2016학년도 논술 모의고사 5회 (수학) 해설 & 예시 답안

(계획상) 마지막 회차 논술입니다! 여기까지 오시느라 정말 수고 많으셨습니다! 다소 무계획적으로 만드는 모의고사인지라 언제 다시 6회로 돌아올지 모르겠지만, 하여튼 현재로서는 5회차가 끝입니다.

원래 이 논제의 출발점은 작년 수리논술시간에 논술 선생님께서 [논제 1-1]의 부등식을 제가 제시하는 예시 답안처럼 증명하는 것부터였습니다. 조금 호기심이 일어서 ‘저걸 일반식이나 n개의 항으로 유도할 수 없을까?’하는 생각이 들었습니다. 뭐, 귀납적으로 몇 번 해 보니 [논제 1-2]의 부등식은 쉽게 해결이 되는데, 문제는 n개의 함수에 대한 일반식이 유도되지 않았던 겁니다. 어찌어찌하여 함수가 3개일 때는 절댓값 꼴을 정적분해야 한다는 것까지는 알았지만 정확한 부등식은 유도하지 못했었습니다. 도저히 안 되어서 살짝 포기하고 썩혀두고 있었는데, 학원 논술 모의고사에서 제시문 (다)와 (라)의 부등식이 나타난 겁니다. 직감적으로 이 부등식을 쓰면 제가 원하는 식([논제 1-4]의 부등식)을 유도할 수 있을 거라고 생각하고, 부등식의 성립 여부는 제쳐두고 일단 증명해 내려갔습니다. ...... 운 좋게도 증명이 되었습니다. 그 과정은 [논제 2-2]의 부등식을 보이고, 이를 이용하여 [논제 1-4]의 부등식을 증명할 수 있었습니다. 좀 더 나중에는 [논제 1-3]의 부등식을 이용하여 [논제 1-4]의 부등식을 증명하는, 매우 간단한 방법을 찾기도 했지요.

문제는 다시 제시문 (다)의 횔더 부등식이었습니다. 이 부등식을 증명하지 못하면 지금까지의 모든 부등식이 허사로 돌아가게 되는 운명이었으니까요. 형태를 보아하니 옌센 부등식에서 함수를 $f(x)=x^{\frac{1}{p}}$랑 $f(x)=x^{\frac{1}{q}}$로 잡으면 될 것 같았는데, 아무리 해도 유도가 되질 않더군요. 처음에는 재배열 부등식을 통해서 증명했지만, 재배열 부등식으로 증명하면 i가 커질수록 $|x_i|$는 커지고, $|y_i|$는 작아지는(즉, 곱의 절댓값의 합이 최소) 경우에만 되어서 조금 뒤가 켕겼습니다.

고민하고, 고민하고, 또 고민하다가 결국 항복하고 인터넷(전지전능한 위키님)의 도움을 받았습니다. 그러면서 제시문 (다)의 부등식과 (라)의 부등식이 각각 횔더 부등식과 민코프스키 부등식인 것을 알았고, 또한 [논제 2-1]의 과정도 알게 되었습니다. 무엇보다도 n개의 함수에 대한 [논제 1-4]의 부등식을 제가 처음 ‘발견(!)’한 것이라고 생각했었는데요...... 네, 엄청난 착각이었습니다. 아아.... 위대한 수학자들은 이미 제가 알아낸 것을 한참 옛날도 전에 이미 다 증명했더군요. 게다가 처음 횔더 부등식의 위키 페이지를 보면서 ‘??? 이 무슨 외계 암호지?’하는 생각이 들더군요. 뭐, 그럴 만도 한 게, 나중에 더 알고 보니 횔더 부등식은 제가 손도 댈 수 없을 만큼 머나먼 영역에 있는 동네에서 마구 쓰이는 부등식이더군요. 뭐, 측도론? L^p공간? (르벡(?)적분은 들어 본 경험이 있지만 뭔지 잘 모름.) 뭔 이상한 소리를 늘어놓으면서 그래도 어떻게든 부등식을 증명하는 것 같긴 한데, 솔직히 저의 (현재) 이해 영역을 아득히 뛰어 넘는 증명법은 생략.....

