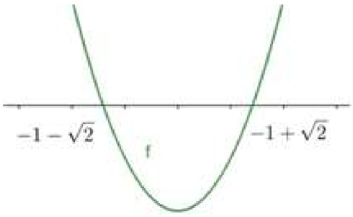
① 실근을 가지면 인수분해

② 허근을 가지면 완전제곱식

ex9) $x^2+2x-1\le 0$

풀이]

$x^2+2x-1\le 0$에서 $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})\le 0$

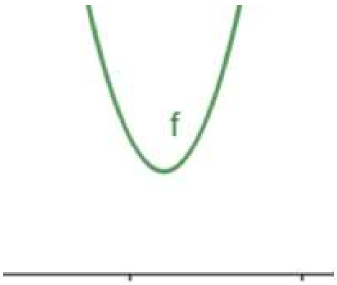


$-1-\sqrt{2}\le x\le -1+\sqrt{2}$

ex10) $x^2-2x+4<0$

풀이]

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3$



따라서 $x^2-2x+4<0$의 해는 없다.

※ 빨리 풀기

ⅰ) 우선 판별식으로 실근인지 허근인지 판단.

ⅱ) 작다는 안쪽으로 암기한다.$(a>0)$

$a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \;\Rightarrow\; \alpha<x<\beta$

8. 연립부등식: 공통의 범위

ex11) $5x-3\le x^2+3<2x+11$

풀이]

$5x-3\le x^2+3$에서

$x^2-5x+6\ge 0$, $(x-2)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 3$ …… ㉠

$x^2+3<2x+11$에서

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ …… ㉡

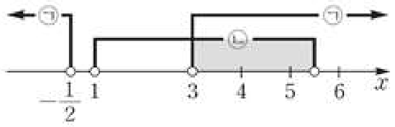
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2<x\le 2$ 또는 $3\le x<4$

9. 공통 범위구하기

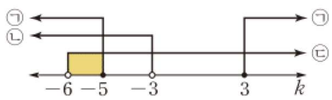
ex12) ㉠ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 3$ ㉡ $1 < x < \frac{11}{2}$

풀이] $3 < x < 5.5$



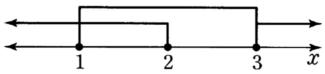
ex13) ㉠ $k \leq -5$ 또는 $k \geq 3$ ㉡ $k < -3$ ㉢ $k > -6$

풀이] $-6 < k \leq -5$



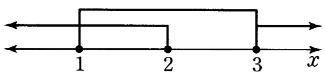
ex14) ㉠ $x \leq 2$ 또는 $3 \leq x$ ㉡ $1 \leq x \leq 3$

풀이] $1 \leq x \leq 2$ 또는 $x = 3$



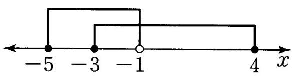
ex15) ㉠ $x \leq 2$ 또는 $3 \leq x$ ㉡ $1 \leq x < 3$

풀이] $1 \leq x \leq 2$



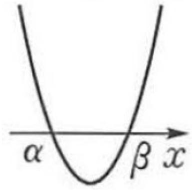
ex16) $\{x \mid -5 \leq x < -1\} - \{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$

풀이] $-5 \leq x < -3$



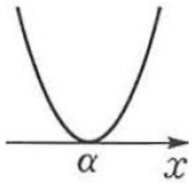
10. $y = ax^2 + bx + c$와 x축$(y=0)$과의 관계

①



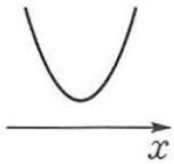
$a > 0$, $D > 0$

②



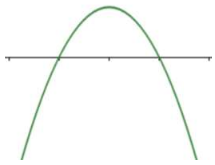
$a > 0$, $D = 0$

③



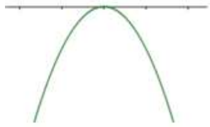
$a > 0$, $D < 0$

④



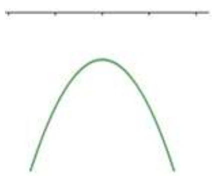
$a < 0$, $D > 0$

⑤



$a < 0$, $D = 0$

⑥



$a < 0$, $D < 0$

※ 절대 암기하는 것이 아니라, 이해해서 적용해야한다.

11. 케이스에 따른 해 구하기

ex17) 이차부등식 $ax^2+2x+a>0$이 해를 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?(단, $a \neq 0$)

풀이]

(ⅰ) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ⅱ) $a<0$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a \cdot a>0,\ a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0 \qquad \therefore\ -1<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a의 값의 범위는

$a>0$ 또는 $-1<a<0$

※ 기본적으로 (ⅰ), (ⅱ)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $a>0$, $a<0$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (ⅰ)의 답도 답이 되고, (ⅱ)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다.

242) [수상 C843번]
$a>b>0,\ c>d>0$일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

[보 기]

ㄱ. $a+c>b+d$　　ㄴ. $ac>bd$　　ㄷ. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

243) [수상 C844번]
$a<b<0$일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　ㄴ. $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$　　ㄷ. $\frac{a^2}{b}<\frac{b^2}{a}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

244) [수상 C852번]
$x-3y=10$이고 $-5\le x+y\le -1$일 때, y의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

$1 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 5$ 일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하여라.

245) [수상 C853번]

$x+y$

246) [수상 C857번]

$-3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2$ 일 때, 다음 식의 값의 범위를 구하여라.

(1) $x+y$

(2) $x-y$

(3) xy

(4) $\frac{x}{y}$

247) [수상 C858번]
$-1 < x \le 2,\ 1 < y \le 3$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $0 < x+y < 5$ ② $-4 < x-y < -1$ ③ $-3 < xy < 6$
④ $1 < y-x < 2$ ⑤ $-1 < \frac{x}{y} < 2$

248) [수상 C862번]
부등식 $(1-a)x > a+b$의 해가 $x < -2$일 때, 부등식 $(a-b)x \ge 6$의 해는? (단, a, b는 실수이다.)

① $x \ge -3$ ② $x \ge 2$ ③ $x \le 2$
④ $x \ge 3$ ⑤ $x \le 3$

249) [수상 C866번]
x에 대한 부등식 $(a+1)x < a$를 풀어라.

250) [수상 C871번]
다음 중 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x+a > bx+3$이 성립하도록 하는 조건으로 옳은 것은?

① $a < 3,\ b = -1$ ② $a < 3,\ b = 1$
③ $a > 3,\ b = -1$ ④ $a > 3,\ b = 1$
⑤ $a = 3,\ b = 1$

251) [수상 C872번]
x에 대한 부등식 $a^2x-a^2 \geq x+b$의 해가 모든 실수일 때, 실수 b의 최댓값을 구하여라.

252) [수상 C873번]
x에 대한 부등식 $(a-b)x+a-2b \leq 0$의 해가 존재하지 않을 때, 부등식 $(a-3b)x+a-5b>0$의 해를 구하여라.

다음 부등식을 풀어라.
253) [수상 C874번]
$|2x-3|<1$

254) [수상 C881번]
부등식 $|x-1|<2x-3$의 해가 $x>a$에 포함되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

255) [수상 C887번]
부등식 $1 < |x-a| \le 3$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 8일 때, 정수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

256) [수상 C888번]
$||x-1|-2| < 2$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

257) [수상 C890번]
부등식 $|2x-3|+1 > a$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

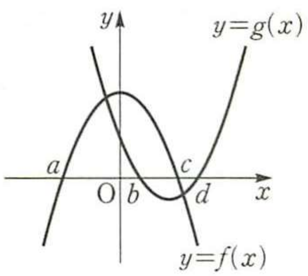
① $a > 1$ ② $a \ge 1$ ③ $a > -1$
④ $a < 1$ ⑤ $a \le 1$

258) [수상 C892번]
부등식 $\left|\frac{1}{3}x+2\right|+k \le 0$을 만족시키는 x가 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k > -2$ ② $k \ge -2$ ③ $k > -1$
④ $k \le 0$ ⑤ $k < 1$

259) [수상 C902번]
오른쪽 그림은 이차함수
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$을 나타낸 것이다. 이때 x에 대한 부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n \geq 0$의 해를 구하여라.

260) [수상 C903번]
두 이차함수
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x) \geq 0$의 해를 구하여라. (단, $a<b<c<d$)



다음 이차부등식을 이차함수의 그래프를 이용하여 풀어라.
261) [수상 C907번]
$-x^2+2x+3>0$

다음 이차부등식을 이차함수의 그래프를 이용하여 풀어라.

262) [수상 C913번]

$x^2+2x+1 \geq 0$

263) [수상 C914번]

$x^2-4x+5<0$

264) [수상 C915번]

$3x^2-6x+3>0$

265) [수상 C916번]

$2x^2-2x+\frac{1}{2} \leq 0$

다음 이차부등식을 풀어라.

266) [수상 C923번]

$x^2+2x-1 \leq 0$

다음 이차부등식을 풀어라.

267) [수상 C927번]

$x^2-8x+16>0$

268) [수상 C930번]

$x^2-2x+4<0$

269) [수상 C935번]
다음과 같은 해를 갖는 이차항의 계수가 1인 이차부등식을 구하여라.
(1) $-1<x<4$

(2) $x<-2$ 또는 $x>4$

(3) $-2\leq x\leq 3$

(4) $x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$

270) [수상 C942번]
이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $2<x<4$일 때, $\frac{c}{b}$의 값을 구하여라. (단, $a,\ b,\ c$는 실수이다.)

다음 부등식을 풀어라.
271) [수상 C948번]
$x^2-2|x|-3<0$

272) [수상 C949번]
$|x^2-1|\geq 3$

다음 연립방정식을 풀어라.
273) [수상 C957번]
$5x-3 \le x^2+3 < 2x+11$

274) [수상 C965번]
모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m-1)x^2+2(m-1)x+3>0$이 성립하기 위한 실수 m의 값의 범위는?

① $1<m<4$ ② $1 \le m<4$
③ $1 \le m \le 4$ ④ $m<1$ 또는 $m>4$
⑤ $m \le 1$ 또는 $m \ge 4$

275) [수상 C967번]
x에 대한 이차부등식 $x^2+2(n+2)x-4(n+2)<0$의 해가 존재하지 않을 때, 정수 n의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

276) [수상 C971번]
이차부등식 $x^2-(k-8)x+k \le 0$의 해가 단 한 개 존재할 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

277) [수상 C974번]
이차부등식 $-x^2+6x-a<0$을 만족시키지 않는 x의 값은 오직 k뿐이다. 이때 상수 k의 값을 구하여라. (단, a는 실수이다.)

278) [수상 C976번]
부등식 $ax^2+2ax-5>0$ 의 해가 존재하도록 하는 상수 a의 값이 아닌 것은?

① -10　② -8　③ -5
④ 5　⑤ 8

279) [수상 C978번]
$3 \le x \le 6$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+4x-3+4k \ge 0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하여라.

280) [수상 C979번]
$3 < x < 6$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+4x-3+4k \ge 0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하여라.

281) [수상 C980번]
$3 < x < 6$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+4x-3+4k > 0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하여라.

282) [수상 C981번]
$3 \le x \le 6$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+4x-3+4k > 0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하여라.

283) [수상 C982번]
$-1 \leq x \leq 3$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-4x+a-3 \leq 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 범위를 구하여라.

284) [수상 C986번]
이차방정식 $x^2-2kx+9=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

285) [수상 C993번]
x에 대한 이차방정식 $ax^2-2x+a-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $-1<\alpha<0$, $2<\beta<3$이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

286) [수상 C997번]
다음 부등식의 해는?

$$2x-3 \le 3x+1 < 5x-7$$

① $x< -4$ ② $-4<x\le 4$ ③ $-4\le x<4$
④ $x>4$ ⑤ $x\ge 4$

287) [수상 C1031번]
x에 대한 부등식 $ax^2-4ax+6a\le 0$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

|보 기|

ㄱ. $a>0$이면 해는 없다.
ㄴ. $a=0$이면 해는 1개이다.
ㄷ. $a<0$이면 해는 모든 실수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

288) [수상 C1042번]
이차부등식 $x^2-3k<0$을 만족시키는 정수 x가 7개가 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

289) [수상 C1054번]
$0 \le x \le 3$에서 이차부등식 $x^2 - ax \le -a^2 + 9$가 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-9 < a < 9$
② $-9 \le a \le 0$
③ $-3 < a < 3$
④ $0 \le a \le 3$
⑤ $0 \le a < 9$

290) [수상 C1057번]
이차함수 $y = 2x^2 - 2x - 3$의 그래프에서 이차함수 $y = x^2 + x + 7$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위를 구하여라.

291) [수상 C1072번]
연립부등식 $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ x^2 - 5|x| + 6 \le 0 \end{cases}$ 의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

292) [수상 C1079번]
연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4|x| < 0 \\ x^2 + (2-k)x - 2k < 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x가 오직 한 개뿐일 때, 실수 k의 최댓값을 구하여라. (단, $k \ne -2$)

도형의 방정식

(9) 점

(10) 직선의 방정식

(11) 원의 방정식

(12) 이동

두 점 사이의 거리

(1) 수직선 위의 두 점 $A(x_1), B(x_2)$사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=|x_2-x_1|$

(2) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

특히 원점과 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

<참고>

(1) 점 P가 x축 위에 있다. ⇨ $\mathrm{P}(\mathrm{a},\ 0)$으로 놓는다.

(2) 점 P가 y축 위에 있다. ⇨ $\mathrm{P}(0,\ \mathrm{a})$으로 놓는다.

