

제 2 교시

수학 영역(B 형)

M^2

5지선 다형

1. $\sqrt[5]{32} \times \log_2 16$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $2A - B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

3. $\cos 2x = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan x$ 의 값은? (단, $0 < x < \frac{\pi}{2}$) [2점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + 3a_{11} = 4a_k$$

를 만족시킬 때, 자연수 k 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

5. 함수 $f(x) = xe^x + \sin x \cos x$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

7. 좌표평면에서 일차변환 f 에 의해 점 $(1, 0)$ 은 점 $(2, 1)$ 로 옮겨지고, 점 $(0, 1)$ 은 점 $(2, 2)$ 로 옮겨진다. 일차변환 f 에 의해 직선 $2x + 3y = 6$ 이 옮겨지는 직선을 l 이라 할 때, 직선 l 의 y 절편은? [3점]

- ① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

6. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 3 \right) = 1$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3n + 2}{a_n + 2n - 1}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ 2

8. 곡선 $y=e^{2x}$ 과 두 직선 $x=0$, $y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=e^{2x}$ 과 두 직선 $x=3$, $y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, 실수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e^2-1}{2}$ ② $\frac{e^3-1}{3}$ ③ $\frac{e^4-1}{4}$ ④ $\frac{e^5-1}{5}$ ⑤ $\frac{e^6-1}{6}$

9. 그림과 같이 쉬는 시간 두 교시를 포함한 국어, 영어, 수학 자습시간표(총 8교시)를 만들려고 한다.

1교시	2교시	3교시	4교시	5교시	6교시	7교시	8교시

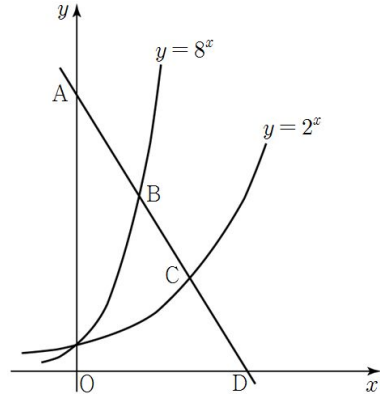
쉬는 시간으로 구분되지 않은 연속된 교시에는 같은 과목을 공부하며, 국어, 영어, 수학은 반드시 이 순서로 적어도 한 시간 이상 공부한다. 이와 같은 공부 시간표를 만드는 방법의 수는?

[3점]

- ① 10 ② 15 ③ 21
④ 28 ⑤ 36

10. 그림과 같이 y 축 위의 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=8^x$ 와 만나는 점을 B, 곡선 $y=2^x$ 와 만나는 점을 C, x 축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$ 일 때, 직선 AD의 기울기는?

[3점]



- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

11. 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 분수부등식 $1 + \frac{n}{x-n} \leq \frac{1}{x+2}$

을 만족시키는 정수 x 의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의

값은? [3점]

- ① 65 ② 67 ③ 69 ④ 71 ⑤ 73

12. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1} = 2S_n + 3^{n+1} - 1 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여 $a_2 = 2S_1 + 3^2 - 1 = 12$ 이다.

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2S_{n-1} + 3^n - 1$

이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2(S_n - S_{n-1}) + 2 \times 3^n \\ &= 2a_n + 2 \times 3^n \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \times 3^n$$

이다.

양변을 $\boxed{(가)}$ 로 나눈 뒤 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \frac{2}{3} \quad (n \geq 2)$$

이고, $b_2 = \frac{4}{3}$ 이므로

$$b_n = \boxed{(나)} \quad (n \geq 2)$$

이다. 따라서

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ \boxed{(다)} & (n \geq 2) \end{cases}$$

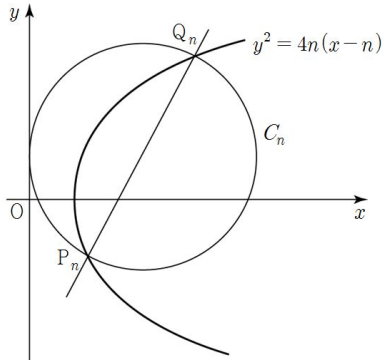
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할