그럼 서두는 이만 줄이고 바로 출제 의도, 예시 답안, 채점 기준을 공개하도록 하겠습니다. 머..... 계산 실수는 1문제당 2점씩 까는 거, 다들 아시죠?

[논제 1]

[논제 1-1] 임의의 실수 t와 임의의 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(t)=\int_a^b \{f(x)t-g(x)\}^2 dx \ge 0$임을 보이고, 이를 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [10점]

$$\left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right) \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

출제 의도 : 정적분의 성질과 이차함수의 판별식을 이용하여 주어진 부등식을 해결할 수 있다.

먼저 저 부등식은 '적분에 관한 코시 부등식'으로 잘 알려져 있는데요, 증명하는 방법은 매우 다양하지만, 이번 회차에선 2가지 정도의 증명법을 제시했습니다. 뒤에 또 다른 증명법을 첨부하고, 그로부터 유도되는 등호성립조건을 제시하였습니다.

예시 답안 : 임의의 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$와 임의의 실수 t에 대하여 $f(x)t-g(x)$는 주어진 정의역에서 연속이며, 따라서 $\{f(x)t-g(x)\}^2$ 또한 연속이다. (…… ①) 이때, $f(x)t-g(x)$는 실수이므로 $\{f(x)t-g(x)\}^2 \geq 0$이다. 정적분의 성질에 의해 t에 대한 정적분으로 나타내어진 함수 $h(t)=\int_a^b \{f(x)t-g(x)\}^2 dx \geq 0$이다. (…… ②) 이때, t는 x에 대하여 상수 취급할 수 있으므로 $h(t)=t^2\left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)-2t\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)+\left(\int_a^b \{g(x)\}dx\right) \geq 0$처럼 t에 대한 이차식으로 바꿀 수 있다. 함수의 정적분 값은 실수이며, 위 부등식은 임의의 실수 t에 대하여 성립해야하므로 t에 대한 판별식 $D/4=\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-\left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right) \leq 0$이어야 한다. 따라서 주어진 부등식은 성립한다. (…… ③)

채점 기준
연속의 성질에 의해 $\{f(x)t-g(x)\}^2$가 연속임을 보임. (①) ……………………………… 3점
정적분의 성질에 의해 $h(t) \geq 0$임을 보임. (②) ……………………………………………… 2점
이차식의 판별식을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보임. (③) ……………………… 5점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 시 모두 정답처리.)

이 논제뿐만 아니라 다른 논제에서도 마찬가지이지만, 현재 고등학교 수학 교육과정에서는 별다른 상황이 없다면 연속 함수 $f(x)$의 정의역과 공역은 실수로 정하고 있습니다. 엄밀하게 하려면 '함수 $f(x)$의 정의역과 공역이 실수 전체집합의 연속된 부분집합'이라는 조건을 주어야 하지요. 예를 들어, 만약 $f(x)$가 복소함수라면 $\{f(x)t-g(x)\}^2 \geq 0$이 성립하지 않지만, 고등학교 범위에서는 $f(x)$의 함숫값이 암묵적으로 실수이기 때문에 가능합니다.

추가. 코시-슈바르츠 부등식을 이용한 증명

pf) 자연수 n에 대하여 각각 n개의 임의의 실수 x_i, y_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여 다음 부등식이 성립한다. (코시-슈바르츠 부등식)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

이때, 모든 i에 대하여 $x_i=ky_i$ (또는 $y_i=kx_i$)인 0이 아닌 상수 k가 유일하게 존재할 때 등호가 성립한다. ($\frac{x_i}{y_i}=k$ 꼴로 안 쓰는 이유는 $y_i=x_i=0$인 경우가 있기 때문) x_i, y_i가 임의의 실수이므로 임의의 연속 함수 $f(x)$, $g(x)$와 $t_i=a+\frac{b-a}{n}i$에 대하여 $x_i=f(t_i)$, $y_i=g(t_i)$를 대입해도 위

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

부등식은 성립한다. 이를 대입한 후 양 변에 $(\Delta t)^2 = \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \geq 0$ $(b-a \geq 0)$을 곱한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\{f(t_i)\}^2\Delta t\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\{g(t_i)\}^2\Delta t\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}f(t_i)g(t_i)\Delta t\right)^2$$

극한의 성질에 의해 $n \to \infty$이어도 부등식은 유지가 되며, $f(x)$, $g(x)$가 연속 함수이므로 좌변, 우변의 급수는 각각 정적분의 정의에 의해 정적분 값으로 수렴한다. 따라서 다음 부등식이 성립한다.

$$\left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

이때, 코시-슈바르츠 부등식에서의 등호성립조건에 의하면 구간 $[a, b]$에 대하여 $\forall x \in [a, b]$에서 $f(x) = kg(x)$ (또는 $g(x) = kf(x)$)인 0이 아닌 상수 k가 유일하게 존재할 때 등호가 성립한다.