(3) 점 P가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있다.

⇨ $P(a, f(a))$으로 놓는다.

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

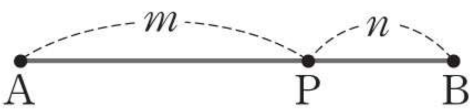
$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)\ (\text{단, } m\neq n)$$

<증명>

선분 AB 위의 한 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\ (m>0,\ n>0)$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다고 한다.



■ 참 고 | 점 P를 선분 AB의 내분점이라고 한다.

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x를 구해 보자.

(i) $x_1<x_2$일 때 $(x_1<x<x_2)$

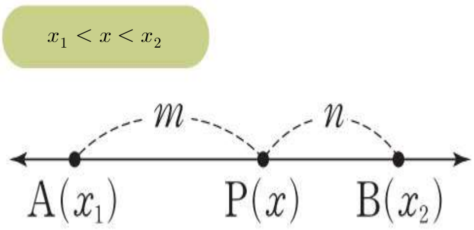
$\overline{\mathrm{AP}}=x-x_1,\ \overline{\mathrm{PB}}=x_2-x$

이고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n$이므로

$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$

$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

이다.



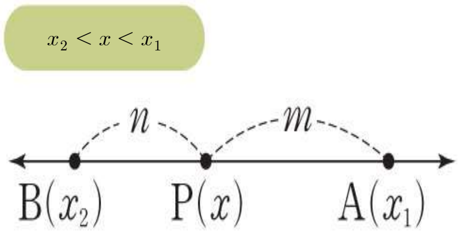
(ii) $x_1>x_2$일 때 $(x_2<x<x_1)$

$\overline{\mathrm{AP}}=x_1-x,\ \overline{\mathrm{PB}}=x-x_2$

이고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n$이므로

$(x_1-x):(x-x_2)=m:n$

$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$



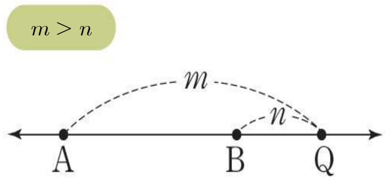
<참고> 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 은 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점이므로 그 좌표는

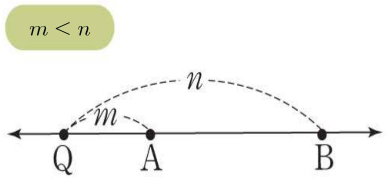
$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 한다.



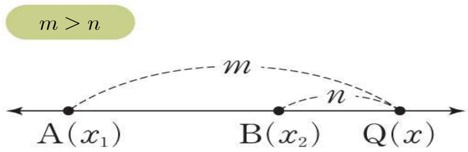


■ 참 고 | 점 Q를 선분 AB의 외분점이라고 한다.

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x를 구해 보자.

먼저 $x_1<x_2$일 때

(ⅰ) $m>n$이면



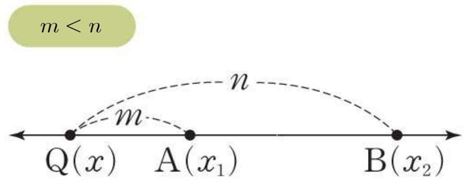
$\overline{\mathrm{AQ}}=x-x_1$, $\overline{\mathrm{BQ}}=x-x_2$에서

$(x-x_1):(x-x_2)=m:n$이므로

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이다.

(ⅱ) $m<n$이면



$\overline{\mathrm{AQ}}=x_1-x$, $\overline{\mathrm{BQ}}=x_2-x$에서

$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$이므로

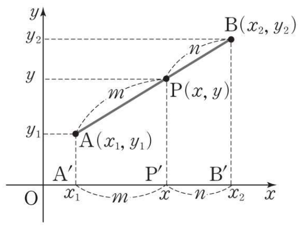
$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이다.

또한, $x_1>x_2$일 때에도 같은 결과를 얻을 수 있다.

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 $(x,\ y)$를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, P′이라고 하면 다음이 성립한다.



$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P'}}:\overline{\mathrm{P'B'}}$$

$=m:n$

이때 점 P′은 x축 위에서 선분 A′B′을 $m:n$으로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

이다.

또, y축 위에서도 마찬가지로 생각하면

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

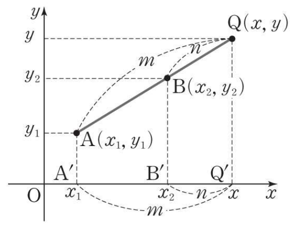
이다.

따라서 내분하는 점 P는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

특히, $m=n$일 때 선분 AB의 중점 M은 다음과 같다.

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



마찬가지 방법으로 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 이은 선분 AB를

$m:n\ \ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

으로 외분하는 점 Q를 구하면 다음과 같다.

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

삼각형의 무게중심과 평행사변형

(1) 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

[증명]

변 BC의 중점을 $M(x',\ y')$이라고 하면

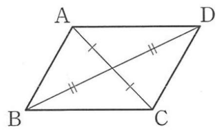
$$x'=\frac{x_2+x_3}{2},\ y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$

무게중심 $G(x,\ y)$는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2x'+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{2y'+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.



(2) 평행사변형 ABCD의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

즉 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점은 일치한다.

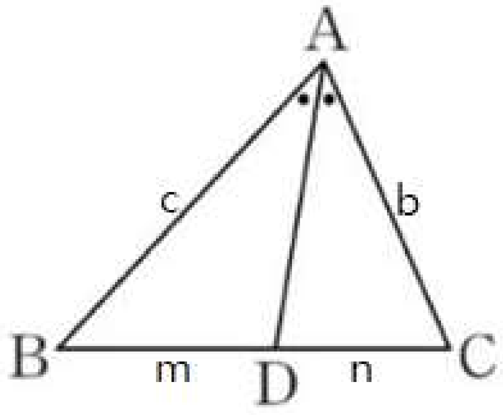
<참고>

(1) 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분한 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

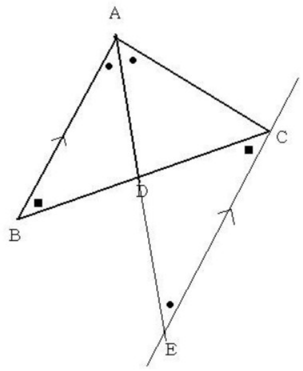
(2) 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 세 삼각형 GAB, GBC, GCA의 넓이는 서로 같다.

· 내각의 이등분선의 정리

$c : b = m : n$



[증명]

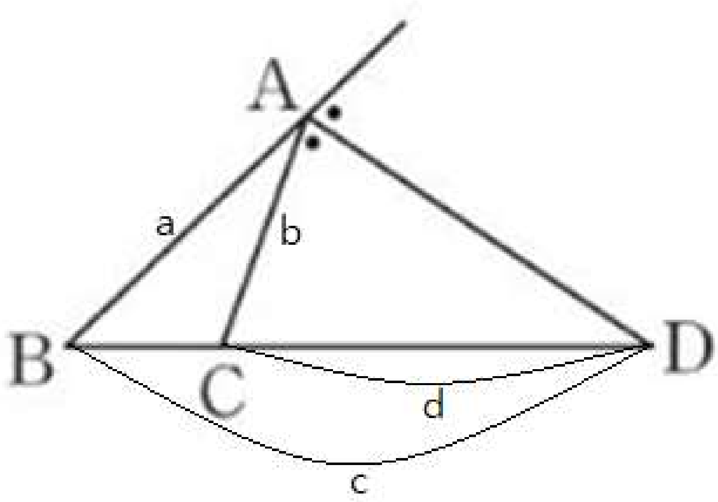


점 C를 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선과 , $\overline{AD}$의 연장선과 만나는 교점을 E라 하면
∠BAD = ∠DEC
∠ABD= ∠DCE
△CAE는 이등변 삼각형이므로 $\overline{AC} = \overline{CE}$

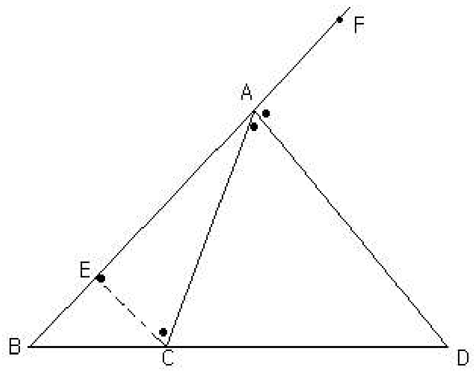
△DAB∽△DEC 이므로
$\overline{AB}$: $\overline{CE}$ = $\overline{BD}$: $\overline{CD}$
$\overline{AC} = \overline{CE}$이므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

· 외각의 이등분선의 정리

$a : b = c : d$



[증명]



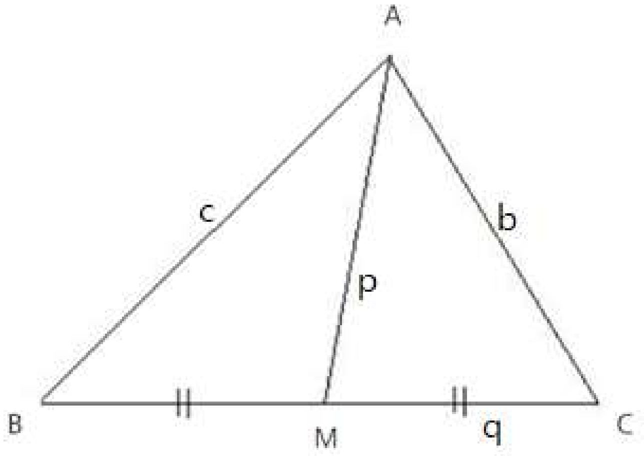
점 C에서 변 AD에 평행선을 긋고 변 BA 와의 교점을 E 라 하면,
∠DAC = ∠ACE (∵ 엇각)
∠FAD = ∠AEC (∵ 동위각) 이므로
$\overline{AC} = \overline{AE}$ 이다.

그리고 △BAD ∽ △ BEC 이므로
$\overline{BA}$: $\overline{AE} = \overline{BD}$: $\overline{CD}$ 이다.
여기서 $\overline{AC} = \overline{AE}$ 이므로
$\overline{BA}$: $\overline{AC} = \overline{BD}$: $\overline{CD}$ 이다.

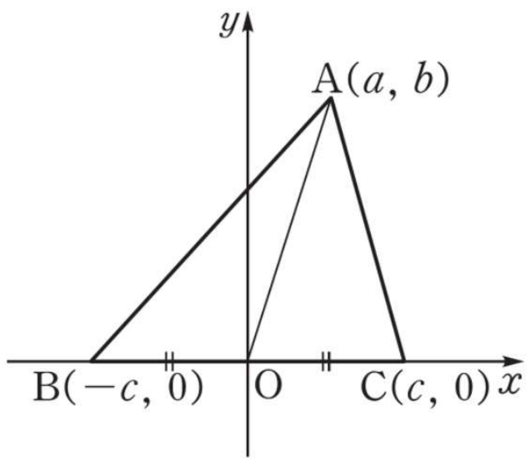
그러므로 $\overline{AB}$: $\overline{AC} = \overline{BD}$: $\overline{CD}$ 이다.

· 파푸스의 중선정리

$b^2+c^2=2(p^2+q^2)$



[증명]



그림과 같이 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 정하면 점 M은 원점이 된다.
이때, $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이라고 하면

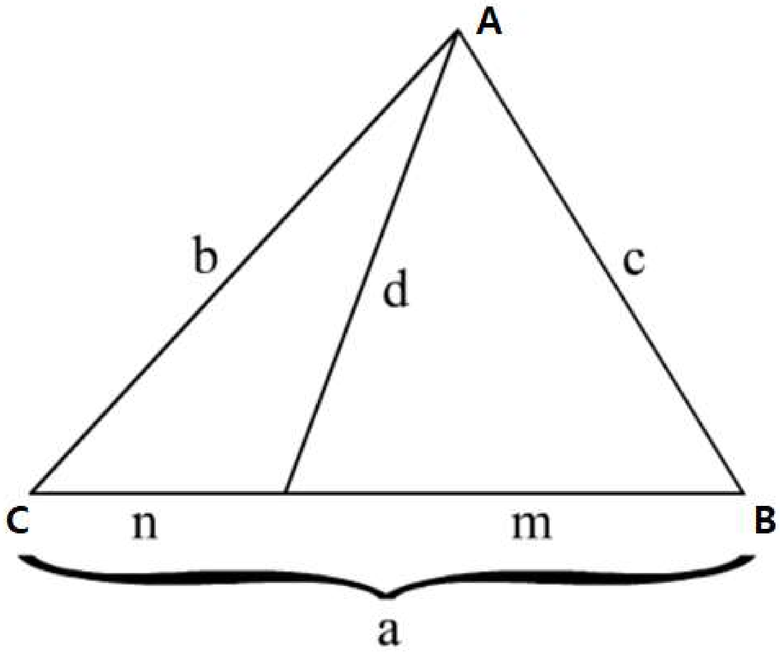
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2+(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

한편, $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$ 이므로
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$

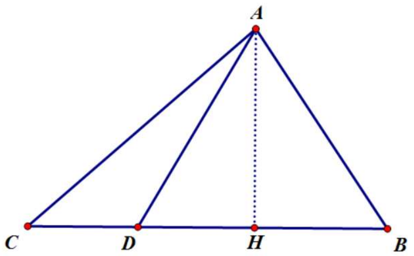
따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이 성립한다.

