단원
1 지수
2. 미분계수
3. 삼각함수의 성질
4. 함수의 극한값
5. 등비수열
6. 극대 극소
7. 지수 로그 계산
8. 부정적분
9. 삼각함수의 그래프
10. 접선의 방정식
11. 속도와 가속도
12. 수학적 귀납법
13. 증가 감소
14. 지수함수 로그함수 점근선
15. 연속
16. 로그 정의
17. 수열의 합
18. 도함수
19. 넓이
20. 사인 코사인법칙
21. 수열의 합과 일반항
22. 정적분
==============
23.자연로그의 극한
24.매개변수
25.정적분
26.급수
27.넓이
28.미분가능성
29.등비수열의 극한
30.삼도극

1 2 + 1 = 3
2 2 + 3 = 5
3 5 + 0 = 5
4 3 + 1 = 4
5 3 + 1 = 4

1 1.실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \le x \le 0$일 때, $f(x)=\lvert x+1 \rvert -1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$

$-10 \le x \le 10$에서 $y=f(x)$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2 2.함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\left| x-\frac{1}{2} \right| +1 \left(-\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2} \right)$$

이다. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하여라.

3 3. 다음 물음에 답하여라.

(1) 부등식 $(\log_3 x)(\log_3 3x) \leq 20$를 만족시키는 자연수 x의 최댓값을 구하여라.

(2) 로그부등식 $\left(\log_2 \dfrac{x}{4}\right)(\log_2 2x) \leq 4$를 만족시키는 x의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때 $m+M$의 값은?

① $\dfrac{33}{4}$ ② $\dfrac{17}{2}$ ③ $\dfrac{35}{4}$ ④ 9 ⑤ $\dfrac{37}{4}$

4 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2023학년도 수능 공통21]

5 5.함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2\times 2^q$의 값은?

① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

6 6. 다음 식의 값을 구하여라.

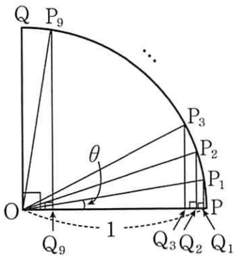
(1) $\sin^2 1^\circ+\sin^2 3^\circ+\sin^2 5^\circ+\ \cdots\ +\sin^2 87^\circ+\sin^2 89^\circ$
(2) $\cos^2 1^\circ+\cos^2 3^\circ+\cos^2 5^\circ+\ \cdots\ +\cos^2 87^\circ+\cos^2 89^\circ$

7 7.다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\cos^2\dfrac{\pi}{12}+\cos^2\dfrac{2}{12}\pi+\cos^2\dfrac{3}{12}\pi+\ \cdots\ +\cos^2\dfrac{11}{12}\pi$

(2) $\sin^2\dfrac{\pi}{16}+\sin^2\dfrac{2}{16}\pi+\sin^2\dfrac{3}{16}\pi+\ \cdots\ +\sin^2\dfrac{15}{16}\pi$

8 8.오른쪽 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1인 사분원 POQ를 10등분하는 점을 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_9라 하고 $\angle POP_1=\theta$라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

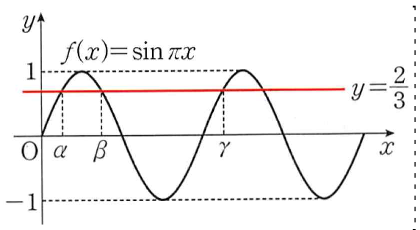


(1) $\overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\overline{P_3Q_3}^2+\ \cdots\ +\overline{P_9Q_9}^2$의 값을 구하여라.

(2) $\overline{OQ_1}^2+\overline{OQ_2}^2+\overline{OQ_3}^2+\ \cdots\ +\overline{OQ_9}^2$의 값을 구하여라.

9 9.함수 $f(x)=\sin\pi x\,(x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{2}{3}$가 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 α, β, γ라 할 때, $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\dfrac{1}{2}\right)$의 값은?

① $-\dfrac{2}{3}$　② $-\dfrac{1}{3}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{2}{3}$



10 10.방정식 $|\sin 2\pi x|=\dfrac{1}{3}(x-1)$을 만족하는 실근 x의 개수는?

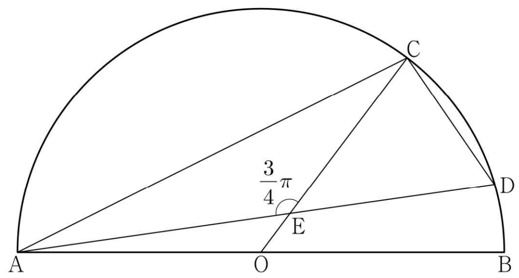
① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

11 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?

[4점][2022년 9월 공통13]

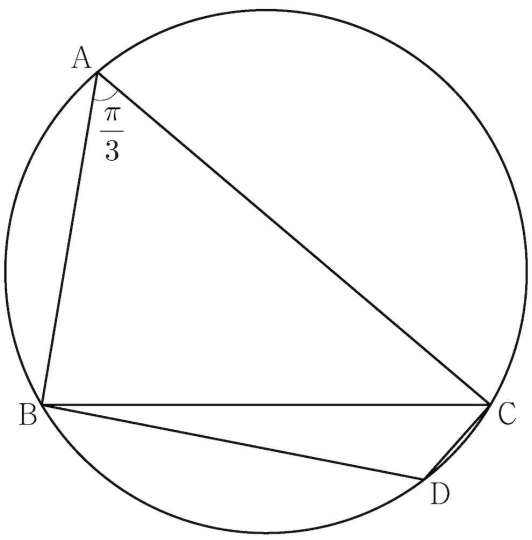


① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

12 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle\mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?

[4점][2021년 9월 12]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



13 13. 공차가 d_1, d_2인 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$일 때, [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. $a_n=n$이면 $b_n=4n-4$이다.
ㄴ. $d_1d_2=4$
ㄷ. $a_1\neq 0$이면 $a_n=n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

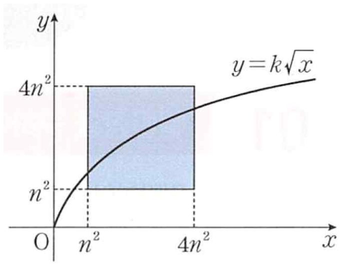
14 14. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n , 역수의 합을 T_n 이라 하면 $S_{12}=100$, $T_{12}=10$ 를 만족시킬 때, $\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{12}$ 의 값을 구하여라.

15 15.등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 1보다 작은 등비수열 $\{b_n\}$이

$$a_1+a_8=8,\ b_2b_7=12,\ a_4=b_4,\ a_5=b_5$$

를 모두 만족시킬 때, a_1의 값을 구하여라.