[논제 1-2] 자연수 n에 대한 임의의 2^n개의 연속함수 $f_i(x)(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대해 다음 부등식이 성립함을 보이시오.[20점]

$$\prod_{i=1}^{2^n}\int_a^b \{f_i(x)\}^{2^n} dx \geq \left(\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{2^n} f_i(x)\right)dx\right)^{2^n}$$

출제 의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

솔직히 말해서 $\prod$ 기호는 2015년 현재 고등학교 교육과정 내에서는 존재하지 않기 때문에 이걸 참고로 쓸까 말까 고민하다가 그냥 쓰기로 했습니다. 연대 논술을 준비하는 정도면 저 정도 기호는 '당연히' 알고 있겠지요.

예시 답안 : 제시문 (가)에 따라 수학적 귀납법으로 증명한다. (단, 증명에서 다루는 함수는 모두 연속 함수이다.)

ⅰ) $n = 1$일 때 → [논제 1-1]에 의해 성립. (…… ①)

ⅱ) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자. 그러면 $n = k+1$에 대하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2^{k+1}}\int_a^b \{f_i(x)\}^{2^{k+1}} dx &= \left(\int_a^b \{f_1(x)\}^{2^{k+1}} dx\right)\left(\int_a^b \{f_2(x)\}^{2^{k+1}} dx\right)\cdots\left(\int_a^b \{f_{2^{k+1}}(x)\}^{2^{k+1}} dx\right) \\ &= \prod_{i=1}^{2^k}\left(\int_a^b \{f_{2i-1}(x)\}^{2^{k+1}} dx\right)\left(\int_a^b \{f_{2i}(x)\}^{2^{k+1}} dx\right)\end{aligned}$$

이때, [논제 1-1]에 의해 $i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^k$인 i에 대해 다음이 성립한다.

$$\left(\int_a^b \{f_{2i-1}(x)\}^{2^{k+1}} dx\right)\left(\int_a^b \{f_{2i}(x)\}^{2^{k+1}} dx\right) \geq \left(\int_a^b \{f_{2i-1}(x)f_{2i}(x)\}^{2^k} dx\right)^2 \quad (\ \cdots\cdots\ ②\ )$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\prod_{i=1}^{2^{k+1}}\int_a^b \{f_i(x)\}^{2^{k+1}} dx \geq \prod_{i=1}^{2^k}\left(\int_a^b \{f_{2i-1}(x)f_{2i}(x)\}^{2^k} dx\right)^2$$

여기서 $g_i(x) = f_{2i-1}(x)f_{2i}(x)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^k)$라 하면 가정에 의해 다음이 성립한다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

$$\prod_{i=i}^{2^k}\int_a^b\{g_i(x)\}^{2^k}dx \ge \left(\int_a^b\prod_{i=1}^{2^k}g_i(x)dx\right)^{2^k}$$

$\prod_{i=1}^{2^k}g_i(x)=\prod_{i=1}^{2^{k+1}}f_i(x)$이므로 다음이 성립한다.

$$\prod_{i=1}^{2^{k+1}}\int_a^b\{f_i(x)\}^{2^{k+1}}dx \ge \left(\prod_{i=i}^{2^k}\int_a^b\{g_i(x)\}^{2^k}dx\right)^2 \ge \left(\int_a^b\prod_{i=1}^{2^k}g_i(x)dx\right)^{2^{k+1}} = \left(\int_a^b\prod_{i=1}^{2^{k+1}}f_i(x)dx\right)^{2^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.(…… ③)

채점 기준

$n=1$일 때 성립함을 보임. (①) ·· 3점

[논제 1-1]을 활용하여 ②의 식을 유도함. ··· 10점

가정과 ②의 부등식을 이용하여 $n=k+1$일 때도 성립함을 보이고 수학적 귀납법을 완결함. (③) ······································ 7점

(이외에도 논리적으로 모순이 없으면 모두 정답처리.)