때, $g(9) + \frac{h(5)}{f(2)}$ 의 값은? [3점]

- ① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

[13~14] 자연수 n 에 대하여 포물선 $y^2 = 4n(x-n)$ 의 초점 F 를 지나고 기울기가 m 인 직선이 포물선과 만나는 두 점 P_n, Q_n 에 대하여 선분 P_nQ_n 을 지름으로 하는 원은 C_n 이다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $m=1$ 일 때, 원 C_n 의 중심의 x 좌표를 a_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 145 ② $\frac{365}{2}$ ③ 220 ④ $\frac{515}{2}$ ⑤ 295

14. $n=1$ 일 때, 원 C_1 의 중심에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자. m 의 값이 매초 25의 일정한 속력으로 움직일 때, m 의 값이 $\frac{4}{3}$ 이 되는 순간, $\frac{\overline{P_1H}}{\overline{Q_1H}}$ 의 값의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]

- ① $\frac{85}{16}$ ② $\frac{45}{8}$ ③ $\frac{95}{16}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ $\frac{105}{16}$

15. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$2AB + B^2 = E, \quad 4A^2 = B^2$$

를 만족시킬 때, <보기>중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. $AB = BA$
 ㄴ. B 의 역행렬이 존재한다.
 ㄷ. $16A^{-1} = E$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 이차함수 $y = f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 4, f(2) = 1$

(나) $f(2-x) = f(2+x)$

무리방정식 $\sqrt{f(|x|)} = f(|x|) - k$ 의 실근의 개수를 a_k 라 할 때,

$$\sum_{k=1}^5 a_k \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

17. 함수 $f(x) = \log_2 x - [\log_2 x]$ 가 있다. 0보다 크고 100보다 작은 실수 x 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = \log_2 \frac{3}{2}$ 과 만나는 점의 x 좌표를 가장 큰 것부터 순서대로

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \text{ (단, } a_1 > a_2 > a_3 > \dots \text{)}$$

라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은?

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

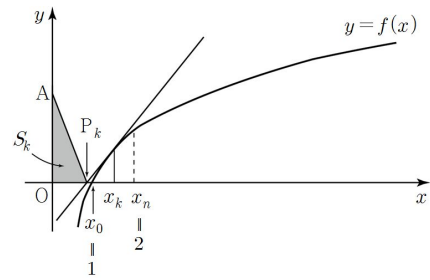
- ① 156 ② 168 ③ 180 ④ 192 ⑤ 204

18. 함수 $f(x) = 2\ln x$ 가 있다. 2이상인 자연수 n 에 대하여 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 2$$

라 하자. 점 $A(0, 2)$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(x_k, f(x_k))$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 P_k 라 할 때, 삼각형 OAP_k 의 넓이를 S_k ($k=1, 2, \dots, n$)이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9}{4} - 2\ln 2$ ② $2 - 2\ln 2$ ③ $\frac{7}{4} - 2\ln 2$
 ④ $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{4} - 2\ln 2$

19. 실수 a 에 대하여 쌍곡선 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 과 직선

$l: ax - y + 1 = 0$ 에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. $a = -2$ 일 때, 쌍곡선 C 와 직선 l 은 한 점에서 만난다.
 ㄴ. $0 < a < \sqrt{3}$ 일 때, 쌍곡선 C 와 직선 l 은 서로 다른 두 점에서 만난다.
 ㄷ. 쌍곡선 C 와 직선 l 의 교점의 개수를 $f(a)$ 라 할 때, 함수 $f(a)$ 가 $a = m$ 에서 불연속이 되는 모든 m 의 값의 곱은 12이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 직선 $y = \frac{1}{n+1}x$ 와

이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 두 직선 $y = ax$ ($a > 0$),

$y = bx$ ($b < 0$)가 직선 $x = 2n$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 $C(2n, 0)$ 에 대하여 삼각형 OAC의 넓이와 삼각형