16 16.좌표평면에서 자연수 n에 대하여 A_n을 4개의 점 $(n^2,\ n^2)$, $(4n^2,\ n^2)$, $(4n^2,\ 4n^2)$, $(n^2,\ 4n^2)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형이라 하자. 정사각형 A_n과 함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



〈보 기〉

ㄱ. $a_5=15$

ㄴ. $a_{n+2}-a_n=7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k=200$

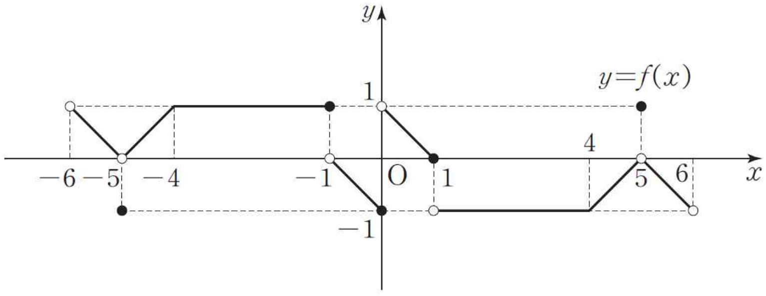
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17 17.공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은 $b_1=a_1$이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10}=a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

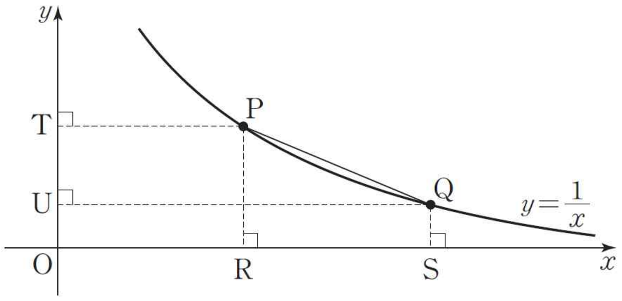
18 정의역이 $\{x \mid -6 < x < 6\}$인 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$-6 < n < 6$인 정수 n에 대하여 $\lim_{x \to n} |f(x)|$의 값이 존재하도록 하는 모든 n의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

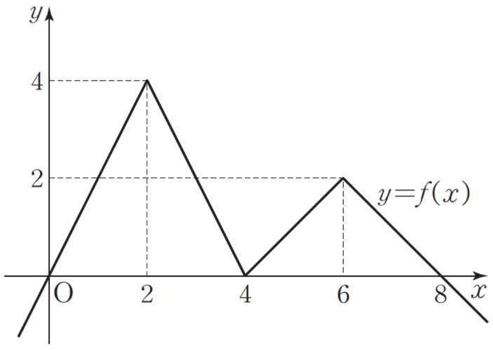
19 그림과 같이 $t > 1$일 때, 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 위의 두 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{t},\ \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, $\mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$에 대하여 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S, y축에 내린 수선의 발을 각각 T, U라 하자.



사각형 PRSQ의 넓이를 $S_1(t)$, 사각형 PTUQ의 넓이를 $S_2(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{S_1(t) \times S_2(t)}{t}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

20 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x<2) \\ -2x+8 & (2 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x < 6) \\ -x+8 & (x \ge 6) \end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.



자연수 n에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases} f(x-n) & (x<a) \\ f(x) & (x \ge a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

21 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n+1}-1}{\{f(x)\}^{2n}+1}$$

이라 하자. $g(0)>0$이고, 함수 $g(x)$가 $x=-1$, $x=2$에서만 불연속일 때, $f(3)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

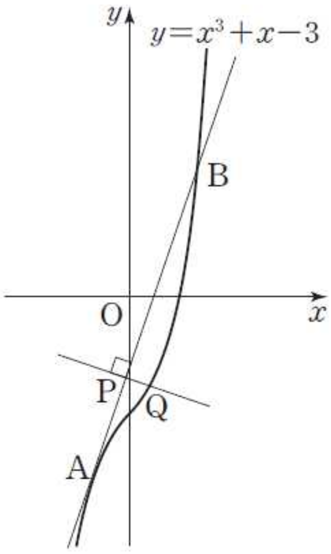
22 연속함수 $f(x)$가

$$f(1)f(2)<0,\ f(2)f(3)>0,\ f(3)f(4)>0$$

을 만족시킬 때, 다음 중 방정식 $f(x-1)f(x+1)=0$의 실근이 반드시 존재하는 구간은?

① $(1,\ 2)$ ② $(2,\ 3)$ ③ $(3,\ 4)$
④ $(4,\ 5)$ ⑤ $(5,\ 6)$

23 곡선 $y=x^3+x-3$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ -5)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 B라 하자. 선분 AB 위의 점 P를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 이 곡선과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최댓값은 a이다. $34a^2$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 두 점 A, B가 아니다.)



24 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{5}{3}\right)$의 값을 구하시오.

> (가) $f(1)=2,\ f(3)=8$
> (나) $1<x<3$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 3$이다.

25 삼차함수 $f(x)=-x^3-3x^2+ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

26 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극값을 갖는다.

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

27 2015학년도 대수능

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

> (가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (나) $f(0)=f'(0)$
> (다) $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f'(x)$이다.

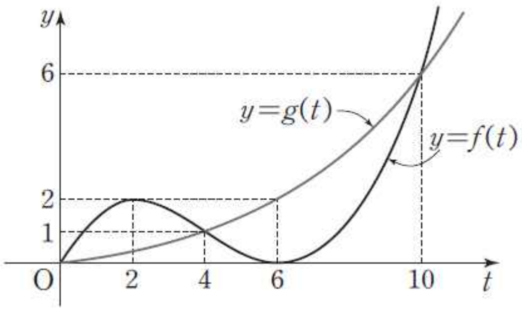
① 28 ② 33 ③ 38
④ 43 ⑤ 48

28 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|f(x)-4x|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\geq 0$이다.

$f(3)$의 값을 구하시오.

29 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t에서의 위치가 각각 다항함수 $f(t)$, $g(t)$이다. 두 다항함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같고, $f'(2)=f'(6)=0$이다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $0<t<2$일 때, 점 A는 점 B보다 원점에서 항상 멀리 있다.
ㄴ. $2<t<6$일 때, 두 점 A, B는 서로 반대 방향으로 움직인다.
ㄷ. $6<t<10$일 때, 두 점 A, B의 속도가 같아지는 순간이 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30 $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x(x-1)|dx$의 값은?

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

31 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=f'(2)=0$
(나) $f(-1)=f(2)=2$

$\int_{-1}^{2}|f'(x)|dx=4$일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

32 정의역이 $\{x|x \geq 0\}$인 함수 $f(x)=\int_{0}^{2}|2t-x|dt$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

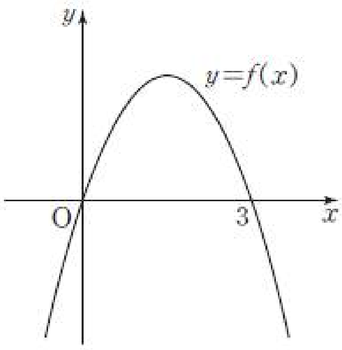
보기

ㄱ. $f(5)=6$
ㄴ. 최솟값은 2이다.
ㄷ. $x=4$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, $f(0)=f(3)=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{7}{6}$일 때, $f'(0)$의 값은?[4점] [2015학년도 대수능 9월 모의평가]



① $\frac{5}{2}$ ② 3

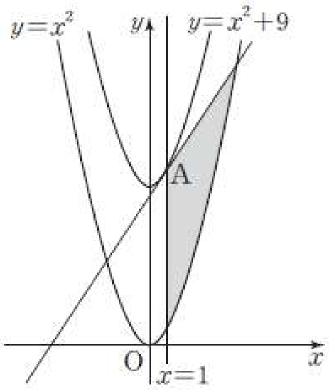
③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

34 함수 $f(x)=|x-3|(x-1)-4x+12$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 37 ② $\frac{112}{3}$ ③ $\frac{113}{3}$

④ 38 ⑤ $\frac{115}{3}$

35 그림과 같이 곡선 $y=x^2+9$와 직선 $x=1$이 만나는 점을 A라 할 때, 점 A에서의 접선과 곡선 $y=x^2$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 두 부분 중 직선 $x=1$의 오른쪽에 색칠된 부분의 넓이를 S라 하자. 곡선 $y=x^2+a^2$과 직선 $x=1$이 만나는 점을 B라 할 때, 점 B에서의 접선과 곡선 $y=x^2$ 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분 중 직선 $x=1$의 오른쪽 부분의 넓이가 $\frac{S}{9}$이다. 양수 a의 값은?