이 논제의 ①에서 $f_{2i-1}(x)f_{2i}(x)$으로 묶은 것 말고도 $f_i(x)f_{2^{k+1}-i+1}(x)$로 묶는 것도 가능합니다.

[논제 1-3] 제시문 (다)의 부등식이 성립한다고 가정하자. 임의의 연속함수 $f(x)$, $g(x)$와 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$인 양수 p, q에 대하여 부등식 $\int_a^b|f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$이 성립함을 보이시오. [15점]

출제 의도 : 정적분의 정의를 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보임.

3회차를 푸신 분들은 아마도 이 논제의 해결 방법을 알고 있으셨을 겁니다. 원래는 이 논제를 더 먼저 만들려고 했는데, 어쩌다보니 3회차의 논제를 먼저 만들게 되었고, 덕분에 이 논제의 난이도가 상당히 낮아졌다고 생각합니다.

예시 답안 : 제시문 (다)의 부등식은 각각 n개의 임의의 실수 x_i, y_i ($i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$)에 대해서 성립하므로 $t_i=a+\frac{b-a}{n}i$인 t_i에 대하여 $x_i=f(t_i)$, $y_i=g(t_i)$를 대입해도 부등식은 성립한다. 이를 대입한 후 양 변에 $\Delta t=\frac{b-a}{n}\ge 0$을 곱하면 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$이므로 다음이 성립한다.

$$\Delta t\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)g(t_i)| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Delta t=\left(\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)|^q\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}$$

(…… ①)

양 변에 $n\to\infty$의 극한을 취해줘도 극한의 성질에 의해 부등호의 방향은 바뀌지 않으며, $f(x)$, $g(x)$ 모두 연속함수이므로 적분이 가능하여 위 부등식의 양 변의 급수는 각각 정적분의 정의(제시문 (마))에 의해 정적분 값으로 수렴한다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)g(t_i)|\Delta t=\int_a^b|f(t)g(t)|dt \le \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)|^q\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\int_a^b|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \ (\cdots\cdots ②)$$

채점 기준
 제시문 (다)의 부등식을 이용하여 부등식 ①을 유도함. ………………………………………………… 7점
 극한의 성질과 정적분의 정의를 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보임. (②) …………… 8점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 경우 모두 정답처리. 단, ②의 경우, 함수 $f(x)$, $g(x)$의 연속성, 그로 인한 적분 가능성, 극한의 성질 등 중 누락된 것마다 2점 감점.)

 이 부등식의 ②에서 극한의 성질, 정적분의 정의 등을 언급하는 것이 이 부등식이 성립하게 하는데 가장 중요하기 때문에 부분점수를 도입하였습니다.

 [논제 1-4] 자연수 n에 대한 임의의 n개의 연속함수 $f_i(x)$ ($i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n$)에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (힌트 : [논제 1-3]의 식에서 p를 자연수라 두고 식을 변형하여 이용하시오.) [25점]

$$\left(\int_a^b\left|\prod_{i=1}^{n}f_i(x)\right|dx\right)^n \le \prod_{i=1}^{n}\int_a^b|f_i(x)|^n dx$$

출제 의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

 5회차 논제는 [논제 2-1]의 방법을 제외하고는 모두 제가 직접 고안한 방법입니다. 그 중에서도 이 [논제 1-4]의 방법은 아무리 어려운 내용이어도 결국 고등학교 교육과정의 수학적 귀납법으로 풀 수 있음을 보여줌으로써 수학적 귀납법이 얼마나 강력한 도구인지 알려주는 논제라고 생각합니다.