· 스튜어트 정리

$mb^2 + nc^2 = a(d^2 + mn)$



[증명]



$\overline{AH} = h$, $\overline{DH} = x$라 하자.

그럼 $\triangle ADH$에서 피타고라스 정리에 의해, $h^2 + x^2 = d^2$이다.
$\triangle AHB$에서 마찬가지로
$h^2 + (m-x)^2 = c^2$,
$h^2 + m^2 - 2mx + x^2 = d^2 + m^2 - 2mx = c^2$이다.

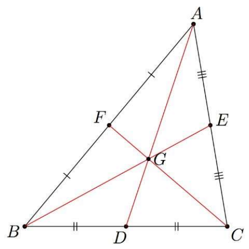
그리고 $\triangle AHC$에서 마찬가지로
$h^2 + (n+x)^2 = b^2$,
$h^2 + n^2 + 2nx + x^2 = d^2 + n^2 + 2nx = b^2$이다.

두번째 식에 n을, 세번째 식에 m을 곱하여 더해주면,
$nd^2 = m^2n - 2mnx + md^2 + mn^2 + 2mnx$
$= d^2(m+n) + mn(m+n)$
$= (m+n)(mn+d^2)$
$= a(mn+d^2) = mb^2 + nc^2$

삼각형의 오심

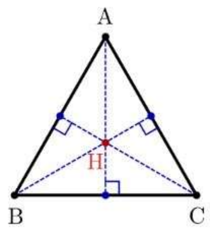
무게중심

① 세 중선의 교점
② 꼭짓점으로부터 2:1의 길이비를 이룬다.
③ 6개 삼각형의 넓이는 같다.
④ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



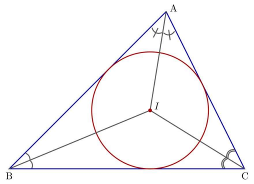
수심

① 꼭짓점에서 각 변으로 내린 수선의 교점



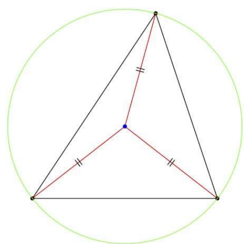
내심

① 각의 이등분선의 교점
② 내접원의 중심
③ 각 변에 내린 수선의 발의 길이가 모두 같다.



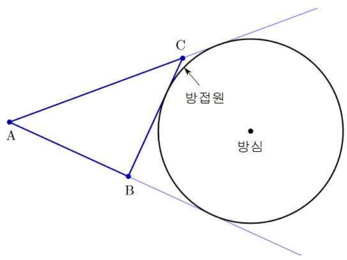
외심

① 세 변의 수직이등분선의 교점
② 외접원의 중심
③ 꼭짓점에서 외심까지의 길이가 모두 같다.



방심

삼각형의 외부에 있으면서 삼각형의 한 변과 다른 두 변의 연장선과 접하는 원을 그 삼각형의 방접원이라고 한다.
① 방접원의 중심



1. 거리

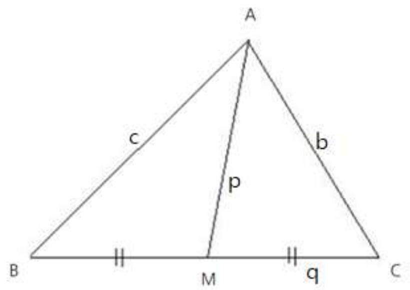
x_1, x_2사이의 거리: $|x_1 - x_2|$ = $|x_2 - x_1|$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$사이의 거리: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

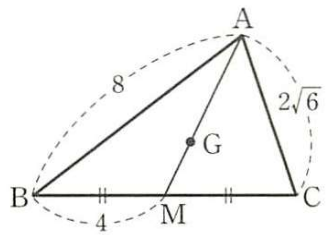
2. 정리

① 파푸스의 중선정리

$b^2 + c^2 = 2(p^2 + q^2)$



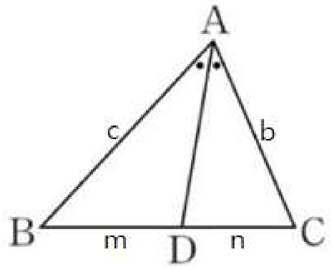
ex1) 그림과 같이 삼각형 ABC에서 점 M은 변 BC의 중점이다. $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이를 구하여라.



풀이] 파푸스 중점 연결정리에 의해 $2\sqrt{7}$

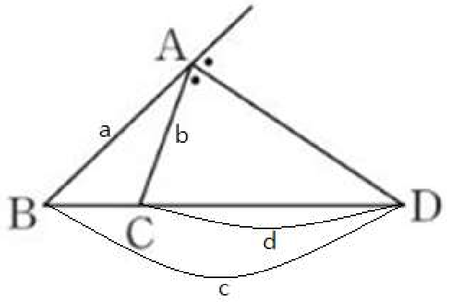
② 내각의 이등분선의 정리

$c : b = m : n$

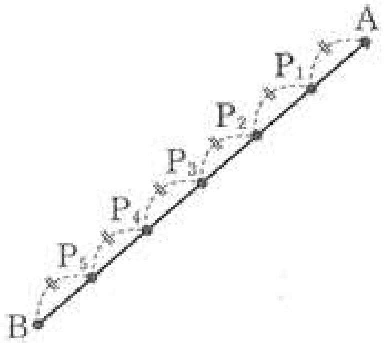


③ 외각의 이등분선의 정리

$a : b = c : d$



3. 내분점과 외분점



① B와 A를 1:5로 내분하는 내분점: P_5

② B와 A를 1:2로 내분하는 내분점: P_4

③ A와 B를 1:2로 내분하는 내분점: P_2

④ A와 B를 1:1로 내분하는 내분점(중점): P_3

⑤ P_4와 P_3를 1:2로 외분하는 외분점: P_5

⑥ P_3와 P_4를 2:3로 외분하는 외분점: P_1

⑦ P_3와 P_5를 1:2로 외분하는 외분점: P_1

⑧ P_4와 P_2를 2:1로 외분하는 외분점: A

ex2) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

풀이] $\overline{\mathrm{AB}}$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

$\dfrac{5\cdot3+3\cdot5}{5+3}=\dfrac{15}{4}$, $\dfrac{5\cdot(-6)+3\cdot2}{5+3}=-3$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{15}{4},\ -3\right)$

ex3) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $2:1$으로 외분하는 점 Q의 좌표

풀이] $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$으로 외분하는 점 Q의 좌표

$\dfrac{2\cdot3-1\cdot5}{2-1}=1$, $\dfrac{2\cdot(-6)-1\cdot2}{2-1}=-14$, $\mathrm{Q}(1,\ -14)$

ex4) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$의 중점 M의 좌표

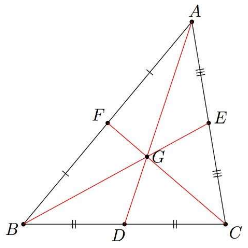
풀이] $\mathrm{M}(4,\ -2)$

$\dfrac{5+3}{2}=4$, $\dfrac{2-6}{2}=-2$ $\quad\therefore \mathrm{M}(4,\ -2)$

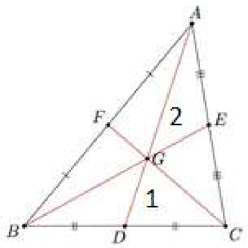
4. 오심

1] 무게중심

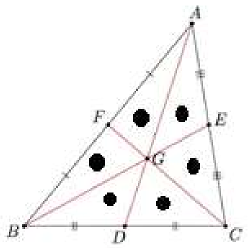
① 세 중선의 교점



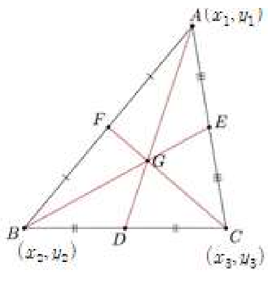
② 꼭짓점으로부터 2:1의 길이비를 이룬다.



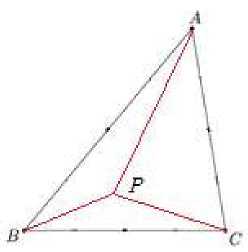
③ 6개 삼각형의 넓이는 같다.



④ $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

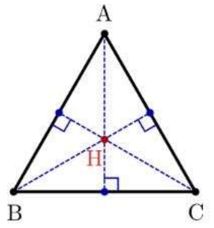


⑤ $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$이 최소가 되는 점 P가 무게중심



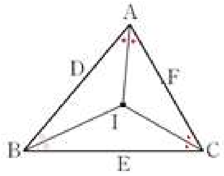
2] 수심

① 꼭짓점에서 각 변으로 내린 수선의 교점

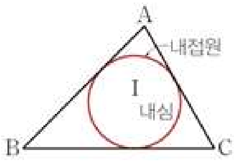


3] 내심

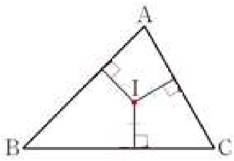
① 각의 이등분선의 교점



② 내접원의 중심

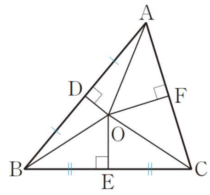


③ 각 변에 내린 수선의 길이가 모두 같다.

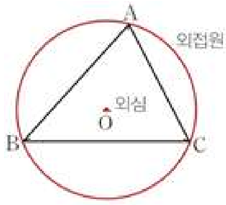


4] 외심

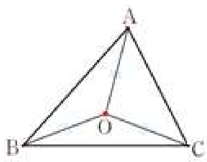
① 세 변의 수직이등분선의 교점



② 외접원의 중심

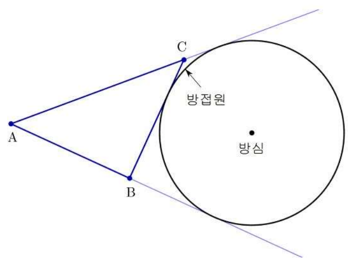


③ 꼭짓점에서 외심까지의 길이가 모두 같다.



5] 방심

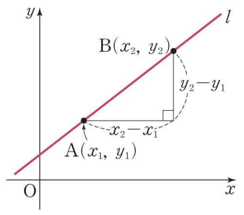
삼각형의 외부에 있으면서 삼각형의 한 변과 다른 두 변의 연장선과 접하는 원을 그 삼각형의 방접원이라고 한다. 방접원의 중심.

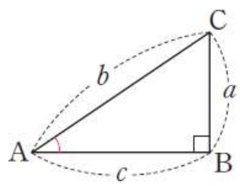


5. 자취(점의 흔적)문제 TIP

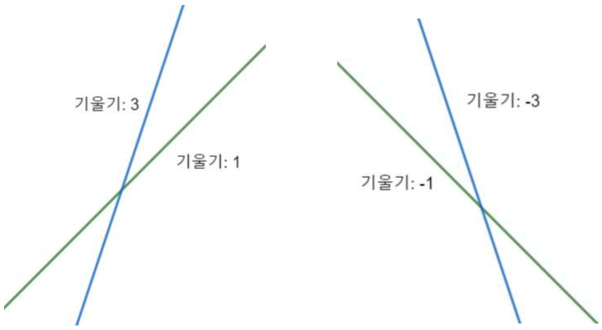
구하고자하는 점을 (x, y), 이용하는 점을 (a, b)로 둔다.

6. 기울기





① 기울기=$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\Leftrightarrow$ $\tan A = \dfrac{a}{c}$



② 기울기가 양수일 때 기울기가 클수록 급격하고,
기울기가 음수일 때 기울기가 작을수록 급격하다.

293) [수상 C1101번]
$a,\ b$가 실수일 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{15}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

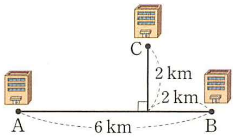
294) [수상 C1102번]
실수 $x,\ y$에 대하여
$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$$
의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하여라.

295) [수상 C1104번]
두 점 $\mathrm{A}(2,\ 2),\ \mathrm{B}(-1,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

296) [수상 C1105번]
두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 1),\ \mathrm{B}(3,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표를 구하여라.

297) [수상 C1107번]
어떤 회사가 세 대리점 A, B, C에서 같은 거리에 있는 지점에 물류 창고를 지으려고 한다. 세 대리점 A, B, C의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때, 물류 창고와 각 대리점 사이의 거리는?



① $3\mathrm{km}$ ② $\sqrt{10}\,\mathrm{km}$ ③ $\sqrt{11}\,\mathrm{km}$
④ $2\sqrt{3}\,\mathrm{km}$ ⑤ $\sqrt{13}\,\mathrm{km}$

298) [수상 C1108번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$와 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

① 5 ② $\sqrt{34}$ ③ 6
④ 7 ⑤ $5\sqrt{3}$

299) [수상 C1112번]
세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ 0)$, $\mathrm{C}(8,\ 4)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 하는 꼭짓점 D의 좌표를 구하여라.

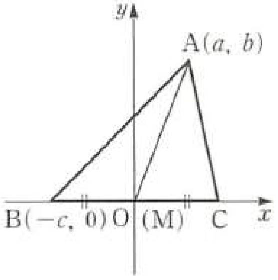
300) [수상 C1113번]
평행사변형 ABCD의 두 꼭짓점 A, B의 좌표가 각각 $(2,\ 4)$, $(-2,\ -4)$이고, 두 대각선 AC, BD의 교점의 좌표가 $(8,\ 2)$일 때, 두 꼭짓점 C, D의 좌표를 구하여라.