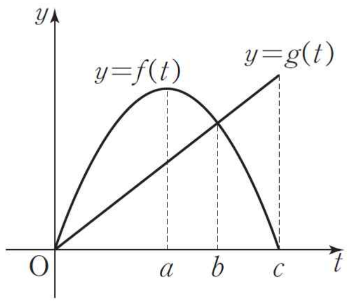


① ② ③

④ ⑤

36 2012학년도 대수능 9월 모의평가

같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 $t\,(0 \le t \le c)$에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)\,dt$이고 $0 \le t \le c$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

보기

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A는 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37 실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_m (m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 3월 미적분29]

38 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

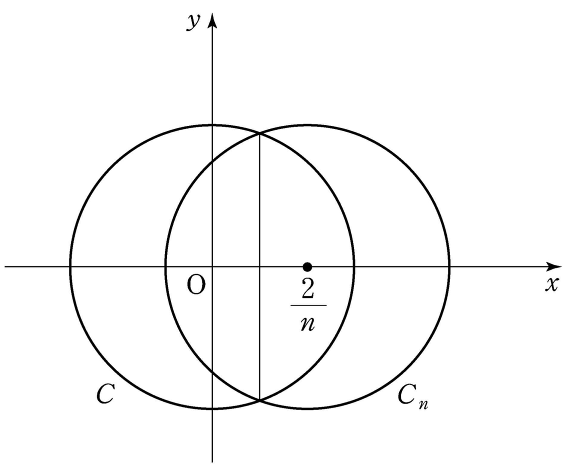
에 대하여 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은?

[3점][2022년 4월 미적분26]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

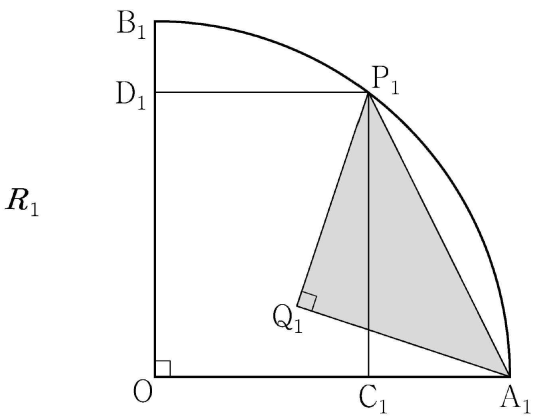
39 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C를 x축 방향으로 $\frac{2}{n}$만큼 평행이동시킨 원을 C_n이라 하자. 원 C와 원 C_n의 공통현의 길이를 l_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

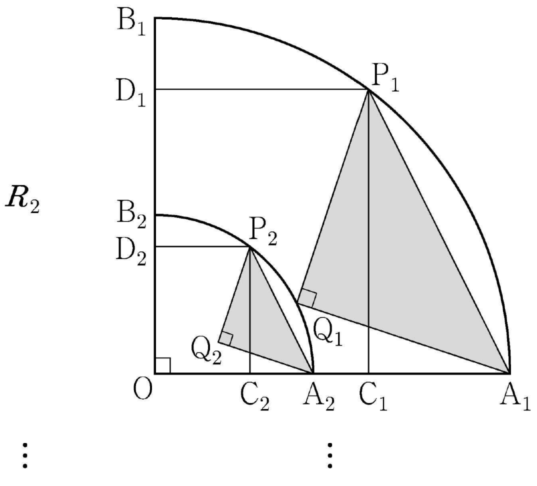
[4점][2008학년도 수능 나24]



40 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1위에 점 P_1, 선분 OA_1위에 점 C_1, 선분 OB_1위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1} : \overline{OD_1} = 3 : 4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1} = \overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1 = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1위의 점 A_2와 선분 OB_1위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1} = \overline{OA_2} = \overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[3점][2023학년도 수능 미적분27]

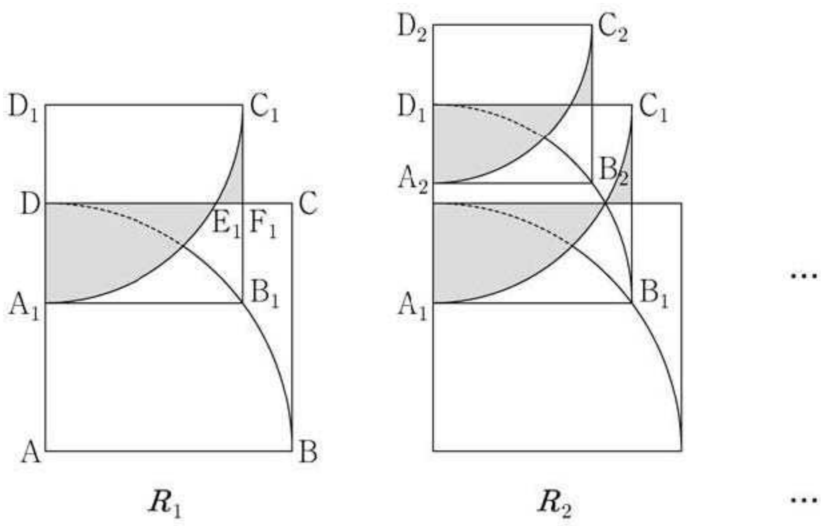




① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

41 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD 와 만나는 점을 B_1이라 하자.
선분 A_1B_1을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린 후, 중심이 D_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $D_1A_1C_1$을 그린다. 선분 DC가 호 A_1C_1, 선분 B_1C_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 DA_1, DE_1과 호 A_1E_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 E_1F_1, F_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $A_1B_1D_1$을 그린다. 선분 A_1D_1을 $3:2$로 내분하는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 호 B_1D_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 한 변으로 하고 선분 D_1C_1과 만나도록 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?

[4점][2020학년도 수능 나18]



① $\frac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ② $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

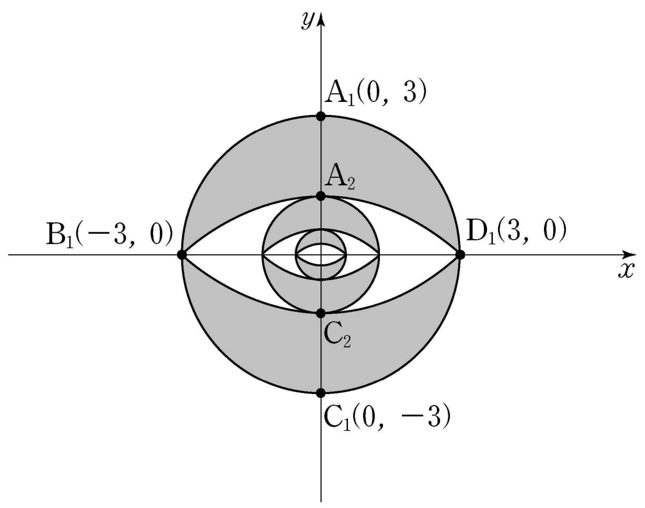
③ $\frac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ ④ $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

⑤ $\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

42 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0, 3)$, $B_1(-3, 0)$, $C_1(0, -3)$, $D_1(3, 0)$이라 하자.
두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자.
호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.
선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자. 호 $B_2A_2D_2$와 호 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$와 호 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은?