예시 답안 : 자연수 p에 대하여 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$에서 $q=\frac{p}{p-1}$이므로 [논제 1-3]의 부등식은 다음과 같다.

$$\left(\int_a^b|f(x)g(x)|dx\right)^p \le \left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)\left(\int_a^b|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{p-1} \quad \cdots\cdots ㉠ \ (\cdots\cdots ①)$$

이를 이용하여 주어진 부등식을 수학적 귀납법으로 증명하자. (단, 증명에서 다루는 함수는 모두 연속 함수이다.)
ⅰ) $n=1$ → 성립
ⅱ) $n=2$ → [논제 1-1]의 부등식에서 $f(x)$ → $|f(x)|$, $g(x)$ → $|g(x)|$를 대입하면 성립한다. (또는 ㉠에 $p=q=2$를 대입) (…… ②)
ⅲ) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정한다. 그러면 ㉠에 의해 다음이 성립한다.

$$\left(\int_a^b|f_1(x)f_2(x)\ldots f_k(x)||f_{k+1}(x)|dx\right)^{k+1}$$

$$\le \left(\int_a^b |f_{k+1}(x)|^{k+1}dx\right)\left(\int_a^b |f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x)|^{\frac{k+1}{k}}dx\right)^{k+1}$$

이때 가정에 의해 다음이 성립한다.

$$\left(\int_a^b \prod_{i=1}^{k}|f_i(x)|^{\frac{k+1}{k}}dx\right)^k \le \prod_{i=1}^{k}\int_a^b |f_i(x)|^{\frac{k+1}{k}\cdot k}dx$$

따라서 $\left(\int_a^b \left|\prod_{i=1}^{k+1}f_i(x)\right|dx\right)^{k+1} \le \prod_{i=1}^{k+1}\int_a^b |f_i(x)|^{k+1}dx$으로 $n=k+1$에서도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다. (…… ③)

채점 기준

[논제 1-3]을 이용하여 부등식 ㉠을 유도함. (①) …………………………………… 7점

$n=1$, 2일 때 주어진 부등식이 성립함을 보임. (②) ……………………… ⅰ), ⅱ) 각각 4점

부등식 ㉠과 가정을 이용하여 $n=k+1$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보이고, 수학적 귀납법을 완결함. (③) ……………………………………………………………………………… 10점

(이외에도 논리적으로 모순이 없을 경우 모두 정답처리)

아직까지는 그렇게 식이 복잡하지는 않지만, 이제부터 나오는 것들은 장난 아니게 복잡할 겁니다. 꼭 읽으면서 연습지 같은 데에 한번 유도해 보는 것을 추천합니다.

[논제 2]

[논제 2-1] 제시문 (다)의 q, y_i에 대하여 $\lambda_i = \dfrac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}$라 하면, $\lambda_i > 0$이고, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$이다. 이와 제시문 (나)를 이용하여 제시문 (다)의 부등식이 성립함을 보이시오. (힌트 : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$에서 $p(q-1)=q$이다.) [30점]

출제 의도 : 젠센 부등식을 이용하여 제시문에 주어진 부등식을 증명할 수 있다.

서두에서 언급했다시피 이 [논제 2-1]만이 유일하게 제가 인터넷의 도움을 받은 논제입니다. 만약 이 논제에서 λ_i가 없었다면 아마 이 논제만으로도 한 회차를 구성할 수 있었을 겁니다. 하지만 어떻게 해야 할 지에 대해 단서를 줘서 조금은 할 수 있었을 겁니다.

예시 답안 : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$에서 $\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^{p\cdot\frac{1}{p}}|y_i|^{q-\frac{q}{p}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)^{\frac{1}{p}}|y_i|^q$이다.(…… ①)

이때, $\lambda_i = \dfrac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q} \rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)\lambda_i = |y_i|^q$에서 $\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)^{\frac{1}{p}}|y_i|^q = \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)^{\frac{1}{p}}\lambda_i\right)$

이다. (…… ②) 제시문 (나)의 부등식에 $p>1$일 때에 $f(x)=x^{\frac{1}{p}}$, $t_i=\lambda_i$, $x_i=\dfrac{|x_i|^p}{|y_i|^q}>0$을 대입하면 $f(x)$가 위로 볼록한 함수이므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f\left(\frac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)^{\frac{1}{p}}\quad(\ \cdots\cdots\ ③\ )$$

이때, λ_i의 정의에 의해 $\dfrac{\lambda_i}{|y_i|^q}=\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}$이므로 다음이 성립한다.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

따라서 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$이므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{|x_i|^p}{|y_i|^q}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

따라서 주어진 부등식은 성립한다. (…… ④)

채점 기준

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$을 이용하여 주어진 식을 변형함. (①) …… 7점
λ_i의 정의를 이용하여 ①의 식을 변형함. (②) …… 7점
제시문 (나)의 부등식을 활용하여 ③의 부등식이 성립함을 보임. …… 10점
λ_i의 정의를 이용하여 ③의 식을 정리하고 주어진 부등식이 성립함을 보임. (④) …… 6점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 경우 모두 정답처리.)