301) [수상 C1115번]

오른쪽 그림과 같이 두 점 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\boxed{}$$
$$=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

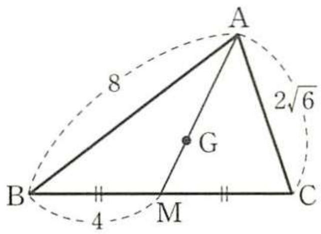
이 성립한다. 이 때 $\boxed{}$ 안에 들어갈 알맞은 식은?



① $\sqrt{a^2+b^2}$
② $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
③ $(a^2+b^2+c^2)$
④ $(a^2-b^2-c^2)$
⑤ $(-a^2+b^2-c^2)$

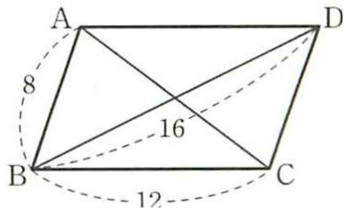
302) [수상 C1116번]

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 점 M은 변 BC의 중점이고 점 G는 무게중심이다.
$\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=2\sqrt{6}$, $\overline{BM}=4$ 일 때, $\overline{GM}$의 길이를 구하여라.



303) [수상 C1117번]

오른쪽 그림과 같이 평행사변형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=12$, $\overline{BD}=16$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하여라.



304) [수상 C1122번]

수직선 위의 세 점 $A(-2)$, $B(5)$, $P(3)$에 대하여 점 P는 선분AB를 어떻게 나누는 점인지 말하여라

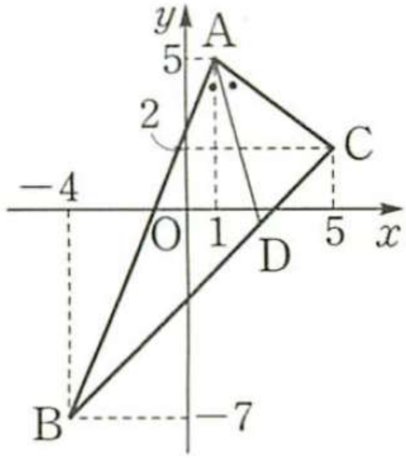
305) [수상 C1128번]
두 점 $A(-1,\ -6)$, $B(3,\ 2)$와 선분 AB의 연장선 위의 점 $C(a,\ b)$에 대하여 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$일 때, $a+b$의 값은?
(단, $a>0$)

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

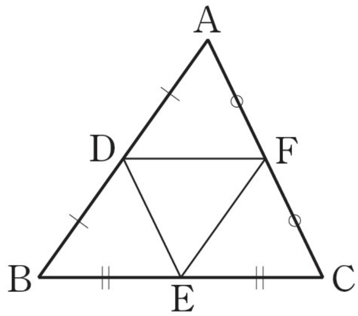
306) [수상 C1130번]
두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(5,\ 2)$에 대하여 선분 AB의 연장선 위에 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$를 만족시키는 점을 $C(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수, $a>0$)

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

307) [수상 C1132번]
오른쪽 그림과 같이 세 점 $A(1,\ 5)$, $B(-4,\ -7)$, $C(5,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 D의 좌표를 구하여라.



308) [수상 C1141번]
삼각형 ABC의 각 변의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심이 일치함을 증명하여라.



309) [수상 C1142번]
삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심이 서로 일치함을 증명하여라.

310) [수상 C1146번]
점 P가 직선 $2x-y-4=0$위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$와 점 P를 이은 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

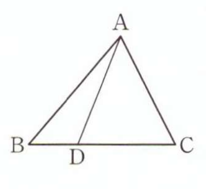
① $6x-3y-4=0$
② $6x-3y+4=0$
③ $6x+3y-4=0$
④ $3x-y-2=0$
⑤ $3x-y+2=0$

311) [수상 C1147번]
점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$과 직선 $2x+y-5=0$ 위를 움직이는 점 B에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 자취의 방정식이 $px+3y+q=0$이다. 이때 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

312) [수상 C1148번]
두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=3$을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

313) [수상 C1161번]
정삼각형 ABC에 대하여 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ -2)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하여라.
(단, 점 C는 제4사분면 위의 점이다.)

314) [수상 C1163번]
삼각형 ABC의 변 BC위의 점 D에 대하여 $2\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때,
$$2\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=3(\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{BD}}^2)$$
이 성립함을 설명하여라.



315) [수상 C1169번]
두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $a:(1-a)$로 내분하는 점이 제1사분면 위에 있을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

316) [수상 C1172번]
두 점 $\mathrm{A}(5,\ -2)$,$\mathrm{B}(-1,\ 4)$를 잇는 직선 AB 위에 있고 $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$를 만족시키는 점 C의 좌표를 모두 구하여라.

317) [수상 C1179번]
세 점 $\mathrm{A}(4, 10)$, $\mathrm{B}(-2, 1)$, $\mathrm{C}(7, -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CA}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{D, E, F}$라 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표를 구하여라.

도형의 방정식

(9) 점

(10) 직선의 방정식

(11) 원의 방정식

(12) 이동

직선의 방정식

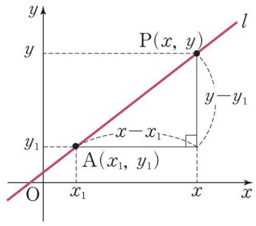
(1) 좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

[설명]

좌표평면에서 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선 l의 방정식을 구해 보자.

직선 l 위의 점 A가 아닌 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 기울기

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$



은 점 P의 위치에 관계없이 항상 일정하다.

양변에 $x-x_1$을 곱하면

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

을 얻는다. 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$도 위의 방정식을 만족하므로, ①은 구하는 직선의 방정식이다.

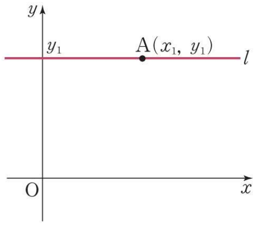
그림과 같이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선 l의 기울기는 0이므로 이 직선의 방정식은

$$y-y_1=0(x-x_1)$$

즉,

$$y=y_1$$

이다.



(2) 좌표평면에서 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

[설명]

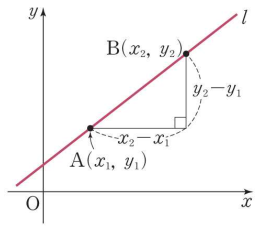
좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선 l의 방정식을 구해 보자.

(ⅰ) $x_1\neq x_2$일 때, 직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

이고, 이 직선이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$



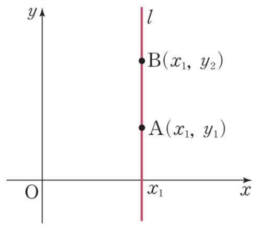
(ⅱ) $x_1=x_2$일 때, 직선 l은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고,

y축에 평행하므로 직선 l 위의 모든 점에 대하여

x좌표는 항상 x_1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$x=x_1$$



<참고>

(1) 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한(y축에 수직인) 직선의 방정식은 $y=y_1$

(2) 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행한(x축에 수직인) 직선의 방정식은 $x=x_1$

(3) x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ (단, } ab\neq 0)$$

두 직선의 위치 관계

(1) 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

① 평행하다. ⇨ $m=m'$, $n\neq n'$

② 일치한다. ⇨ $m=m'$, $n=n'$

③ 수직이다. ⇨ $mm'=-1$

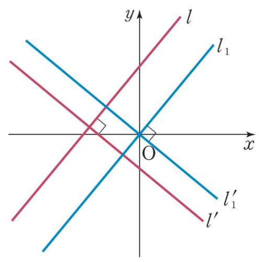
[증명]

좌표평면 위에서 두 직선이 서로 수직일 조건에 대하여 알아보자.

두 직선

$l: y=mx+n\ (m\neq 0)$

$l': y=m'x+n'\ (m'\neq 0)$



이 서로 수직이면 두 직선 l, l'에 각각 평행하고

원점을 지나는 두 직선

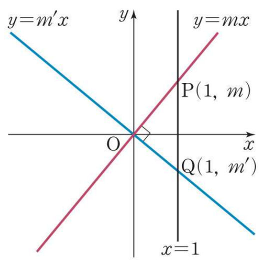
$l_1: y=mx$

$l_1': y=m'x$

도 서로 수직이다.

따라서 두 직선 l, l'이 서로 수직일 조건은 l_1, l_1'이 서로 수직일 조건과 같다.

이제 두 직선 l_1, l_1'이 서로 수직일 조건을 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$과 두 직선

$y=mx$, $y=m'x$의 교점을 각각 P, Q라고 하면

$P(1,\ m)$, $Q(1,\ m')$

이고 삼각형 POQ는 직각삼각형이다.

따라서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=\overline{PQ}^2$ …… ① 이므로

$\overline{OP}^2=1+m^2$, $\overline{OQ}^2=1+m'^2$, $\overline{PQ}^2=(m-m')^2$을 ①에 대입하면

$(1+m^2)+(1+m'^2)=(m-m')^2$ …… ②

이다. 이 식을 정리하면

$mm'=-1$이다.

또한, $mm'=-1$이면 ②가 성립하고 따라서 ①이 성립하므로 삼각형 POQ는 직각삼각형이다.

따라서 두 직선 l_1, l_1'은 서로 수직이고, l, l'도 서로 수직이다.

(2) $abc\neq 0$, $a'b'c'\neq 0$일 때, 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이

① 평행하다. ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

② 일치한다. ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

③ 수직이다. ⇨ $aa'+bb'=0$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

(1) 직선 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선

$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지난다.

(2) 한 점에서 만나는 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수) ……㉠

꼴로 나타낼 수 있다. (단, 직선 $a'x+b'y+c'=0$은 제외한다.)

〈참고〉 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 무수히 많으며 방정식 ㉠에 k의 값을 대입하여 구할 수 있다.

점과 직선 사이의 거리

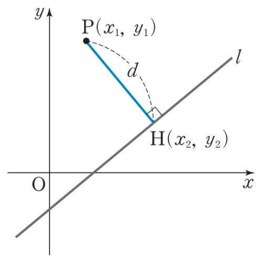
좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[증명]

좌표평면 위의 한 점 P에서 P를 지나지 않는 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 PH의 길이를 점 P와 직선 l 사이의 거리라고 한다.

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 거리 d를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$라고 하면



(ⅰ) $a\neq 0,\ b\neq 0$일 때

직선 l의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이고, 직선 PH는 직선 l에 수직이므로 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$이다.

이 식을 변형하면 $\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$이다.

이 식의 값을 k로 놓으면

$x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$ ⋯⋯ ①

따라서 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}$

$=|k|\sqrt{a^2+b^2}$ ⋯⋯ ②

또, $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$는 직선 l 위의 점이므로 $ax_2+by_2+c=0$

①에서 $x_2=x_1+ak,\ y_2=y_1+bk$이므로

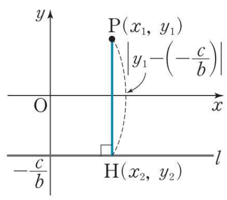
$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$

따라서 $k=\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$ ⋯⋯ ③

③을 ②에 대입하면

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ⋯⋯ ④

(ⅱ) $a=0,\ b\neq 0$일 때

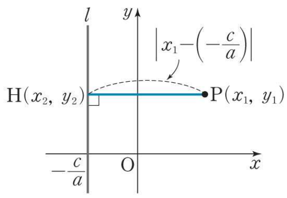


직선 l의 방정식은 $y=-\dfrac{c}{b}$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\left|y_1-\left(-\dfrac{c}{b}\right)\right|=\left|\dfrac{by_1+c}{b}\right|$

이다. 이것은 ④에 $a=0$을 대입한 것과 같다.

(ⅲ) $a\neq 0,\ b=0$일 때



직선 l의 방정식은 $x=-\dfrac{c}{a}$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\left|x_1-\left(-\dfrac{c}{a}\right)\right|=\left|\dfrac{ax_1+c}{a}\right|$

이다. 이것은 ④에 $b=0$을 대입한 것과 같다.

〈참고〉

평행한 두 직선 사이의 거리

① 두 직선 $ax+by+c=0,\ ax+by+c'=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

② 두 직선 $y=mx+n,\ y=mx+n'$ 사이의 거리는 $\dfrac{|n-n'|}{\sqrt{m^2+1}}$이다.

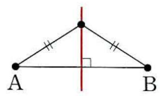
자취의 방정식

자취의 방정식을 구하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.

(ⅱ) 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

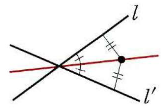
(ⅲ) $x,\ y$의 제한된 범위를 구한다.



〈참고〉

① 두 점 A, B로부터 같은 거리 에 있는 점들의 자취는 선분 AB의 수직 이등분선이다.

② 두 직선 $l,\ l'$으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취는 두 직선 $l,\ l'$이 이루는 각의 이등분선이다.



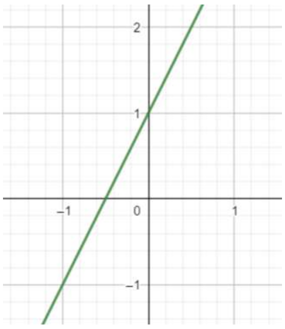
1. 관점에 따른 식의 이해

① 방정식: 해를 구하는 것

ex1) $2x-y+1=0$의 해를 구하여라.
풀이] (1, 3), (2, 5), (3, 7) …

② 직선의 방정식: 기하학적으로 표현하는 것

ex2) $2x-y+1=0$의 그래프를 그려라.
풀이] $2x-y+1=0$, $y=2x+1$
기울기가 2고 y절편이 1인 직선



2. 직선의 이해

$y=2x+k$위에 $(0,1)$이 있다.
⇔ $y=2x+k$가 $(0,1)$을 지난다.
⇔ $y=2x+k$가 $(0,1)$을 만족한다.
⇔ $y=2x+k$에 $(0,1)$을 대입했을 때, 식이 성립한다.