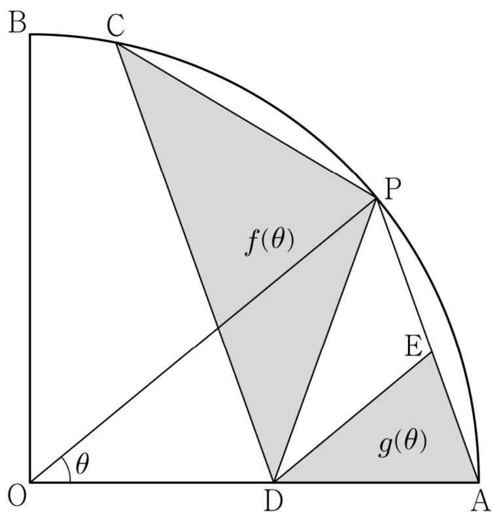
[4점][2010학년도 수능 가나15]



① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

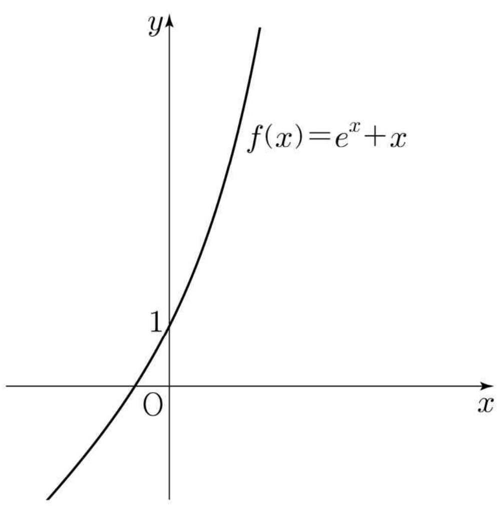
43 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

44 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



45 함수 $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$의 역함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{g\left(1+\frac{1}{n}\right)-g\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

의 값을 p라 할 때, $4p$의 값을 구하시오.

[4점][2012년 4월 가28]

46 매개변수 $t(0<t<\pi)$로 나타내어진 곡선

$$x=\sin t-\cos t,\ y=3\cos t+\sin t$$

위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, $a+b$의 값은?

[3점][2022년 10월 미적분25]

① 0 ② $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

④ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

47 함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq t$ $(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자.

함수 $g(t)$가 $t=\frac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)

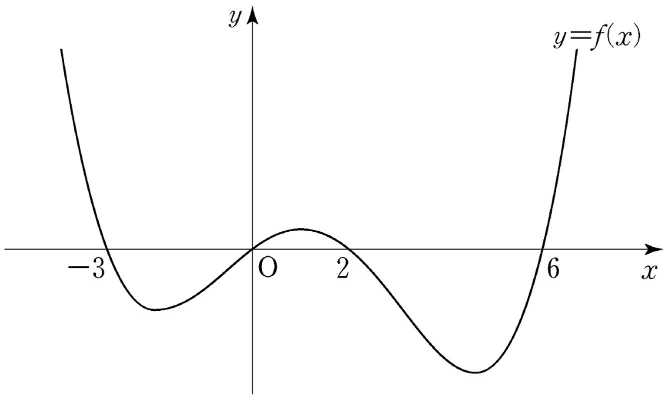
[4점][2016년 3월 가30]

48 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$$

을 만족시키는 정수 m 의 개수는?

[4점][2012년 6월 가19]



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

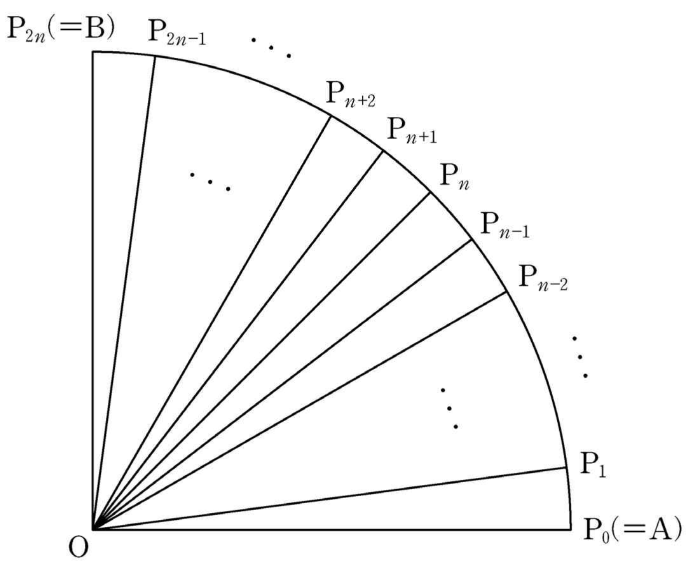
49 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다.

자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A)$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $P_{2n}(=B)$라 하자.

주어진 자연수 n에 대하여 $S_k\,(1\le k\le n)$을

삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$ 의 값은?

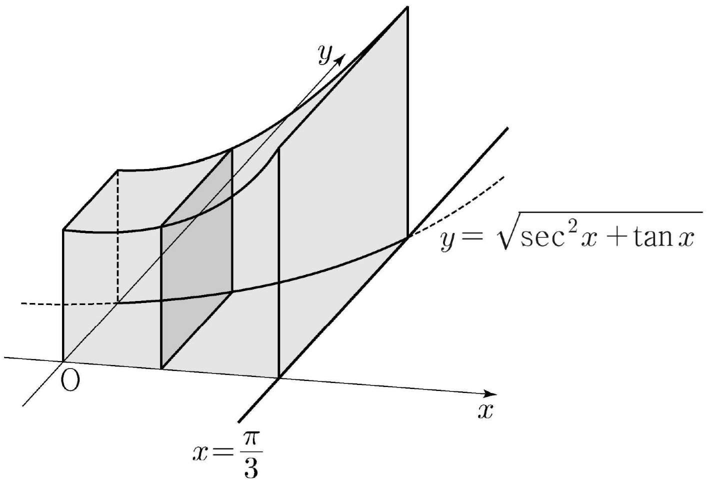
[3점][2014년 9월 가13]



① ② ③ ④ ⑤

50 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

[3점][2023학년도 수능 미적분26]

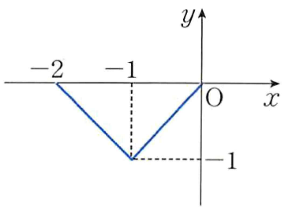


① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$

④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

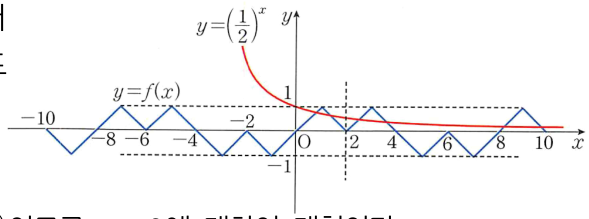
1. 답. ⑤

조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



조건 (나)에서 $y=f(x)$의 그래프는 $f(-x)=-f(x)$이므로 원점에 대하여 대칭이고

조건 (다)에서 $y=f(x)$의 그래프는



$f(2-x)=f(2+x)$이므로 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$y=f(x)$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 두 그래프의 교점의 개수는 6

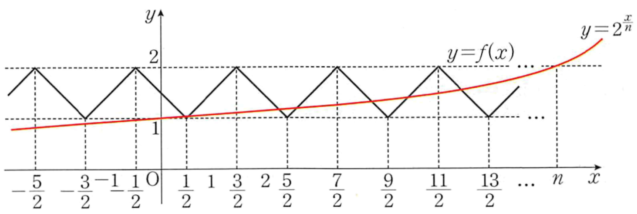
2. 답. 9

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 주기함수이고 주기는 2이다.

