차영진 Final 모의고사 2회 문제지

제 2 교시

수학 영역 (B형)

M^2

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 8일 때, a의 값은? [2점]

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\ln(x+1)}$의 값은? [2점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

3. 함수 $f(x)=e^{2x}+2x-1$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [2점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

4. 무리방정식 $\sqrt{x^2+2x}=x^2+2x-2$의 모든 실근의 곱은? [3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

5. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx$ 의 값은? [3점]

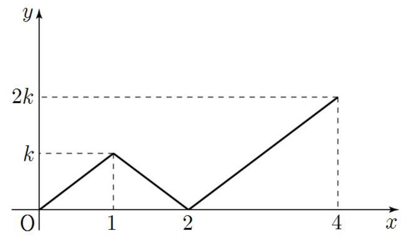
① $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{2}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{1}{3}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2}{3}$ ⑤ $\sqrt{6}+1$

6. 어느 과수원에서 생산한 배 하나의 무게는 표준편차가 40g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 임의로 선택한 배 하나의 무게가 400g이상일 확률과 500g이하일 확률이 서로 같다. 이 과수원에서 생산된 배 중 임의로 16개를 임의추출하여 측정한 무게의 표본평균이 470g이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
0.75	0.2734
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7734 ③ 0.8413
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

7. 구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}(2 \le X \le 4)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 x절편이 -1이다. 함수 $g(x)=x^2 f(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 좌표평면에서 행렬 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $(k>1)$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$가 옮겨진 점을 각각 A', B'라 하자. 두 점 A', B'을 지나는 직선이 원

$$(x-2)^2+(y-5)^2=4$$

의 넓이를 이등분할 때, k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

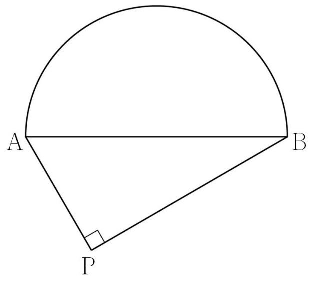
10. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표를 $f(t)$라 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(kn)=f(k)+1$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 a_n이라 하자. $\sum_{n=6}^{15} a_n$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 10 ③ 14 ④ 18 ⑤ 22

11. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 외부의 점 P가

$$\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2},\ \overline{\mathrm{AP}} = 1$$

을 만족시킨다. 호 AB 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은? [3점]

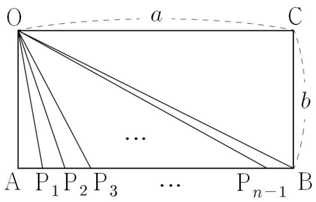


① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

12. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 포물선 $y^2 = 4a_n x$에 접하고 기울기가 1인 직선을 l이라 하자. 직선 l과 이 포물선의 초점사이의 거리를 a_{n+1}이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n-1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[13~14] 그림과 같이 가로의 길이가 a이고, 세로의 길이가 b인 직사각형 OABC가 있다. 자연수 n에 대하여 선분 AB를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $\mathrm{P}_0(=\mathrm{A})$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}, $\mathrm{P}_n(=\mathrm{B})$라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



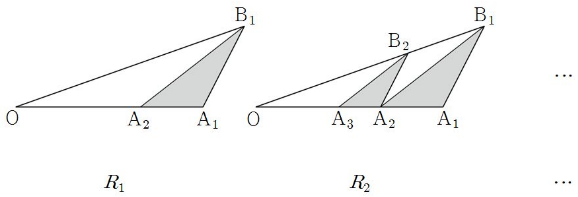
13. $a=2$, $b=1$일 때, 사각형 OCBP_k의 넓이를 S_k라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

14. 한 개의 주사위를 2번 던져서 나온 수를 차례로 a, b라 하자. $n=2$일 때, 사각형 OCBP_1의 넓이와 삼각형 OAP_1의 넓이의 차가 2이상이 될 확률은? [4점]

① $\frac{23}{36}$ ② $\frac{25}{36}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{29}{36}$ ⑤ $\frac{31}{36}$

15. 그림과 같이 넓이가 2인 삼각형 OA_1B_1이 있다. 선분 OA_1을 $2:1$로 내분하는 점을 A_2라 할 때, 삼각형 $A_2A_1B_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 OB_1위의 점 B_2를 선분 A_1B_1과 선분 A_2B_2가 평행하도록 잡고 선분 OA_2를 $2:1$로 내분하는 점 A_3에 대하여 삼각형 $A_3A_2B_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{8}{7}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$na_{n+1}=2(n+1)a_n+2^n$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여
$na_{n+1}-2(n+1)a_n=2^n$에서 양 변을 $n(n+1)2^{n+1}$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)\times 2^{n+1}}-\frac{a_n}{n\times 2^n}=\boxed{\text{(가)}}$$

이다. $b_n=\dfrac{a_n}{\boxed{\text{(나)}}}$이라 하면 $b_1=\dfrac{1}{2}$이고

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2n(n+1)}$$ 이므로

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k(k+1)}$$
$$=1-\frac{1}{2n}$$

이다. 그러므로

$$a_n=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(2)\times\{g(3)+h(4)\}$의 값은? [4점]

① $\frac{14}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

17. 두 초점이 F, F′ 인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9-a^2}=1$ 에 대하여 중심이 F 이고 점 F′ 를 지나는 원이 제1사분면과 제2사분면에서 이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 할 때, 삼각형 ABF′ 의 둘레의 길이가 20이다. 선분 AB 의 길이는?
(단, a는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

18. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2B=AB+2E,\ AB^2-BA=A+E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. B의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $(A+E)^2=2(A+B)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 자연수 n에 대하여 n^2개의 칸에 다음 규칙에 따라 수를 써 넣는다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 1행 n열과 n행 1열에는 2를 써 넣는다.
> (나) $2 \le a \le b \le n$을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 a행 b열과 b행 a열에는 $a+2$를 써 넣는다.