3. 한 직선의 공식들

① 기울기가 m이고 y절편이 k인 직선의 방정식
=> $y=mx+k$

② 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식
=> $y-y_1=m(x-x_1)$

③ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식
=> $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1 \neq x_2$)

④ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식
=> $y=y_1$

⑤ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식
=> $x=x_1$

⑥ x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은
=> $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (단, $ab \neq 0$)

4. 두 직선의 공식들

	한 점	평행	일치	수직
$y=mx+n$ $y=m'x+n'$	$m\neq m'$	$m=m'$ $n\neq n'$	$m=m'$ $n=n'$	$mm'=-1$
$ax+by+c=0$ $a'x+b'y+c'=0$ (단, $a,b,c,a',b',c'\neq 0$)	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	$aa'+bb'=0$

5. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

=> $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)
꼴로 나타낼 수 있다. (단, 직선 $a'x+b'y+c'=0$은 제외한다.)

ex3) 두 직선 $3x-2y+3=0,\ x-3y-3=0$의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식?

풀이] $4x-5y=0$
$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$ (k는 실수)으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로
$3-3k=0\qquad\therefore\ k=1$
따라서 $(3x-2y+3)+(x-3y-3)=0\qquad\therefore\ 4x-5y=0$

6. 점과 직선 사이의 거리(수직거리)

좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

다음 직선의 방정식을 구하여라.

318) [수상 C1194번]

x절편이 -3, y절편이 6인 직선의 방정식

319) [수상 C1195번]

점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선 l의 x절편이 y절편의 2배일 때, 직선 l의 방정식을 구하여라. (단, y절편은 0이 아니다.)

320) [수상 C1198번]

점 $(-9,\ 1)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

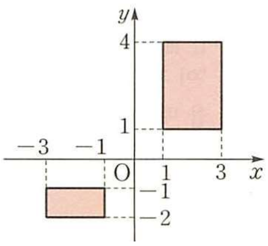
321) [수상 C1199번]

세 점 $\mathrm{A}(1,\ k)$, $\mathrm{B}(k,\ 7)$, $\mathrm{C}(5,\ 11)$이 한 직선 위에 있도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

322) [수상 C1202번]
직선 $y=mx+3$이 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

323) [수상 C1203번]
오른쪽 그림과 같은 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기를 구하여라.



324) [수상 C1220번]
두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5)$을 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ ② $y=\frac{1}{2}x+4$ ③ $y=-2x+7$
④ $y=-2x+2$ ⑤ $y=2x+6$

325) [수상 C1223번]
세 직선 $x+2y=0$, $x-y+3=0$, $ax+y+a+1=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

326) [수상 C1225번]
서로 다른 세 직선 $ax+y+5=0$, $2x+by-4=0$, $x+2y+3=0$에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어질 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

327) [수상 C1226번]
직선 $x+2y+4+k(3x-y-9)=0$이 k값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하여라.

328) [수상 C1228번]
임의의 실수 k에 대하여 직선 $(k+2)x-(2k-1)y+k-1=0$이 항상 지나는 점의 좌표를 구하여라.

329) [수상 C1229번]
두 직선 $3x-2y+3=0$, $x-3y-3=0$의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

점 $(5,\ 7)$과 다음 직선 사이의 거리를 구하여라.

330) [수상 C1232번]

$x=3$

331) [수상 C1233번]

$y=-1$

다음에서 주어진 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

332) [수상 C1237번]

점 $(2,\ -4)$, 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$

다음에서 주어진 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하여라.

333) [수상 C1240번]

$y=x-3,\ y=x+3$

334) [수상 C1244번]
두 직선 $x+2y-1=0$, $2x+y+1=0$으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취 중 그 그래프가 원점을 지나는 것은?

① $2x+y=0$ ② $x-y=0$ ③ $x-2y=0$
④ $x+y=0$ ⑤ $3x-y=0$

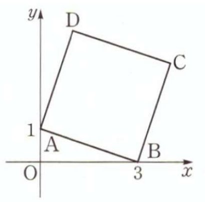
335) [수상 C1246번]
두 직선 $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $x+7y+3=0$ ㄴ. $x-7y-21=0$
ㄷ. $7x-y+21=0$ ㄹ. $7x+y-3=0$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄷ, ㄹ

336) [수상 C1253번]
오른쪽 그림과 같은 정사각형 ABCD에 대하여 $\mathrm{A}(0,1), \mathrm{B}(3,0)$일 때, 직선 CD의 x절편을 구하여라.
(단, 점 C, D는 제 1사분면 위의 점이다.)



337) [수상 C1254번]
점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선 l의 x절편이 y절편의 2배일 때, 직선 l의 방정식을 구하여라. (단, y절편은 0이 아니다.)

338) [수상 C1255번]
직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$과 x축의 교점을 P, 직선 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=2$와 y축의 교점을 Q라 할 때, 직선 PQ의 방정식은?

① $\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$ ② $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ ③ $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$
④ $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$ ⑤ $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$

339) [수상 C1257번]
세 점 $\mathrm{A}(0,\ -3)$, $\mathrm{B}(a-4,\ 0)$, $\mathrm{C}(6,\ a)$가 삼각형을 이루지 않도록 하는 양수 a의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

340) [수상 C1258번]
세 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(8,\ -6)$, $\mathrm{C}(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 점 A를 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 방정식은?

① $y=-3x+7$ ② $y=-2x+6$
③ $y=-x+5$ ④ $y=x+3$
⑤ $y=2x+2$

341) [수상 C1261번]
직선 $(2k-1)x+(k+2)y+3k-4=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 P를 지날 때, 점 P와 원점 사이의 거리는?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

342) [수상 C1263번]
두 직선 $x+y-2=0$, $mx-y+m+1=0$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

343) [수상 C1266번]
직선 $y=mx+3m+2$가 상수 m의 값에 관계없이 항상 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다. $\mathrm{A}(1,\ 3)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하여라.

344) [수상 C1267번]
세 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, $\mathrm{B}(4,0)$, $\mathrm{C}(0,2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $mx+y-m+2=0$ 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

345) [수상 C1270번]
두 직선 $x-3y+7=0$, $3x-2y-1=0$의 교점과 점 $(6,-4)$를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

346) [수상 C1273번]
직선 $3x+ay+1=0$과 직선 $bx+cy-8=0$은 수직이고, 두 직선의 교점의 좌표는 $(1,\ -2)$이다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

347) [수상 C1275번]
좌표평면에서 세 직선 $4x-3y+2=0$,
$2x-y+1=0$, $ax-y+5=0$에 의하여 생기는 교점이 2개가 되도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하여라.

348) [수상 C1276번]
서로 다른 세 직선 $ax+y+1=0$, $x+by+3=0$, $2x+y+5=0$에 의하여 좌표평면이 4개의 영역으로 나누어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

349) [수상 C1280번]
직선 $x-2y+4=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하여라.

350) [수상 C1281번]
두 점 $\mathrm{A}(1, a)$, $\mathrm{B}(5, b)$를 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $x-3y=0$일 때, ab의 값은?

① -35 ② -30 ③ -25
④ -20 ⑤ -15

351) [수상 C1285번]
세 점 $\mathrm{A}(2,\ 7)$, $\mathrm{B}(-2,\ -1)$, $\mathrm{C}(4,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는?

① 16 ② $8\sqrt{5}$ ③ 28
④ 32 ⑤ $16\sqrt{5}$

352) [수상 C1286번]
네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 4)$, $\mathrm{C}(-1,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에 대하여 다음을 구하여라.
(1) 점 B와 대각선 AC 사이의 거리

(2) 평행사변형 OABC의 넓이

353) [수상 C1287번]
세 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 12일 때, 정수 a의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

354) [수상 C1288번]
세 직선 $x-y+1=0$, $x+7y+9=0$, $3x+y-13=0$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

도형의 방정식

원의 방정식

(1) 원의 방정식

중심이 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

(2) 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

$x,\ y$에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$(A^2+B^2-4C>0)$은

중심이 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원을 나타낸다.

여러 가지 원의 방정식

(1) 좌표축에 접하는 원의 방정식

① 중심이 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

② 중심이 $(a,\ b)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

③ 중심이 $(a,\ a)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$$(x\pm a)^2+(y\pm a)^2=a^2$$

(2) 아폴로니오스의 원

두 점 A, B에 대하여

$$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=\mathrm{m}:\mathrm{n}\quad(\mathrm{m}>0,\ \mathrm{n}>0,\ \mathrm{m}\neq\mathrm{n})$$

인 점 P가 그리는 도형은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

두 원의 교점을 지나는 원과 직선의 방정식

두 원

$$\mathrm{O}\ ;\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{c}=0$$

$$\mathrm{O}'\ :\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{a}'\mathrm{x}+\mathrm{b}'\mathrm{y}+\mathrm{c}'=0$$

이 두 점에서 만날 때,

(1) 두 교점을 지나는 원 중에서 원 O'을 제외한 원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

(단, $k\neq-1$인 실수)

(2) 두 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

즉 $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$

원의 접선의 방정식

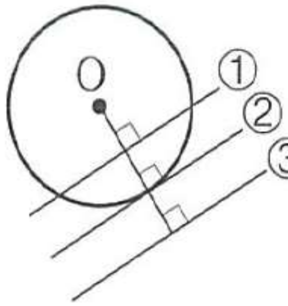
(1) 원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치관계는

① $d<r$ ➲ 두 점에서 만난다.

② $d=r$ ➲ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $d>r$ ➲ 만나지 않는다.



(2) 원의 접선의 방정식

① 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

② 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$

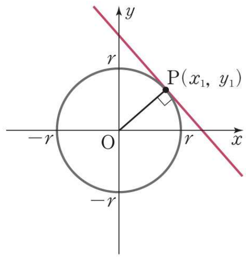
[증명]

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

(ⅰ) $x_1\neq 0$, $y_1\neq 0$일 때, 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{y_1}{x_1}$이고,

선분 OP는 점 P에서의 접선에 수직이므로

접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

이다. 이것을 정리하면 $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$이다.

그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 원 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=r^2$

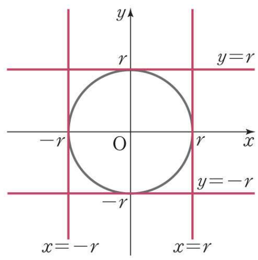
이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots\cdots$ ①

(ⅱ) $x_1=0$ 또는 $y_1=0$일 때, 점 P가 좌표축 위에 있으므로 접선의 방정식은

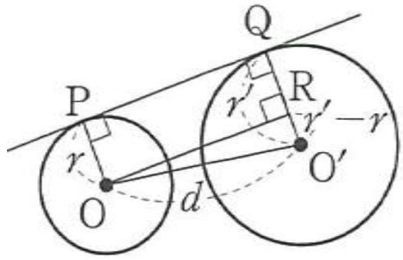
$y=\pm r$ 또는 $x=\pm r$

이다. 이 경우에도 ①이 성립한다.



위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

〈참고〉 원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선의 방정식을 구하려면 먼저 접점을 $(x_1,\ y_1)$로 놓고, 이 점에서의 접선이 점 P를 지남을 이용한다.

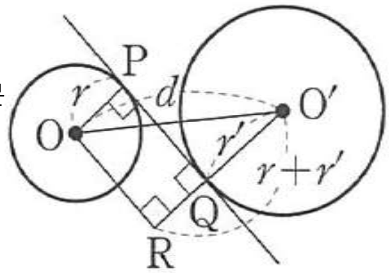


공통접선

(1) 두 원에 동시에 접하는 접선을 공통접선이라 한다. 이때 두 원이 공통접선에 대하여 같은 쪽에 있으면 그 접선을 공통외접선, 반대쪽에 있ㅇ면 그 접선을 공통내접선이라 한다.

(2) 공통외접선의 길이
오른쪽 그림에서 O, O′의 공통외접선의 길이는 선분 PQ의 길이이며, 이는 선분 OR의 길이와 같다.
따라서 직각삼각형 OO′R에서
$\overline{\mathrm{OR}} = \sqrt{d^2-(r'-r)^2}$

(3) 공통내접선의 길이
오른쪽 그림에서 O, O′의 공통내접선의 길이는 선분 PQ의 길이이며, 이는 선분 OR의 길이와 같다.
따라서 직각삼각형 OO′R에서
$\overline{\mathrm{OR}} = \sqrt{d^2-(r+r')^2}$



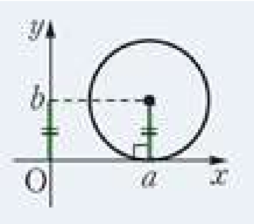
1. 원의 방정식(암기)

① $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

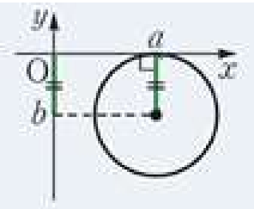
② $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

※ 가장 중요한 것은 중심(a, b)이다.
중심이 기준이 된다.