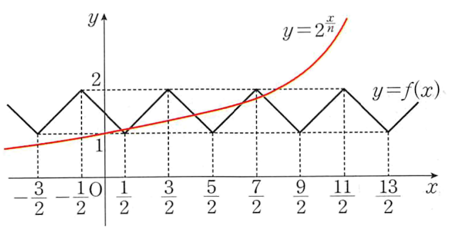
$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)=\begin{cases}-x+\frac{3}{2} & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)\\ x+\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

이므로 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$과 점 $(n,\ 2)$를 지나는 함수이므로 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



조건에서 $1\le f(x)\le 2$이고 $x<0$에서 $0<y=2^{\frac{x}{n}}<1$이므로 $x<0$에서는 교점이 없다.

$x>0$에서 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 $y=f(x)$와의 교점을 생각하면 $2^{\frac{x}{n}}=2$의 해 이 이어야 한다.

즉 에서 이 자연수이므로 또는

따라서 합은

3. 답. (1) (2) ①

(1) 로그의 진수는 양수이므로 …… ㉠

$(\log_3 x)(\log_3 3x)\le 20$을 변형하면 $(\log_3 x)(\log_3 3+\log_3 x)\le 20$

$(\log_3 x)(1+\log_3 x)\le 20$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t(1+t)\le 20$, ,

$(t+5)(t-4)\le 0$

$\therefore\ -5\le t\le 4$

$-5\le \log_3 x\le 4$에서 $3^{-5}\le x\le 3^4$ $\therefore\ \frac{1}{243}\le x\le 81$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위는 $\frac{1}{243}\le x\le 81$

따라서 자연수 x의 최댓값은 81

(2) 진수 조건에 의하여 $\frac{x}{4}>0,\ 2x>0$이므로 …… ㉠

$\left(\log_2\frac{x}{4}\right)(\log_2 2x)\le 4$을 변형하면

$(\log_2 x-\log_2 4)(\log_2 2+\log_2 x)\le 4$

$(\log_2 x-2)(1+\log_2 x)\le 4$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $(t-2)(t+1)\le 4,\ t^2-t-2\le 4$

$t^2-t-6\le 0,\quad (t-3)(t+2)\le 0\ \ \therefore\ -2\le t\le 3$

즉 $-2\le \log_2 x\le 3,\quad \log_2 2^{-2}\le \log_2 x\le \log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4}\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위는 $\frac{1}{4}\le x\le 8$

따라서 $m=\frac{1}{4},\quad M=8$이므로 $m+M=\frac{1}{4}+8=\frac{33}{4}$

4. 33

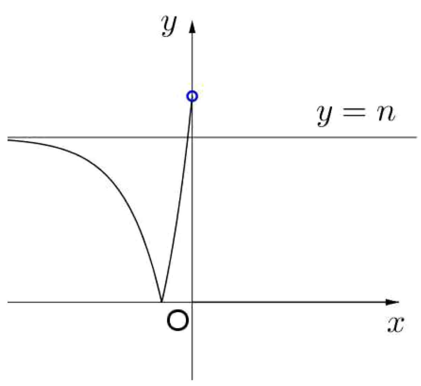
[출제의도] 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

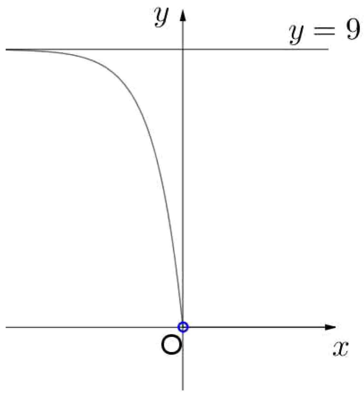
함수 $y=|3^{x+2}-n|$의 그래프는 점 $(0,\ |9-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$이다.

$x<0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=|3^{x+2}-n|$의 그래프는 다음과 같다.

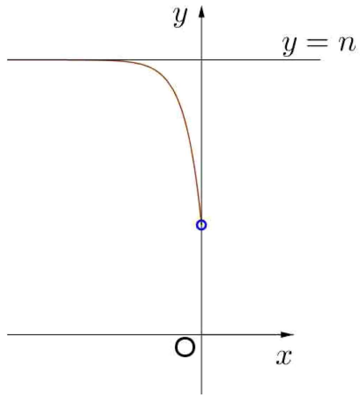
$1\le n<9$일 때,



일 때,



$n>9$일 때,

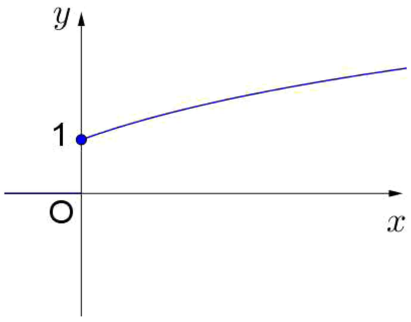


또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

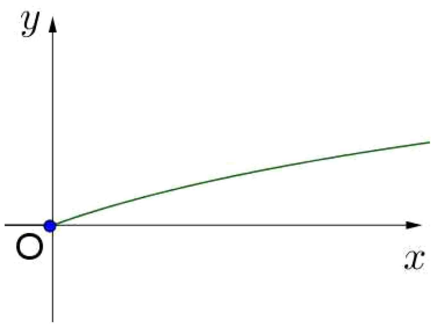
함수 $y=|\log_2(x+4)-n|$의 그래프는 점 $(0,\ |2-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

$x\geq 0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=|\log_2(x+4)-n|$의 그래프는 다음과 같다.

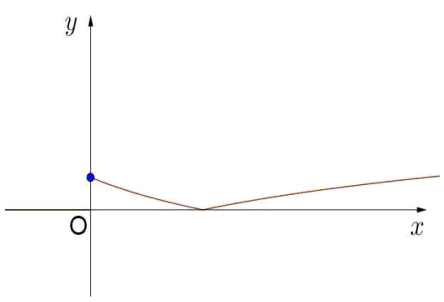
$n=1$일 때,



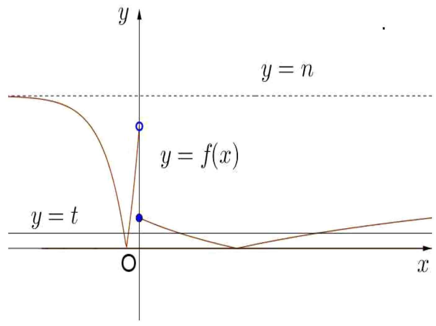
$n=2$일 때,



$n>2$일 때,



에 대한 방정식 의 서로 다른 실근의 개수 는 함수 의 그래프와 직선 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로 $9-n>0$이고 이어야 한다.

즉, $2<n<9$이다.

따라서 자연수 n의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8

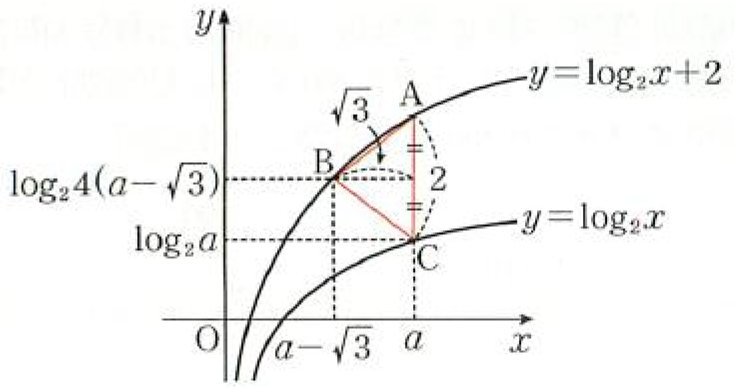
이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

이다.