아마도 ①, ②를 떠올리기 힘들었을 수도 있습니다. 하지만, 일단 꼴을 보아하니 함수 $f(x)=x^{\frac{1}{p}}$로 잡아야 할 듯하고, λ_i의 식을 잘 관찰하여 보이고자 하는 식에서 $|y_i|^q$를 유도하면 어느 정도 감을 잡을 수 있을 겁니다.

[논제 2-2] 자연수 n, m와 자연수 i, k ($i=1,2,3,\cdots,n$, $k=1,2,3,\cdots,m$)에 대해 0이 아닌 임의의 실수 $a_{(k,i)}$, b_k에 대하여 $b_k>0$이고, $\sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{b_k}=1$일 때, 모든 자연수 m에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [25점]

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\prod_{k=1}^{m}a_{(k,i)}\right|\le\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{(k,i)}|^{b_k}\right)^{\frac{1}{b_k}}$$

출제 의도 : 수학적 귀납법을 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

맨 처음에 횔더 부등식을 접하고 나서 ‘이 부등식이 2종류의 x_i, y_i에 대해서 뿐만 아니라 3종류

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

이상의 수에 대해서도 성립할까'하는 생각이 들었습니다. 그래서 조금 끄적거려대다 보니 유도가 되더군요. 덕분에 이를 이용해서 [논제 1-4]의 부등식을 증명하기도 했고요.

예시 답안 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보이자.
ⅰ) $m=1$일 때 → 성립.
ⅱ) $m=2$일 때 → [논제 2-1]에 의해 성립.
ⅲ) $m=r$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다. ($a_{(r,\,i)}a_{(r+1,\,i)}$을 마치 하나의 값처럼 생각한다. 그러면 r개의 항에 대한 식이므로 가정을 이용할 수 있다.)

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\prod_{k=1}^{r}a_{(k,\,i)}\right| \le \left(\prod_{k=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(k,\,i)}\right|^{b_k}\right)^{\frac{1}{b_k}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r,\,i)}a_{(r+1,\,i)}\right|^{b_r}\right)^{\frac{1}{b_r}} \qquad (\ \cdots\cdots\ ①\ )$$

이때, [논제 2-1]에 의해 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$인 양수 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r,\,i)}\right|^{b_r}\left|a_{(r+1,\,i)}\right|^{b_r} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r,\,i)}\right|^{b_r\cdot p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r+1,\,i)}\right|^{b_r\cdot q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (\ \cdots\cdots\ ②\ )$$

b_k은 $b_k>0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{b_k}=1$인 임의의 실수이므로, 새로운 수열 $b_k{'}=\begin{cases} b_k & (k=1,\,2,\,3,\,\dots,\,r-1) \\ pb_r & (k=r) \\ qb_r & (k=r+1)\end{cases}$ 이라 하면 $b_k{'}$ 또한 $b_k{'}>0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r+1}\frac{1}{b_k{'}}=1$이다. 따라서 위 두 식을 종합하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|\prod_{k=1}^{r}a_{(k,\,i)}\right| &\le \left(\prod_{k=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(k,\,i)}\right|^{b_k}\right)^{\frac{1}{b_k}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r,\,i)}\right|^{b_r\cdot p}\right)^{\frac{1}{b_r}\cdot\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r+1,\,i)}\right|^{b_r\cdot q}\right)^{\frac{1}{b_r}\cdot\frac{1}{q}} \\ &= \prod_{k=1}^{r+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(k,\,i)}\right|^{b_k{'}}\right)^{\frac{1}{b_k{'}}}\end{aligned}$$

따라서 $m=r+1$에 대해서도 주어진 부등식은 성립하므로 모든 자연수 m에 대하여 주어진 부등식은 성립한다. (…… ③)

채점 기준
$a_{(r,\,i)}a_{(r+1,\,i)}$을 하나로 묶어서 생각하여 ①의 부등식을 유도함. ……………………………… 7점
[논제 2-1]을 이용하여 ②의 부등식을 유도함. ……………………………………………………… 8점
새로운 수열 $b_k{'}$를 설정하여 그 성질이 b_k와 같음을 보인 후, 수학적 귀납법을 완결함.(③) … 10점
(이외에도 논리적으로 모순이 없을 경우 모두 정답처리.)