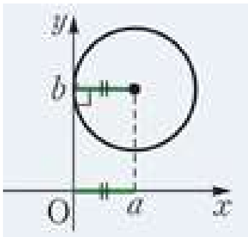
2. 축에 접하는 원



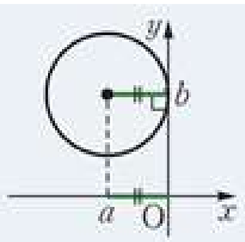
$(x-a)^2+(y-b)^2=|b|^2$



$(x-a)^2+(y-b)^2=|b|^2$



$(x-a)^2+(y-b)^2=|a|^2$



$(x-a)^2+(y-b)^2=|a|^2$

3. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식(암기)

=> O ; $x^2+y^2+ax+by+c=0$,
O$'$: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$
(단, $k\neq -1$)꼴로 나타낼 수 있다.
(원 O$'$: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ 제외)

4. 공통현의 방정식(암기)

=> O ; $x^2+y^2+ax+by+c=0$,
O$'$: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

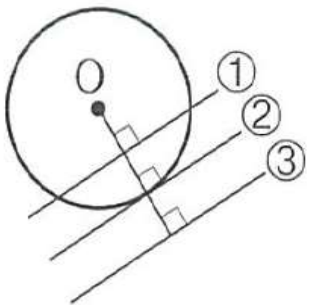
5. 원과 접선

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치관계는

① $d<r$ ➲ 두 점에서 만난다.

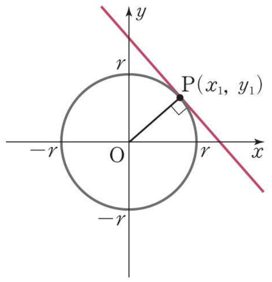
② $d=r$ ➲ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $d>r$ ➲ 만나지 않는다.



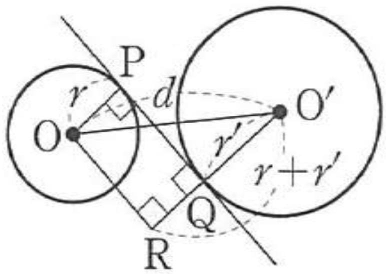
6. 원 위의 점이 주어진 접선(암기)

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$



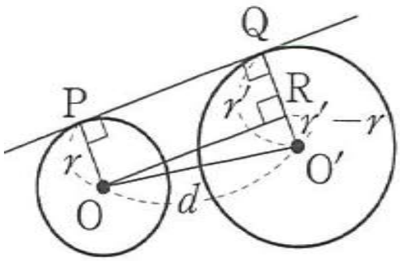
② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

7. 공통내접선



$\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$

8. 공통외접선



$\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{d^2-(r'-r)^2}$

9. 아폴로니우스의 원(암기)

ex1) 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$으로부터의
거리의 비가 $3:1$인 점 P에 대하여 P의 자취의 방정식을 구하여라.

풀이] $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

① $\mathrm{P}(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:1$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}}$
$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=3\sqrt{(x-1)^2+y^2}$
$(x+3)^2+y^2=9\{(x-1)^2+y^2\}$
$x^2+y^2-3x=0$ $\qquad\therefore \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

② 아폴로니우스의 원에 의해, $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$의 $3:1$로 내분하는 내분점과 외분하는 외분점이 지름의 양끝 점이다.
내분점은 $(0,0)$, 외분점은 $(3,0)$
따라서 원의 중심은 $(\dfrac{3}{2},0)$, 반지름은 $\dfrac{3}{2}$이다.
$\therefore \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

다음 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여라.

355) [수상 C1303번]

$x^2+y^2-12x-13=0$

356) [수상 C1304번]

$2x^2+2y^2+6x-2y+1=0$

357) [수상 C1309번]

두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ 2)$를 지나고 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r라 할 때, 상수 a, b, r에 대하여 $a+b+r$의 값을 구하여라.

358) [수상 C1310번]

중심이 y축 위에 있고 두 점 $(-4,\ 1)$, $(3,\ 0)$을 지나는 원에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

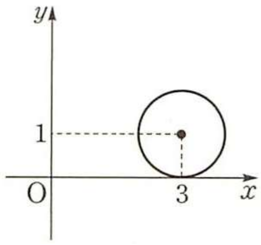
ㄱ. 점 $(4,\ 7)$을 지난다.
ㄴ. 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이다.
ㄷ. 둘레의 길이는 5π이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

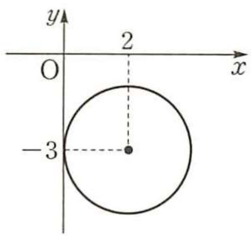
359) [수상 C1311번]
중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있고
두 점 $\mathrm{A}(0,\ -4),\ (4,\ 0)$을 지나는 원의 반지름을 구하여라.

다음 원의 방정식을 구하여라.
360) [수상 C1312번]
세 점 $(0,\ 0),\ (-4,\ 2),\ (-2,\ 2)$을 지나는 원

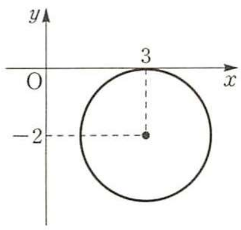
다음 그림과 같은 원의 방정식을 구하여라.
361) [수상 C1315번]



362) [수상 C1316번]



363) [수상 C1317번]



364) [수상 C1318번]
원 $x^2+y^2-2x+4y=0$과 중심이 같고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

365) [수상 C1320번]
중심이 $(4,\ -1)$이고 y축에 접하는 원을 구하여라.

366) [수상 C1324번]
다음 물음에 답하여라.
(1) 중심이 $(-2,\ -2)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원

(2) 중심이 직선 $x-y-2=0$위에 있고, 제4사분면에서 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 넓이를 구하여라.

367) [수상 C1326번]
점 $(2,\ 1)$을 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 두 원의 중심거리는?

① $2\sqrt{5}$ ② 5 ③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

368) [수상 C1329번]
방정식 $x^2+y^2+2kx-5k^2-6k-4=0$이 반지름의 길이가 2이하인 원을 나타내도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-2 \le k \le 0$ ② $-1 \le k \le 0$ ③ $-\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}$
④ $0 \le k \le 1$ ⑤ $1 \le k \le 6$

369) [수상 C1330번]
점 $\mathrm{A}(-3,\ -5)$와 원 $x^2+y^2+2x-2y-7=0$위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

370) [수상 C1331번]
원점에서 원 $x^2+y^2-8x-6y+23=0$에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

371) [수상 C1332번]
점 $(4,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 이르는 거리의 최댓값이 $3+2\sqrt{5}$일 때, 양수 r의 값은?

① 1 ② $\sqrt{6}$ ③ 3
④ $1+\sqrt{10}$ ⑤ 5

372) [수상 C1333번]
원 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ 위의 점 P와
직선 $3x-4y+14=0$ 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라.

373) [수상 C1335번]
두 원 $x^2+y^2-8x+2y-5=0$,
$x^2+y^2+2x-4y+2=0$의 교점과 점 $(1,\ 3)$을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

374) [수상 C1337번]
두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$의 교점과 점 $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 할 때, 상수 A, B, C의 합 $A+B+C$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

375) [수상 C1338번]
두 원 $(x+2)^2+y^2=7$, $(x-1)^2+(y+5)^2=16$의 공통현의 방정식을 구하여라.

376) [수상 C1341번]
두 원 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2+4x+3y+1=0$의 공통현의 길이를 구하여라.

377) [수상 C1343번]
두 원 O : $x^2+y^2=3$, O' : $x^2+(y-1)^2=4$의 공통인 현을 $\overline{\mathrm{AB}}$라 할 때, 원 O'의 중심 O'에 대하여 삼각형 $\mathrm{O'AB}$의 넓이를 구하여라.

원 O와 직선 l의 방정식이 다음과 같을 때, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 원 O와 직선 l의 위치관계를 말하여라.

378) [수상 C1344번]
O : $(x-3)^2+(y+2)^2=6$
l : $3x-y-1=0$

원 O와 직선 l의 방정식이 다음과 같을 때, 이차방정식의 판별식을 이용하여 원 O와 직선 l의 교점의 개수를 구하여라.

379) [수상 C1350번]

O : $x^2+y^2+4x-3y-6=0$

l : $x-2y+1=0$

380) [수상 C1352번]

원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=k(x-3)$이 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

381) [수상 C1355번]

원 $x^2+y^2-2x=0$과 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 범위는?

① $-1<m<1$　② $m<0$　③ $m>0$
④ $0<m<1$　⑤ $m>1$

382) [수상 C1358번]

다음 물음에 답하여라.

(1) 직선 $y=x+k$와 원 $x^2+y^2=9$가 만나서 생기는 현의 길이가 $4\sqrt{2}$일 때, 양수 k의 값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

(2) 원 $x^2+y^2-4x+10y+9=0$이 y축에 의하여 잘린 선분의 길이를 구하여라.

383) [수상 C1359번]
원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x-2y+k=0$이 만나서 생기는 현의 길이가 4일 때, 양수 k의 값은?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 5

384) [수상 C1361번]
원 $x^2+y^2=4$에 접하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°인 직선의 x절편을 모두 구하여라.

385) [수상 C1363번]
다음 물음에 답하여라.
(1) 점 $(0,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=8$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 점 $\mathrm{P}(3,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(3) 점 $(1,\ 3)$에서 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

386) [수상 C1367번]
다음 물음에 답하여라.
(1) 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

(2) 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$과 원 밖의 한 점 $\mathrm{A}(4,\ 5)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 r의 값을 구하여라.

387) [수상 C1370번]
다음 물음에 답하여라.
(1) 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ -1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=10$ 위의 점 $(4,\ 2)$를 지나는 접선의 방정식은 $x+ay+b=0$이다. 이때 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

388) [수상 C1371번]
원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

389) [수상 C1373번]
점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$와 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$위의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ $\dfrac{3}{2}\pi$
④ 2π ⑤ 3π

390) [수상 C1374번]
두 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$과 원 $x^2+y^2=36$위의 점 P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 무게중심 G의 자취는 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 된다. 이때 $a+b+r$의 값을 구하여라.

391) [수상 C1375번]
점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$과 원 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 방정식을 구하여라.

392) [수상 C1376번]
두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $3:1$인
점 P에 대하여 P의 자취의 방정식을 구하여라.

393) [수상 C1378번]
두 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5)$로부터의 거리의 비가 $1\ :\ 2$인 점의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 반지름의 길이는?

① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

394) [수상 C1386번]
다음 중 원의 방정식이 아닌 것은?

①$x^2+y^2+x+y-1=0$
②$x^2+y^2+2x+y+1=0$
③$x^2+y^2+2x+2y+1=0$
④$x^2+y^2+4x-2y+5=0$
⑤$x^2+y^2+4x+4y+4=0$

395) [수상 C1390번]
세 직선 $x+3y-10=0$, $7x+y-30=0$, $2x+y-5=0$으로 만들어지는 삼각형의 외접원의 방정식을 구하여라.

396) [수상 C1391번]
점 $(-5,\ 0)$에서 x축에 접하는 원의 넓이가 16π일 때, 이 원의 방정식을 구하여라. (단, 원의 중심은 제3사분면 위에 있다.)

397) [수상 C1393번]
두 점 $(4,\ 2)$, $(2,\ 0)$을 지나고 y축에 접하는 두 원의 반지름의 길이의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

398) [수상 C1396번]
중심이 곡선 $y=x^2-6$ 위에 있고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 개수는 m이고, 이 원들의 넓이의 합은 $n\pi$이다. 이때 $m+n$의 값은?

① 18 ② 24 ③ 30
④ 36 ⑤ 42

399) [수상 C1397번]
원 $x^2+y^2=r^2$밖의 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$와 이 원 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이의 최댓값이 $4+\sqrt{5}$일 때, 양수 r의 값을 구하여라.

400) [수상 C1398번]
세 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 2)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하여라.

401) [수상 C1400번]
두 점 $A(-1,\ 1), B(2,\ 1)$로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P에 대하여 $\angle PAB$의 크기가 최대일 때, 선분 AP의 길이를 구하여라.

402) [수상 C1401번]
두 원 $x^2+(y+a)^2=4,\quad (x+1)^2+y^2=9$의 교점을 지나는 직선이 직선 $2x+y=1$과 수직일 때, 상수 a의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 4

403) [수상 C1402번]
원 $x^2+y^2+3ax+2y+a=0$이
원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 둘레를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

404) [수상 C1403번]
두 원
$x^2+y^2+2x+2y-k=0,\ x^2+y^2-2x-2y-6=0$의 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{6}$이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

405) [수상 C1404번]
두 원 $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x-6y+8=0$의 교점과 점 $(0,\ 1)$을 지나는 원의 넓이를 구하여라.

406) [수상 C1405번]
두 원 $x^2+y^2+2x-4=0$, $x^2+y^2+ax-4y+4=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 넓이가 5π일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

407) [수상 C1411번]
원 $x^2+y^2=25$와 직선 $x+2y+5=0$의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원의 넓이를 구하여라.

408) [수상 C1412번]
원 $x^2+y^2-8y=0$과 직선 $y=mx-8$의 두 교점 P, Q와 원의 중심 C를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 CPQ가 정삼각형이 되도록 하는 양수 m의 값을 구하여라.

409) [수상 C1413번]
중심이 직선 $x+y-9=0$ 위에 있고, x축에 접하는 원 C가 있다. 원 C가 y축에 의하여 잘린 현의 길이가 6일 때, 원 C의 반지름의 길이는?
(단, 원 C의 중심은 제1사분면 위에 있다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

410) [수상 C1414번]
직선 $x+3y+k=0$이 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

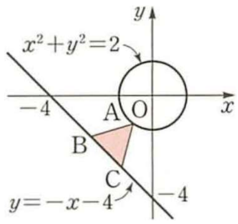
411) [수상 C1418번]
점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 사각형 AOBP의 넓이는?
(단, O는 원점이다.)