5. 답. ③

$y=\log_2 4x=\log_2 x+2$ 이므로 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 축으로 만큼, 평행이동한 그래프이므로 정삼각형의 한 변의 길이는 이다.



A와 C의 x좌표를 a라 하면 $\overline{AC}=2$이고 정삼각형의 높이가 이므로 점 B의 x좌표는 $a-\sqrt{3}$ 이며 점 B의 y좌표는 또한, 점 B의 y좌표는 점 C의 y좌표에 1을 더한 값과 같으므로

$\log_2(a-\sqrt{3})=\log_2 a+1=\log_2 2a$

즉, $4(a-\sqrt{3})=2a$에서 $a=2\sqrt{3}$

이때 점 B의 좌표는 $B(a-\sqrt{3},\ \log_2 4(a-\sqrt{3}))$에서 $(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$

따라서 $p=\sqrt{3},\ q=\log_2 4\sqrt{3}$ 이므로

$p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

6. 답. (1) $\dfrac{45}{2}$ (2) $\dfrac{45}{2}$

(1) $\sin^2 1^\circ=\cos^2 89^\circ,\ \sin^2 3^\circ=\cos^2 87^\circ,\ \cdots$이므로

$\sin^2 1^\circ+\sin^2 3^\circ+\sin^2 5^\circ+\cdots+\sin^2 87^\circ+\sin^2 89^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 3^\circ+\sin^2 87^\circ)+\cdots+\sin^2 45^\circ$

(2) , , 이므로

$\cos^2 1° + \cos^2 3° + \cos^2 5° + \cdots \cos^2 87° + \cos^2 89°$

$= (\cos^2 1° + \cos^2 89°) + (\cos^2 3° + \cos^2 87°) + \cdots + \cos^2 45°$

$= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{22개} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= 22 \times 1 + \frac{1}{2}$

$= \frac{45}{2}$

7. 답. (1) 5 (2) 8

(1) $\cos\frac{11}{12}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12}$,

$\cos\frac{10}{12}\pi = \cos\left(\pi - \frac{2}{12}\pi\right) = -\cos\frac{2}{12}\pi$, $\cdots$이므로

$\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{2}{12}\pi + \cos^2\frac{3}{12}\pi + \cdots + \cos^2\frac{11}{12}\pi$

$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{2}{12}\pi + \cos^2\frac{3}{12}\pi + \cos^2\frac{4}{12}\pi + \cos^2\frac{5}{12}\pi\right) + \cos^2\frac{6}{12}\pi$

$2\left\{\left(\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{5}{12}\pi\right) + \left(\cos^2\frac{2}{12}\pi + \cos^2\frac{4}{12}\pi\right) + \cos^2\frac{3}{12}\pi\right\} + \cos^2\frac{6}{12}\pi$

$= 2\left\{1 + 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} + 0$

$= 5$

(2) $\sin\frac{15}{16}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{16}\right) = \sin\frac{\pi}{16}$,

$\sin\frac{14}{16}\pi = \sin\left(\pi - \frac{2}{16}\pi\right) = \sin\frac{2}{16}\pi$, $\cdots$이므로

$\sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{2}{16}\pi + \sin^2\frac{3}{16}\pi + \cdots + \sin^2\frac{15}{16}\pi$

$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{2}{16}\pi + \sin^2\frac{3}{16}\pi + \sin^2\frac{4}{16}\pi\right.$

$\left. + \cdots + \sin^2\frac{7}{16}\pi\right) + \sin^2\frac{8}{16}\pi$

$2\left\{\left(\sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{7}{16}\pi\right) + \left(\sin^2\frac{2}{16}\pi + \sin^2\frac{6}{16}\pi\right)\right.$

$\left. + \left(\sin^2\frac{3}{16}\pi + \sin^2\frac{5}{16}\pi\right) + \sin^2\frac{4}{16}\pi\right\} + \sin^2\frac{8}{16}\pi$

$= 2\left\{1 + 1 + 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} + 1$

$= 8$

8. 답. (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$

(1) $\overline{P_1Q_1} = \overline{OP_1}\sin\theta = \sin\theta$

$\overline{P_2Q_2} = \overline{OP_2}\sin 2\theta = \sin 2\theta$

에서 이므로

이고 같은 방법으로

$\sin 7\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \cos 3\theta$

$\sin 8\theta = \sin(\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$

$\sin 9\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

따라서 $\overline{P_1Q_1}^2 + \overline{P_2Q_2}^2 + \overline{P_3Q_3}^2 + \cdots + \overline{P_9Q_9}^2$

$\sin^2\theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \cdots + \sin^2 9\theta$

$= \sin^2\theta + \sin^2 2\theta + \sin^3 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta$

$+ \cos^2 2\theta + \cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta)$

$+ (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta) + \sin^2 5\theta$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + \sin^2\frac{\pi}{4}$

$= 4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}$

(2) $\overline{OQ_1} = \overline{OP_1}\cos\theta = \cos\theta$

$\overline{OQ_2} = \overline{OP_2}\cos 2\theta = \cos 2\theta$

$\vdots$

$\overline{OQ_9} = \overline{OP_9}\cos 9\theta = \cos 9\theta$

$10\theta = \frac{\pi}{2}$에서 $6\theta = 10\theta - 4\theta = \frac{\pi}{2} - 4\theta$이므로

$\cos 6\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right) = \sin 4\theta$이고 같은 방법으로

$\cos 7\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \sin 3\theta$

$\cos 8\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \sin 2\theta$

$\cos 9\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

따라서 $\overline{OQ_1}^2 + \overline{OQ_2}^2 + \overline{OQ_3}^2 + \cdots + \overline{OQ_9}^2$

$\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 9\theta$

$= \cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta + \cos^2 5\theta$

$+ \sin^2 4\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 2\theta + \sin^2\theta$

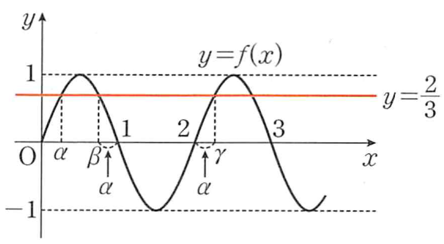
$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta)$

$+ (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta) + \cos^2 5\theta$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + \cos^2\frac{\pi}{4}$

$= 4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}$

9. 답. ②



함수 의 주기는 이므로

주기가 2인 사인함수의 성질에 의하여 $\gamma=2+\alpha$

$\alpha+\beta+\gamma+1=1+(2+\alpha)+1=4+\alpha$

$\alpha+\beta+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(4+\alpha)=f(\alpha)=\dfrac{2}{3}$ ($\because$ $f(x)$의 주기가 2)

$f\left(\alpha+\beta+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$

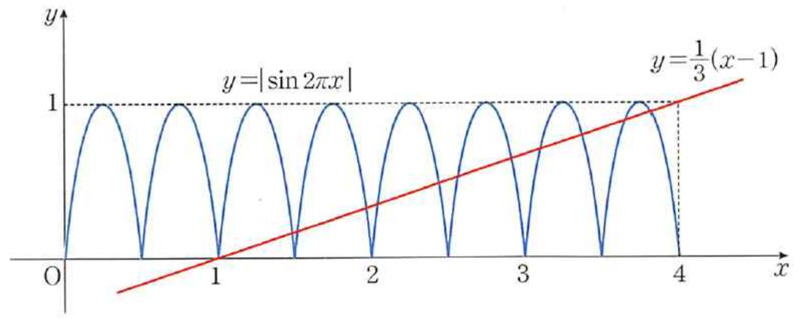
따라서 $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}+(-1)=-\dfrac{1}{3}$

10. 답. ④

방정식 $|\sin 2\pi x|=\dfrac{1}{3}(x-1)$의 실근의 개수는 함수 $y=|\sin 2\pi x|$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{3}(x-1)$의 교점의 개수와 같다.