	1열	2열	3열	4열	$\cdots$	n열
1행	2	2	2	2		2
2행	2	4	4	4	$\cdots$	4
3행	2	4	5	5		5
4행	2	4	5	6		6
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n행	2	4	5	6	$\cdots$	$n+2$

모든 칸에 적힌 수의 합을 $f(n)$이라 할 때, $f(7)+f(8)$의 값은? [4점]

① 542 ② 550 ③ 558 ④ 566 ⑤ 574

20. 좌표공간에서 반지름의 길이가 1이고 점 A를 중심으로 하는 구 S_1과 반지름의 길이가 $r\,(r>1)$이고 점 B를 중심으로 하는 구 S_2가 서로 외접하고, 두 구 S_1, S_2는 xy평면에 접한다. 두 점 A, B가 직선 $l : \frac{x}{2}=y-1=\frac{z+1}{2}$ 위에 있을 때, r의 값은? [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}+x$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 직선 $y=x$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ \left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, 함수 $g(t)$를 $g(t)=\tan\theta$라 하자. 집합

$\{f'(t) \mid x=t$ 에서 함수 $g(t)$는 극값을 갖는다.$\}$

의 모든 원소의 합은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

단답형

22. 첫째항이 k이고 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이 80일 때, k의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 f를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$이라 하자. 두 2×1행렬 $A,\ B$에 대하여 $f(A)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $f(B)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$을 만족시킬 때, $f(2A+B)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$이다. $a+5b$의 값을 구하시오. [3점]

24. $0 \le x \le \pi$일 때, 삼각방정식

$$4\sin 2x = \cos x$$

의 모든 해의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

25. 어느 장난감 가게에는 무게가 각각 100g인 노란색 공, 파란색 공, 빨간색 공과 무게가 400g인 흰색 공을 판매하고 있다. 이 가게에서 무게의 총 합이 500g이 되도록 공을 구입하는 경우의 수를 구하시오. [3점]

26. 좌표평면에서 로그함수 $y = \log_a x$ $(a > 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y = f(x)$라 하자. 직선

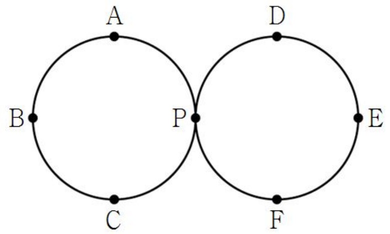
$$l : x + y = 6$$

이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 제1사분면 위의 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 곡선 $y = f(x)$와 직선 l의 교점이다. (나) 점 Q는 곡선 $y = f(x)$의 점근선과 직선 l의 교점이다. (다) $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QB}}$

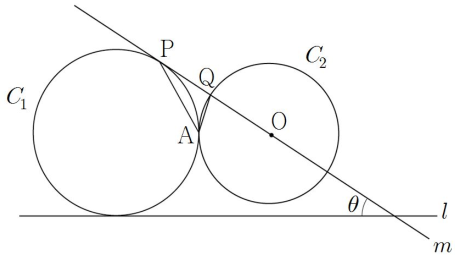
$a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 원이 한 점 P에서 만나고, 원의 둘레를 4등분한 점을 각각 A, B, C, P와 D, E, F, P라 하자. 7개의 점 중 임의의 서로 다른 두 점을 연결한 선분의 길이를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X>3)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 그림과 같이 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기가 θ이고, 반지름의 길이가 1인 원 C_1이 점 P에서 직선 m에 접하고, 동시에 직선 l에 접한다. 직선 m위의 한 점 O를 중심으로 하는 원 C_2가 C_1과 점 A에서 외접하고, 직선 l과 직선 OA는 서로 평행하다. 선분 OP가 원 C_2와 만나는 점을 Q라 할 때, 원 C_2의 반지름의 길이를 $f(\theta)$, 삼각형 APQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times f(\theta)}=p$일 때, $80p$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.) [4점]



29. 좌표공간에서 평면 α 위의 세 점 A, B, C 에 대하여 점 A를 중심으로 하고

$$\angle \mathrm{BAC} = \frac{2}{3}\pi, \quad \overline{\mathrm{AB}} = 5$$

인 부채꼴 BAC가 있다. 호 BC 위를 움직이는 점 P와 평면 α 위에 있지 않은 동점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 평면 APQ는 평면 α와 수직이다.
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = 5$
> (다) $\angle \mathrm{PAQ} = \theta$라 할 때, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$이다.

점 Q에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q′라 할 때, 점 Q′가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 구간 $[0, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x(1-\ln x) & (x>0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

일 때, 정의역이 $\{t \mid 0 \le t \le 1\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_0^1 g(t)dt$의 최댓값은 ae^2+be+c이다. $60(a+b+c)$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 유리수이다.) [4점]

> (가) 함수 $g(t)$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$ $(0 \le k \le 1)$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때,
> $g(k)=\alpha$ 또는 $g(k)=\beta$ 또는 $g(k)=2k$
> 이다.

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.