① $4\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{21}$ ③ $2\sqrt{22}$
④ $2\sqrt{23}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

412) [수상 C1419번]
점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구하여라.

413) [수상 C1420번]
두 점 $(0,\ -3)$, $(4,\ 1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이 직선 $y=x+k$와 만나지 않도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하여라.

415) [수상 C1422번]
오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 A와 직선 $y=-x-4$ 위의 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는?



① $1:8$ ② $1:9$ ③ $2:7$
④ $2:9$ ⑤ $2:11$

414) [수상 C1421번]
원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값이 9일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

416) [수상 C1424번]
원 $x^2+y^2=10$에 접하고 직선 $y=3x-2$에 평행한 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

417) [수상 C1426번]
원 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ -4)$, $\mathrm{B}(0,\ 5)$와 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값이 $a+b\sqrt{10}$이다. 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

418) [수상 C1427번]
원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, ab의 값을 구하여라.

419) [수상 C1429번]
원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$에서의 접선과 점 $\mathrm{Q}(-1,\ 3)$에서의 접선이 만나는 점을 R라 할 때, 사각형 OPRQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ 10

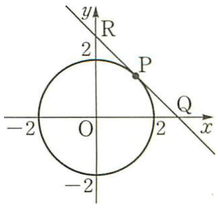
420) [수상 C1430번]
원 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ 위의 점 $(5,\ 0)$에서의 접선이 $(a,\ 9)$를 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

421) [수상 C1431번]

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{Q},\ \mathrm{R}$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=8$ 이다. 이때 ab의 값은?

(단, 점 P 는 제1사분면 위에 있다.)



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

422) [수상 C1433번]

두 원 $\mathrm{O}: x^2+y^2=1,\ \mathrm{O}': (x+2)^2+y^2=1$에 대하여 직선 l이 원 O에 접하고 원 O'의 넓이를 이등분할 때, 직선 l의 방정식을 모두 구하여라.

도형의 방정식

(9) 점

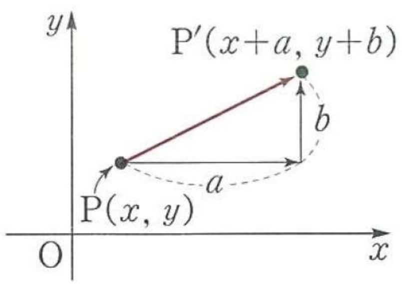
(10) 직선의 방정식

(11) 원의 방정식

(12) 이동

점의 평행이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$



<참고> 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$로 옮기는 평행이동을 기호로

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

와 같이 나타낸다.

도형의 평행이동

(1) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

(2) 방정식 $y=f(x)$가 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$y-b=f(x-a)$$

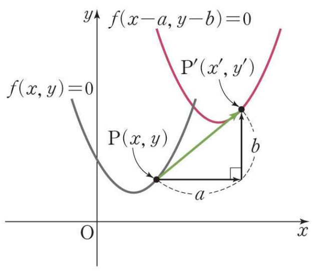
[설명]

좌표평면 위의 도형의 방정식을

$$f(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이라고 할 때, ①이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구해 보자.

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면



$$x'=x+a,\ y'=y+b$$

즉,

$$x=x'-a,\ y=y'-b$$

이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(x'-a,\ y'-b)=0$$

이 성립한다. 따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

을 만족한다.

<참고> 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 대하여

① 점 : x좌표에 $x+a$, y좌표에 $y+b$를 대입한다.

② 도형 : x대신 $x-a$, y대신 $y-b$를 대입한다.

원의 평행이동

원 $x^2+y^2=r^2$을 평행이동

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

에 의하여 이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

즉 원은 평행이동에 의하여 이동할 때, 원의 중심 $(0,\ 0)$은 $(a,\ b)$로 이동하고 반지름의 길이는 변하지 않는다.

점의 대칭이동

점 (x, y)를 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

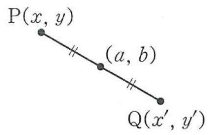
① x축 $\Rightarrow (x, -y)$　② y축 $\Rightarrow (-x, y)$

③ 원점 $\Rightarrow (-x, -y)$　④ 직선 $y=x \Rightarrow (y, x)$

⑤ 직선 $y=-x \Rightarrow (-y, -x)$

〈참고〉 $\mathrm{P}(x, y)$를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점이 $\mathrm{Q}(x', y')$일 때, 선분 PQ의 중점의 좌표가 (a, b)이므로 $\frac{x+x'}{2}=a$, $\frac{y+y'}{2}=b$

$\therefore x'=2a-x$, $y'=2b-y$



도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① x축 $\Rightarrow f(x, -y)=0$

② y축 $\Rightarrow f(-x, y)=0$

③ 원점 $\Rightarrow f(-x, -y)=0$

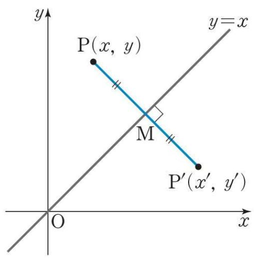
④ 직선 $y=x \Rightarrow f(y, x)=0$

⑤ 직선 $y=-x \Rightarrow f(-y, -x)=0$

[증명]

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{P}'(x', y')$을 구해 보자.

오른쪽 그림에서와 같이 직선 $y=x$는 $\overline{\mathrm{PP}'}$의 수직이등분선이다.



이때 $\overline{\mathrm{PP}'}$의 중점

$$\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$$

은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}$$

으로부터

$$x'-y'=y-x \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

또, $\overline{\mathrm{PP}'}$은 직선 $y=x$와 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-1$$

로부터

$$x'+y'=x+y \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ①, ②에서

$$x'=y, \ y'=x$$

이다.

따라서 좌표평면 위에 있는 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$$\mathrm{P}'(y, x)$$

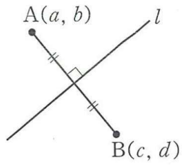
〈참고〉 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 때, 방정식에 포함된 y대신에 $-y$를 대입하므로 $f(-y, x)=0$이 된다.

직선에 대한 대칭이동

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $l : y = mx + n$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{B}(c,\ d)$는 다음을 이용하여 구한다.

(i)직선 AB는 직선 l과 수직이므로 $\frac{d-b}{c-a} \cdot m = -1$

(ii)선분 AB의 중점은 직선 l위의 점이므로 $\frac{b+d}{2} = m \cdot \frac{a+c}{2} + n$



<참고> 기울기가 ± 1인 직선에 대한 대칭이동

(1) 직선 $y = x + n$에 대한 대칭이동 $(x,\ y) \longrightarrow (y-n,\ x+n)$ $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(y-n,\ x+n)=0$

(2) 직선 $y = -x + n$에 대한 대칭이동 $(x,\ y) \longrightarrow (-y+n,\ -x+n)$ $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(-y+n,\ -x+n)=0$

1. 표현의 이해

① (x, y) : 주로 점을 나타낼 때 사용

② $y=f(x)$: 주로 표준형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex1) $y=2x+1 \Rightarrow y=f(x)$, $f(x)=2x+1$

③ $f(x, y)=0$: 주로 일반형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex2) $2x-y+1=0 \Rightarrow f(x, y)=0$, $f(x, y)=2x-y+1$

2. 평행이동(x축으로 a만큼, y축으로 b만큼)

점	(x, y)	$\Longrightarrow$	$(x+a, y+b)$
도형	$y=f(x)$	$\Longrightarrow$	$y-b=f(x-a)$, $y=f(x-a)+b$
	$f(x, y)=0$	$\Longrightarrow$	$f(x-a, y-b)=0$

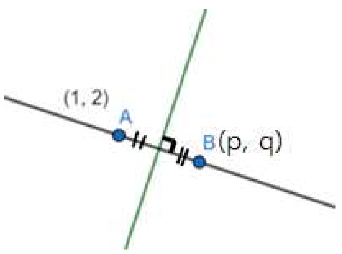
3. 대칭이동

	점			도형		
x축	(x, y)	$\Rightarrow$	$(x, -y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(x, -y)=0$
y축	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-x, y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-x, y)=0$
원점	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-x, -y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-x, -y)=0$
$y=x$	(x, y)	$\Rightarrow$	(y, x)	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(y, x)=0$
$y=-x$	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-y, -x)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-y, -x)=0$

4. $y=ax+b$에 대한 대칭이동

ex3) 직선 $y=3x+2$에 대하여 $(1, 2)$를 대칭

풀이] 대칭된 점을 (p, q)



(i) $(1, 2)$, (p, q)에서 $y=3x+2$까지의 거리가 같다. 따라서 $(1, 2)$, (p, q)의 중점$\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+2}{2}\right)$이 $y=3x+2$위에 있다. $\frac{q+2}{2}=3\frac{p+1}{2}+2$, $3p-q=-5$

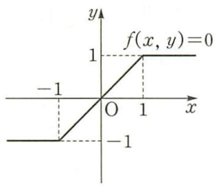
(ii) $(1, 2)$와 (p, q)를 이은 기울기가 직선 $y=3x+2$와 수직

$\frac{q-2}{p-1}=-\frac{1}{3}$, $p-1=6-3q$ $\quad\therefore p+3q=7$

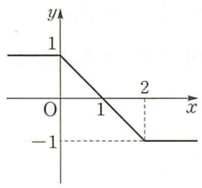
연립하여 풀면 $p=-\frac{4}{5}$, $q=\frac{13}{5}$

5. 응용(일반적인 그림에서는 선말고 점부터 옮긴다)

ex4) 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형이 [그림 1]과 같을 때, [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



[그림 1]



[그림 2]

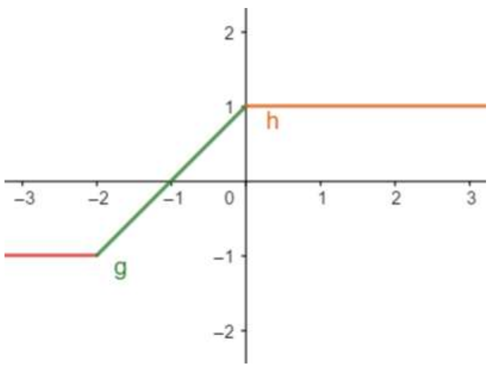
[보 기]

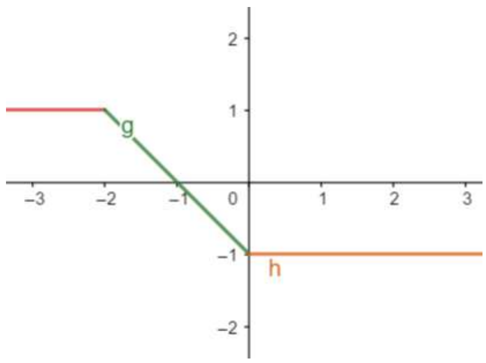
ㄱ. $f(x+1,\ -y)=0$
ㄴ. $f(x-1,\ -y)=0$
ㄷ. $f(1-x,\ y)=0$

풀이] ㄴ, ㄷ

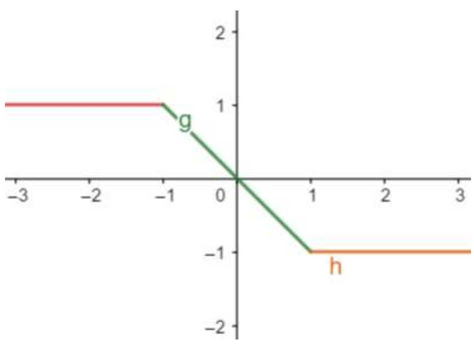
ㄱ.

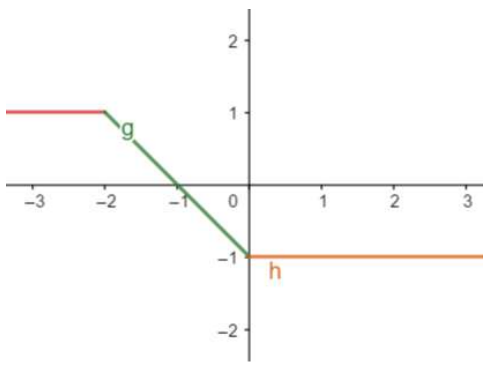
① $f(x,y)=0$ $\xRightarrow{x\text{축으로 } -1\text{만큼 평행이동}}$ $f(x+1,y)=0$ $\xRightarrow[x\text{축 대칭}]{}$ $f(x+1,\ -y)=0$





② $f(x,y)=0$ $\xRightarrow{x\text{축 대칭}}$ $f(x,\ -y)=0$ $\xRightarrow[x\text{축으로 } -1\text{만큼 평행이동}]{}$ $f(x+1,\ -y)=0$

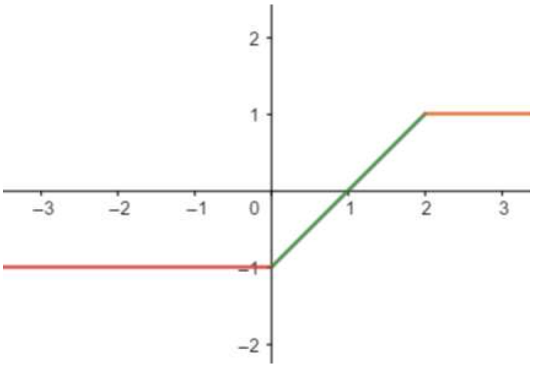


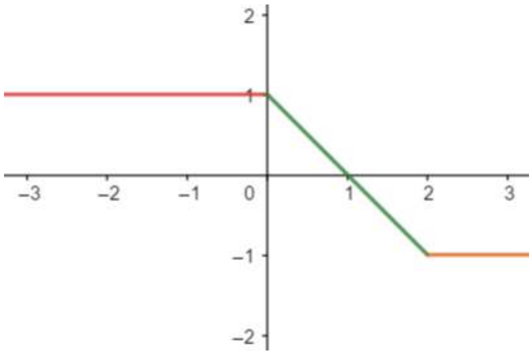


ㄴ.