$y=|\sin 2\pi x|$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2\pi}=\dfrac{1}{2}$이고, $y=\dfrac{1}{3}(x-1)$의 그래프는 $(1,\ 0)$과 $(4,\ 1)$을 지나므로

이때 $y=|\sin 2\pi x|$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{3}(x-1)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 방정식 $|\sin 2\pi x|=\dfrac{1}{3}(x-1)$의 실근의 개수는 12이다.

11. ⑤

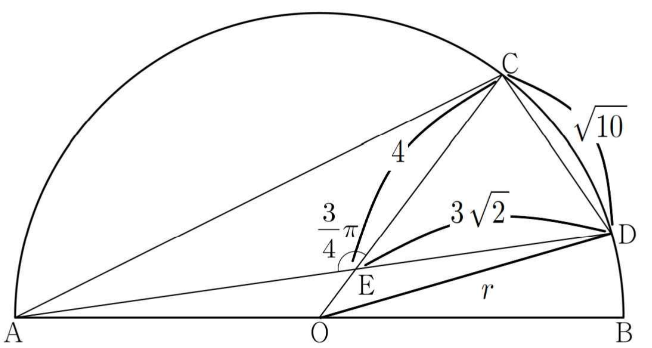
삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 따라

$\overline{CD}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\cos(\angle CED)$

$=16+18-24\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10,$

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{10}$

원의 반지름을 r이라 할 때,



삼각형 에서 코사인 법칙에 따라

,

삼각형 에서 라 할 때, 사인법칙에 따라

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2r,\ \dfrac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10,\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 AEC에서

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\dfrac{3}{4}\pi}=\dfrac{4}{\sin\theta},\ \overline{AC}=\dfrac{4}{\dfrac{\sqrt{10}}{10}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{40}{2\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

12. ②

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{BC}=\sin\dfrac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 이므로

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times4\sqrt{7}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$

한편, $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{CD}=2$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

13. 답. ③

ㄱ. $a_n=n$이면 $S_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$이므로

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서 $\dfrac{n(n+1)}{2}T_n=n^2(n^2-1)$

$\therefore\ T_n=2\cdot\dfrac{n^2(n^2-1)}{n(n+1)}=2n(n-1)$

이때 $b_n=T_n-T_{n-1}=2n(n-1)-2(n-1)(n-2)=4n-4\,(n\geq2)$

즉 이므로 [참]

ㄴ. 이므로

에서

$n\{2a_1+(n-1)d_1\}\cdot n\{2b_1+(n-1)d_2\}=4n^2(n^2-1)$

양변의 n^4의 계수를 비교하면 $d_1d_2n^4=4n^4$

$\therefore\ d_1d_2=4$ [참]

ㄷ. $S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서 $S_1T_1=0$이므로 $a_1\neq 0$이면 $b_1=0$ 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 0이고 공차가 d_2이므로

n항까지의 합 $T_n=0+d_2+2d_2+\cdots+(n-1)d_2=\dfrac{n(n-1)d_2}{2}$

이때 $S_nT_n=S_n\cdot\dfrac{n(n-1)d_2}{2}=n^2(n^2-1)$

$\therefore\ S_n=\dfrac{2n(n+1)}{d_2}$

즉, $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2n(n+1)}{d_2}-\dfrac{2(n-1)n}{d_2}=\dfrac{4n}{d_2}$ [거짓]

반례 $a_n=2n,\ b_n=2n-2$일 때,

$S_nT_n=\left\{2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}\left\{2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-2n\right\}=n(n+1)\cdot n(n-1)=n^2(n^2-1)$

즉, $a_1=2\neq 0$ 이지만 $a_n=n$은 아니다. [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14. 답. 13

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a_1, 공비를 r 이라 하면

등비수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 의 첫째항을 $\dfrac{1}{a}$, 공비를 $\dfrac{1}{r}$ 이라 할 수 있다.

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=\dfrac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}=100$ …… ㉠

$T_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{\dfrac{1}{a_1}\left(1-\dfrac{1}{r^{12}}\right)}{1-\dfrac{1}{r}}=\dfrac{1}{ar^{11}}\cdot\dfrac{r^{12}-1}{r-1}=10$

…… ㉡

㉡ ÷ ㉠ 에서 $\dfrac{1}{a^2r^{11}}\cdot 100=10\ \therefore\ a^2r^{11}=10$

$\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{12}=\log(a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^{11})=\log a^{12}$

$=\log(a^2r^{11})^6=\log 10^6=6$

다른풀이

$T_{12}=\dfrac{1}{a_1a_{12}}S_{12}$ 이므로 $10=\dfrac{1}{a_1a_{12}}\cdot 100\quad\therefore\ a_1a_{12}=10$

즉, $a_1a_{12}=a_1\cdot a_1r^{11}=a_1{}^2\cdot r^{11}=10$

따라서 $\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{12}=\log a^{12}r^{66}$

$=\log(a^2r^{11})^6=\log 10^6=6$

15. 답.

수열 은 등차수열이므로 등차수열의 성질에 의하여

수열 은 등비수열이므로 등비수열의 성질에 의하여

이때 이므로

$a_4,\ a_5$가 두 이차방정식의 근이라 하면 이차방정식의 근과 계수에 관계에 의해 이차방정식 $x^2-8x+12=0$의 두 근이다.

즉, $(x-6)(x+2)=0$이므로 수열 $\{b_n\}$의 공비가 보다 작은 등비수열이므로

$a_4=6,\ a_5=2\ (\because\ a_4=b_4,\ a_5=b_5,\ b_4>b_5)$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 이므로

$a_4=a_1+(4-1)\times(-4)=6\qquad\therefore$

주의 주어진 조건을 다음과 같이 나타내어 연립하면 복잡하게 된다.

$a_1+a_8=a+(a+7d)=2a+7d=8$

$b_2b_7=br\cdot br^6=b^2r^7=12$

$a_4=b_4$에서 $a+3d=br^3$

$a_5=b_5$에서 $a+4d=br^4$

참고 $a_4+a_5=b_4+b_5=8,\ b_4b_5=12$를 연립하면

$b_4b_5=b_4(8-b_4)=12$에서 ,

$(b_4-2)(b_4-6)=0$

$\therefore\ b_4=2$ 또는 $b_4=6$

수열 $\{b_n\}$은 공비가 1보다 작은 등비수열이므로

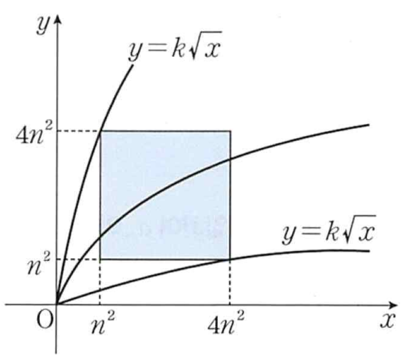
$a_4=b_4=6,\ a_5=b_5=2$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 이므로

$a_4=a_1+3\cdot(-4)=6\qquad\therefore\ a_1=18$

16. 답. ④

다음 그림과 같이 함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 정사각형 과 만나려면 함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프는 두 점 $(4n^2,\ 4n^2)$, $(n^2,\ 4n^2)$을 양 끝점으로 하는 선분과 만나야 한다.