[논제 3] 아래의 논제에 답하시오.
[논제 3-1] 자연수 n에 대한 임의의 실수 a_i, b_i ($i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n$)에 대하여, 다음을 이용하여 제시문 (라)의 부등식이 성립함을 보이시오. (힌트 : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$에서 $q(p-1)=p$이다.) [20점]

ㄱ) 휠더 부등식에 $x_i=a_i$, $y_i=\left|a_i+b_i\right|^{p-1}$을 대입한 부등식 ㉠을 얻는다.
ㄴ) 휠더 부등식에 $x_i=b_i$, $y_i=\left|a_i+b_i\right|^{p-1}$을 대입한 부등식 ㉡을 얻는다.
ㄷ) 임의의 실수 a, b에 대하여 $|a+b|\le|a|+|b|$이다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

출제 의도 : 주어진 지시에 따라 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

횔더 부등식이 성립한다는 것만 보이면 바로 이 부등식이 성립함을 보일 수 있을 겁니다.

예시 답안 : ㄱ), ㄴ)에서 얻은 식 ㉠, ㉡은 각각 다음과 같다. 이때 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$에서 $q(p-1)=p$이다. (…… ①)

$$㉠ \cdots\cdots \sum_{i=1}^{n}|a_i||a_i+b_i|^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$㉡ \cdots\cdots \sum_{i=1}^{n}|b_i||a_i+b_i|^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

㉠, ㉡의 양 변을 각각 더하여 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)|a_i+b_i|^{p-1} \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

이때 모든 $i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대해 $|a_i+b_i|\le|a_i|+|b_i| \rightarrow |a_i+b_i|^p \le (|a_i|+|b_i|)|a_i+b_i|^{p-1}$이므로($\because$ ㄷ)) $\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \le \sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)|a_i+b_i|^{p-1}$이다. (…… ②)

따라서 $\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$이며, $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$으로 양 변을 나눠주면 주어진 부등식을 얻는다.

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

이때, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>0,\ q>0$에서 $p>1$이며, $p=1$인 경우에도 ㄷ)에 의해 주어진 부등식은 성립한다. (…… ③)

채점 기준

지시에 따라 부등식 ㉠, ㉡을 구함. (①) ………………………………………………………… 5점

ㄷ)을 이용하여 ②의 부등식이 성립함을 보임. ……………………………………………… 9점

①, ②를 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보이고, $p=1$일 때도 성립함을 보임. (③) …… 6점

(이외에도 논리적으로 모순이 없을 경우 모두 정답처리. 단, ③에서 $p=1$일 때도 성립함을 언급하지 않은 경우 3점 감점.)

조금 더 속도를 내 볼까요?

[논제 3-2] 자연수 $n,\ m$에 대한 임의의 실수 $a_{(k,\ i)}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ m)$와 $p\ge 1$인 임의의 양수에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [25점]

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{(k,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(k,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

출제 의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

역시나 민코프스키 부등식의 일반화가 나왔습니다. 이제 어느 정도 단련이 되었을 테니 금방 해결해 줍시다.

ⅰ) $p=1$인 경우 → [논제 3-1]의 ㄷ)에 의해 $\left|\sum_{k=1}^{m}a_{(k,\,i)}\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|a_{(k,\,i)}\right|$이 성립하므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{(k,\,i)}\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(k,\,i)}\right|\right) \quad (\ \cdots\cdots\ ①\ )$$

ⅱ) $p>1$인 경우.

a) $m=1$인 경우 → 등식이므로 성립.

b) $m=2$인 경우 → [논제 3-1]에 의해 성립. (…… ②)

c) $m=r$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자. 그러면 가정에 의해 다음이 성립한다.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{r+1}a_{(k,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(k,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r,\,i)}+a_{(r+1,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

이때, 제시문 (라)의 부등식에 의해 다음이 성립한다.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r,\,i)}+a_{(r+1,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(r+1,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