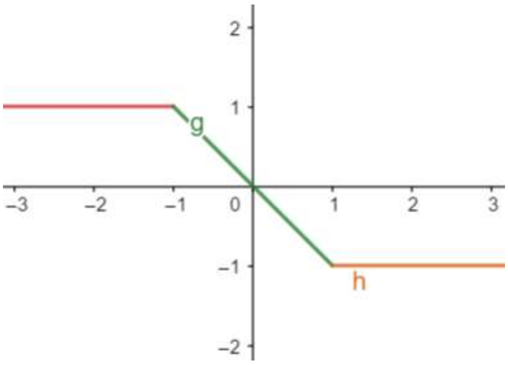
$$f(x,y)=0 \xrightarrow{x\text{축으로 1만큼 평행이동}} f(x-1,y)=0 \underset{x\text{축 대칭}}{\Rightarrow} f(x-1,\ -y)=0$$

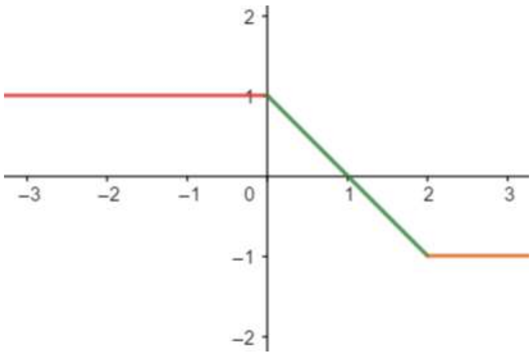
① $f(x,y)=0 \Rightarrow f(x-1,y)=0 \Rightarrow f(x-1,\ -y)=0$





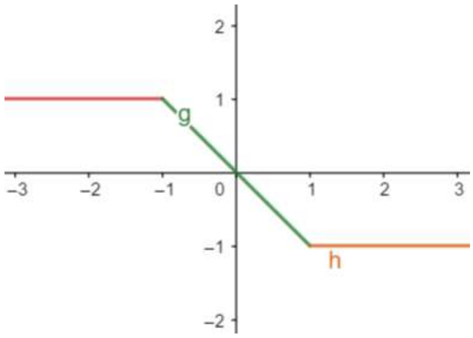
② $f(x,y)=0 \xrightarrow{x\text{축 대칭}} f(x,\ -y)=0 \underset{x\text{축 1만큼 평행이동}}{\Rightarrow} f(x-1,\ -y)=0$

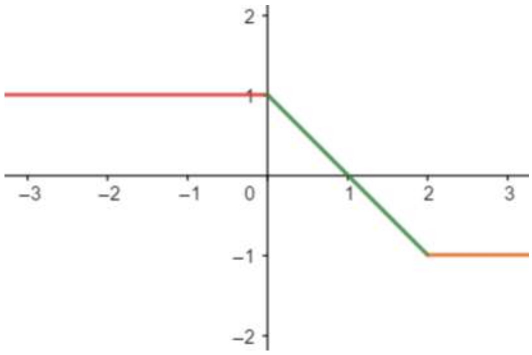




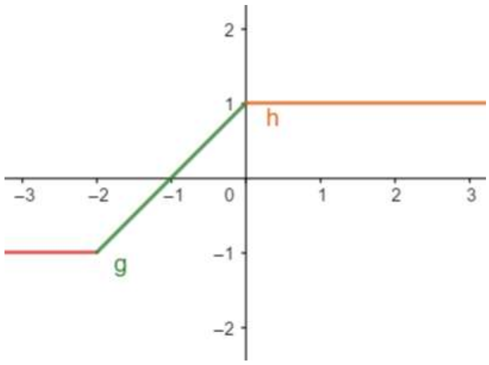
ㄷ.

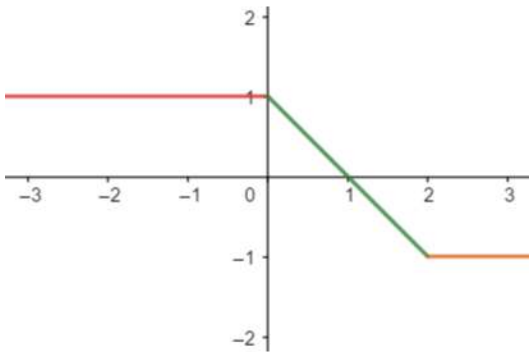
① $f(x,y)=0 \xrightarrow{y\text{축 대칭}} f(-x,\ y)=0 \xrightarrow[x\text{축 } 1\text{만큼 평행이동}]{} f(-(x-1),\ y)=0$





② $f(x,y)=0 \xrightarrow{x\text{축 } -1\text{만큼 평행이동}} f(x+1,\ y)=0 \xrightarrow[y\text{축 대칭}]{} f(1-x,\ y)=0$





423) [수상 C1449번]
다음 물음에 답하여라.
(1) $x-3y-7=0$ 을 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(2) 평행이동 $(x,\ y) \to (x-1,\ y+3)$ 에 의하여 $5x-2y+1=0$ 이 옮겨지는 도형의 방정식을 구하여라.

(3) 도형 $f(x,\ y)=0$ 을 도형 $f(x-6,\ y+2)=0$ 으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $3x-2y-4=0$ 으로 옮겨지는 직선의 방정식을 구하여라.

424) [수상 C1452번]
다음 물음에 답하여라.
(1) 평행이동 $(x,\ y) \to (x-1,\ y+3)$ 에 의하여 $x^2+y^2-x+4y-20=0$ 이 옮겨지는 도형의 방정식을 구하여라.

(2) 도형 $f(x,\ y)=0$ 을 도형 $f(x+1,\ y-3)=0$ 으로 옮기는 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-2y+a=0$ 이 옮겨지는 원의 중심의 좌표가 $(b,\ 4)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

다음 도형을 x 축, y 축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$ 에 대하여 각각 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

425) [수상 C1464번]

$2x-y+1=0$

426) [수상 C1465번]

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

427) [수상 C1466번]

$y=(x-1)^2-1$

428) [수상 C1484번]

다음 보기 중 원 $x^2+y^2=1$을 평행이동, 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $x^2+y^2-2x=0$

ㄴ. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

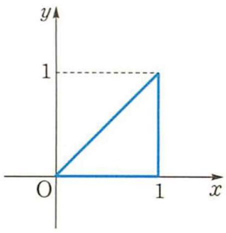
ㄷ. $x^2+y^2+4x-2y+2=0$

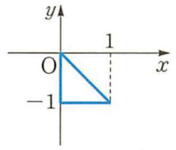
① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

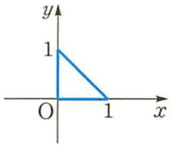
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

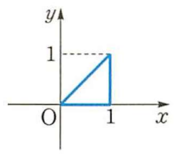
429) [수상 C1486번]

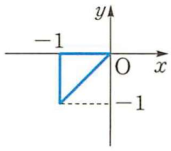
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은?

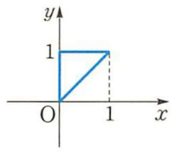


①


②


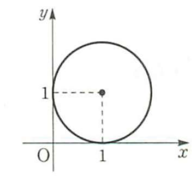
③


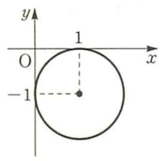
④


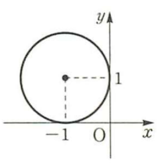
⑤


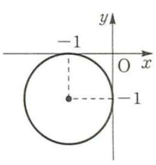
430) [수상 C1487번]

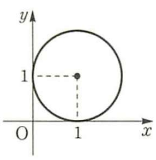
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은?

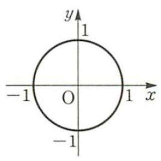


①


②


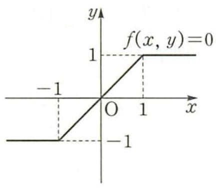
③


④


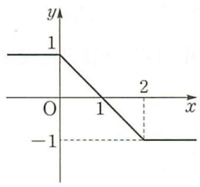
⑤


431) [수상 C1488번]

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 [그림 1]과 같을 때, [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



[그림 1]



[그림 2]

[보 기]

ㄱ. $f(x+1,\ -y)=0$

ㄴ. $f(x-1,\ -y)=0$

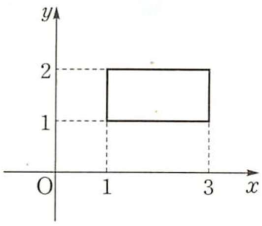
ㄷ. $f(1-x,\ y)=0$

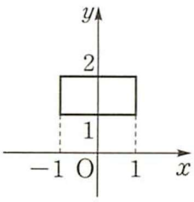
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

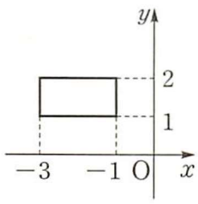
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

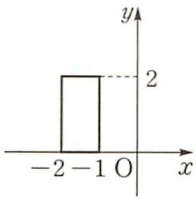
432) [수상 C1489번]

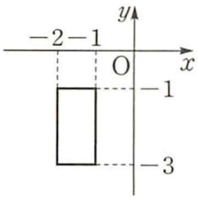
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 $f(y+1,\ -x)=0$이 나타내는 도형은?

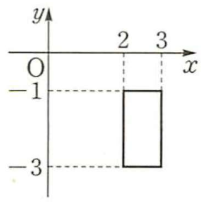


①


②


③


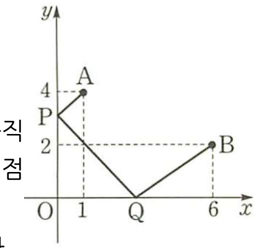
④


⑤


433) [수상 C1496번]
두 포물선 $y=x^2-2x+3$, $y=-x^2+6x-11$ 이 점 $(\alpha,\ \beta)$ 에 대하여 대칭일 때, $\alpha+\beta$ 의 값을 구하여라.

434) [수상 C1498번]
두 점 $(2,\ -3)$, $(-4,\ 5)$ 가 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 $a,\ b$ 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

435) [수상 C1501번]
다음 물음에 답하여라.
(1) 오른쪽 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$ 와 y 축 위를 움직이는 점 P, x 축 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$ 의 최솟값을 구하여라.



(2) 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(6,\ 9)$ 와 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하여라.

436) [수상 C1509번]
점 $\mathrm{A}(4,2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동하였더니 원점 O로부터의 거리가 처음의 거리의 2배가 되었다. 이때 양수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

437) [수상 C1510번]
세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,0), \mathrm{B}(a,b)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O}', \mathrm{A}', \mathrm{B}'$이라 하자. $\mathrm{B}'(3, 2\sqrt{3})$이고, $\triangle \mathrm{O}'\mathrm{A}'\mathrm{B}'$이 정삼각형일 때, mn의 값을 구하여라. (단, $ab>0$)

438) [수상 C1515번]
원 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2=c$와 일치하였다. 이때 $a+b+c$의 값은? (단, c는 상수이다.)

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

439) [수상 C1518번]
포물선 $y=-2x^2+8x-3$을 x축의 방향으로 $a+4$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점이 x축 위에 있을 때, 꼭짓점의 좌표를 구하여라.

440) [수상 C1519번]
원 $x^2+y^2-4x+6y+4=0$을 원 $x^2+y^2=9$로 옮기는 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2-6x-8y+24=0$이 옮겨지는 원의 중심과 원점 사이의 거리를 구하여라.

441) [수상 C1523번]
원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원이 직선 $2x+y-5=0$과 만나는 두 점 $\mathrm{A,B}$라 할 때, 선분 AB의 길이는?

442) [수상 C1526번]
좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}_1(-2,\ 3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P_3이라 하자. 다시 점 P_3을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 P_4라 하고, 점 P_4를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P_5라 하자. 이와 같은 방법으로 원점과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 차례대로 $\mathrm{P}_6,\ \mathrm{P}_7,\ \cdots$ 이라 할 때, 점 P_{2018}의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하여라.

443) [수상 C1532번]
원 $O: x^2+y^2-4x+2y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원을 O'이라 하자. 원 O위의 임의의 점 P와 원 O'위의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하여라.

444) [수상 C1533번]
직선 $3x+4y+a=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 에 접하였다. 이때 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

445) [수상 C1535번]
원 $x^2+y^2+2x-6y=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원이 직선 $y=x+k$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $a<k<b$일 때, ab의 값을 구하여라.

446) [수상 C1536번]
원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 의 $x \le 0,\ y \le 0$ 인 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하여 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

447) [수상 C1542번]
원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

448) [수상 C1543번]
두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$ 과 점 B 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점 C 에 대하여 삼각형 ABC 의 넓이는?

① $\frac{12}{5}$ ② 3 ③ $\frac{17}{5}$
④ 4 ⑤ 5

449) [수상 C1544번]

점 $A(8,6)$과 직선 $y=x$위를 움직이는 점 B, x축 위를 움직이는 점 C에 대하여 세 점 A,B,C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값을 구하여라.