OBC의 넓이를 각각 S_n, T_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^9 \log \frac{S_n}{T_n}$ 의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $2\log 36$ ② $2\log 45$ ③ $2\log 55$
 ④ $2\log 66$ ⑤ $2\log 78$

21. 함수 $f(x)=e^{-x^2}$ 와 일차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \frac{f(k+x)-g(k+x)}{f(k-x)-g(k-x)} < 0 \quad (x \neq 0)$$

(나) 함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \leq k) \\ g(x) & (x > k) \end{cases}$ 는 실수 전체의 집합에서
미분가능하고 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ 이다.

$g(-2k)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ② $\frac{2}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{3}{\sqrt{e}}$ ④ $\frac{4}{\sqrt{e}}$ ⑤ $\frac{5}{\sqrt{e}}$

단답형

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{e^x - 1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 다항식 $(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4+(x+1)^5$ 의
전개식에서 x^2 의 계수를 구하시오. [3점]

24. $f(0)=a$ 인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + ax^2}{x+1} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} = 3$$

$f(3)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [3점]

25. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 4}{h} = 6, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(h) - 4}{h} = 18$$

일 때, $g'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. x 축에 대한 대칭이동을 나타내는 일차변환을 f 라 하고,

원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전하는 회전변환을 g 라 하자. 직선

$x+y=6$ 위의 점 P 가 f, g 에 의하여 각각 점 Q, R 로 옮겨질 때, 세 점 O, Q, R 이 한 직선위에 있다. $\overline{QR}=l$ 이라 할 때, l^2 의 값을 구하시오. (단, 점 O 는 원점이다.) [4점]

27. 실수 전체의 집합에서

$$\frac{f(-x)}{f(x)} = e^x$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여

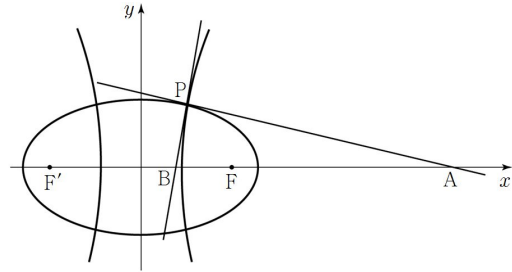
$$F(x) = \int_0^x e^t f(t+x) dt$$

라 하자. $F'(a) + F(a) = \frac{e^{-a}}{2}$ 를 만족시키는 실수 a 에 대하여

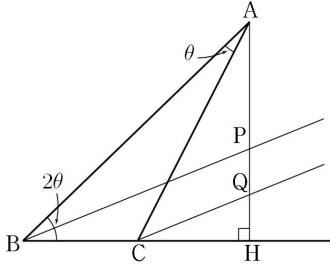
$2f(-2a) - f(-a)$ 의 값은 p 이다. $100p$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 x 축 위의 두 점 $F(\sqrt{5}, 0)$, $F'(-\sqrt{5}, 0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원 C_1 과 두 점 F , F' 을 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선 C_2 의 교점이 점 P 이다. 타원 C_1 과 쌍곡선 C_2 위의 점 P 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 각각 A , B 라 할 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값은 p 이다. $9p$ 의 값을 구하시오. (단, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이다.)

[4점]



29. 그림과 같이 $\angle ABC = 2\theta$, $\angle BAC = \theta$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H에 대하여 $\angle ABC$ 를 이등분하는 직선이 선분 AH와 만나는 점을 P, 점 C를 지나고 선분 BP와 평행한 직선이 선분 AH와 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = p$ 이다. $15p$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $1 < f(x) < 2$, $f'(x) > 0$
 (나) 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선이 두 직선 $y = 1$, $y = 2$ 와 만나는 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은 t 이다.
 (다) 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(x)$ 의 최솟값은 $h(t)$ 이다.

곡선 $y = h(x)$ 와 x 축 및 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 $V\pi$ 이다. $60V$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.