따라서, $\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{r+1}a_{(k,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=1}^{r+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{(k,\,i)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$이므로, $m=r+1$에서도 성립하므로 모든 자연수 m에 대하여 주어진 부등식은 성립한다. (…… ③)

채점 기준

$p=1$인 경우, 주어진 부등식이 성립함을 보임. (①) ·· 7점

$p>1$인 경우, $m=1$, $m=2$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보임. (②) ·························· 6점

$p>1$인 경우, 가정과 제시문의 부등식을 적절하게 이용하여 수학적 귀납법을 완결함.(③) ··· 13점

(이외에도 논리적으로 모순이 없을 경우 모두 정답처리.)

[논제 3-1]과 [논제 3-2]에서 p의 조건을 잘 따져야 하는데요, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>0$, $q>0$의 조건에 의해 $p\neq 1$이기 때문입니다. 때문에 $p=1$인 경우에도 성립함을 보여 줘야 정확하게 논술한 것이라고 할 수 있지요.

[논제 3-3] 임의의 자연수 m에 대한 임의의 m개의 연속함수 $f_k(x)$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ m$)와 $p\ge 1$

인 임의의 양수 p에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [15점]

$$\left(\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=1}^{m}\left(\int_a^b|f_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

출제 의도 : 선행한 부등식을 이용하여 주어진 정적분 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

네! 이제 정말 마지막 논제입니다! 여기까지 오시느라 수고 많으셨으니, 조금만 더 힘내주세요!

예시 답안 : $a_{(k,\,i)}$는 임의의 실수이므로 [논제 3-2]에 $a_{(k,\,i)}=f_k(x_i)$ (단, $x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$)을 대입하면 다음과 같다.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|f_k(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\ \cdots\cdots\ ①\ )$$

이때, 양 변에 $(\Delta x)^{\frac{1}{p}}=\left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$을 곱한 후 극한을 취해주면, $f_k(x)$는 연속 함수이므로 제시문 (마)에 의해 적분 가능하며(즉, 극한이 수렴하므로), 극한의 성질에 의해 다음 부등식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x_i)\right|^p\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|f_k(x_i)|^p\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|f_k(x_i)|^p\Delta x\right)^{\frac{1}{p}}=\sum_{k=1}^{m}\left(\int_a^b|f_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

($\because \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha>0$ (단, α는 상수) $\to$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n)^b=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^b=\alpha^b$)

따라서 주어진 부등식은 성립한다. (…… ②)

채점 기준

[논제 3-2]를 이용하여 ①의 부등식이 성립함을 보임. ………………………………………………… 8점

극한의 성질과 정적분의 정의를 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보임. (②) ……………… 7점

(이외에도 논리적으로 모순이 없을 경우 모두 정답처리)

휴! 5개의 주제를 가지고 길고 긴 내용을 써 내려간 게 드디어 끝을 맞이하였습니다! 안 끝날 것 같았는데도 꾸준하게 해설 만들고, 문제 만들고 하다 보니 어느덧 끝났네요! 정말 감개무량합니다! 뭐, 하고 싶은 이야기는 아직도 잔뜩 남아있지만(!), 저도 수험생인지라 시간이 안 나서 어쩔 수 없이 여기서 줄여야 겠네요..... 아직 한 3세트 정도의 소재가 남아있지만..... 뭐, 수능 끝나고 할 일 없으면, 그때 가서 고대 파이널 형식으로 만들 수밖에 없겠네요. 1회부터 보신 분들 중에도 아마 기억하지 못할 분들이 많겠지만, 처음에 제가 '대학교 수준의 내용 하나와 대학원 수준의 내용 하나'라고 했는데, 이번 회차의 횔더 부등식이 대학원에 가면 자주 보게 되는 것이고, 아쉽게도 대학교 수준의 내용은 만들지 못했습니다. (아, 그리고 제가 아는 수리논술 강사께 검토를 받아보니, 3회의 [논제 3-3]이 대학원에 가면 배우는 '노름'이라고 하더군요....) 그래도 하고 싶었던 얘기는 어느 정도 한 것 같아서 속이 후련합니다!
그럼! 언젠가 다시 돌아오겠습니다!(라고 해봤자 10월 쯤에 화학 모의고사 2회로 돌아올 거지만요.)

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)