함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(4n^2,\ n^2)$을 지날 때,

$\therefore\ k=\dfrac{n}{2}$

함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 점 $(n^2,\ 4n^2)$을 지날 때,

$\therefore\ k=4n$

따라서 함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프와 정사각형 A_n이 만나려면

$\dfrac{n}{2}\leq k\leq 4n$

ㄱ. 일 때, 을 만족시키는 자연수 는 의

개이므로 [거짓]

ㄴ. (ⅰ) 이 홀수일 때,

㉠

$\therefore\ a_{n+2}-a_n=7$ [참]

(ii) n이 짝수일 때,

$a_n=4n-\left(\frac{1}{2}n\right)+1=\frac{7}{2}n+1$ ……㉡

$a_{n+2}=4(n+2)-\left\{\frac{1}{2}(n+2)\right\}+1=\frac{7}{2}n+8$

$\therefore\ a_{n+2}-a_n=7$ [참]

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{5}\left\{\frac{7}{2}(2k-1)+\frac{1}{2}\right\}+\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{7}{2}\cdot 2k+1\right)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=\sum_{k=1}^{5}(7k-3+7k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}(14k-2)$

$=14\cdot\frac{5\cdot 6}{2}-2\cdot 5$

$=200$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

17. 답. 13

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\,(d\neq 0)$라 하자.

$b_2=b_1+a_2=a_1+(a_1+d)=2a_1+d$

$b_3=b_2-a_3=(2a_1+d)-(a_1+2d)=a_1-d$

$b_4=b_3+a_4=(a_1-d)+(a_1+3d)=2a_1+2d$

$b_5=b_4+a_5=(2a_1+2d)+(a_1+4d)=3a_1+6d$

$b_6=b_5-a_6=(3a_1+6d)-(a_1+5d)=2a_1+d$

$b_7=b_6+a_7=(2a_1+d)+(a_1+6d)=3a_1+7d$

$b_8=b_7+a_8=(3a_1+7d)+(a_1+7d)=4a_1+14d$

$b_9=b_8-a_9=(4a_1+14d)-(a_1+8d)=3a_1+6d$

$b_{10}=b_9+a_{10}=(3a_1+6d)+(a_1+9d)=4a_1+15d$

이때 $b_{10}=a_{10}$이므로 $4a_1+15d=a_1+9d$

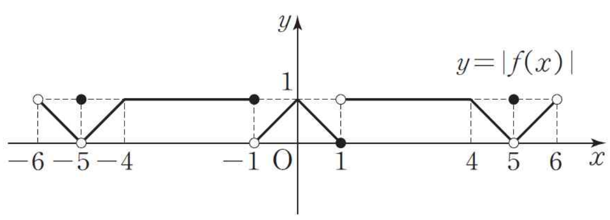
$\therefore\ a_1=-2d$

이때 $\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{4a_1+14d}{4a_1+15d}=\frac{4\times(-2d)+14d}{4\times(-2d)+15d}=\frac{6}{7}$

따라서 $p=7,\ q=6$이므로 $p+q=7+6=13$

18. 답. ④

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 인 정수 에 대하여 의 값이 존재하기 위해서는

가 성립해야 한다.

그런데 , 일 때는

$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=0,\ \lim_{x\to -1-}|f(x)|=1$

$\lim_{x\to 1+}|f(x)|=1,\ \lim_{x\to 1-}|f(x)|=0$이므로

$\lim_{x\to n+}|f(x)|\neq\lim_{x\to n-}|f(x)|$

따라서 $\lim_{x\to n}|f(x)|$의 값이 존재하는 n의 값은

$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$로 9개이다.

19. 답. ③

$S_1(t)=\frac{1}{2}(t-\sqrt{t})\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}\right)$

$=\frac{1}{2}(t-\sqrt{t})\times\frac{t+\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{t^2-t}{t\sqrt{t}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{t-t}{\sqrt{t}}$

$S_2(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right)(\sqrt{t}\ |\ t)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{t-\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}\times(t+\sqrt{t})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{t^2-t}{t\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\times\frac{t-1}{\sqrt{t}}$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_1(t)\times S_2(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\times\frac{(t-1)^2}{t}}{t}$$

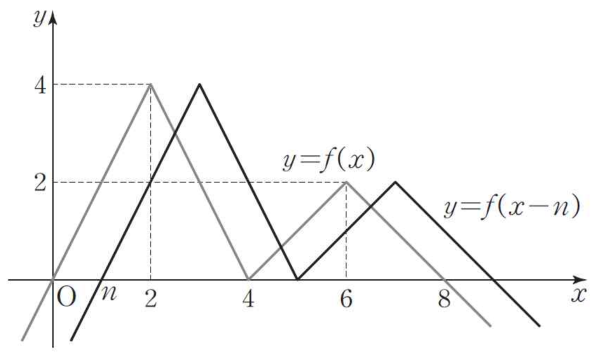
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t-1)^2}{4t^2}\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-2t+1}{4t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}{4}=\frac{1}{4}$$

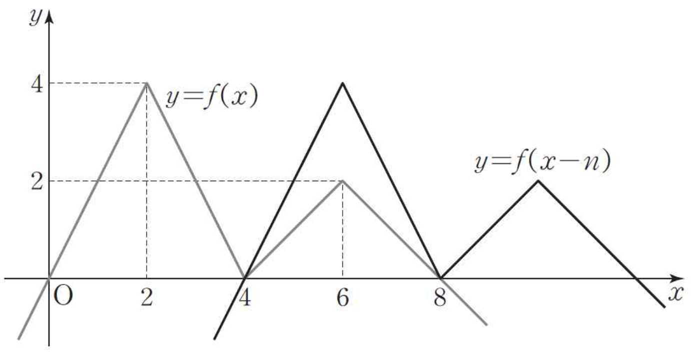
20. 답. ④

함수 $y=f(x-n)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.

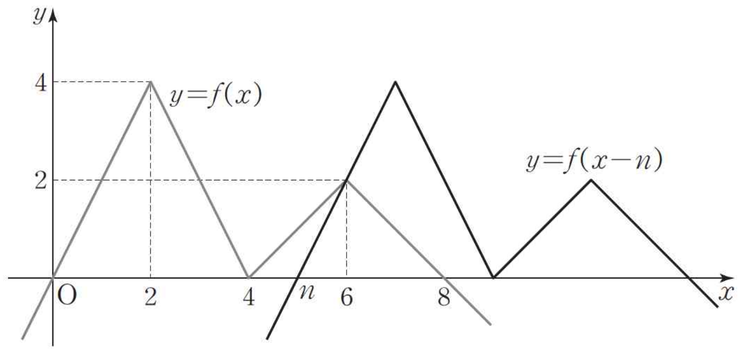
(i) $1\le n<4$일 때



(ii) 일 때



(iii) $n>4$일 때



함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 a의 값은 그림에서 $y=f(x-n)$, $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표 중 하나이어야 한다.
따라서 n의 값에 따른 교점의 개수는

$$a_n=\begin{cases}3 & (1\le n<4)\\ 2 & (n=4)\\ 1 & (n>4)\end{cases}$$

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=3\times3+2\times1+1\times6=17$

21. 답. ③

$g(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n+1}-1}{\{f(x)\}^{2n}+1}$에서

(i) $|f(x)|<1$일 때, $g(x)=-1$

(ii) $|f(x)|>1$일 때, $g(x)=f(x)$

(iii) $f(x)=1$일 때, $g(x)=0$

(iv) $f(x)=-1$일 때, $g(x)=-1$

$g(0)>0$이므로 $|f(0)|>1$

따라서 $f(0)>1$

$f(x)\to-1-$이면 (ii)에서 $g(x)\to-1$

$f(x)\to-1+$이면 (i)에서 $g(x)=-1$

$f(x)=-1$이면 (iv)에서 $g(x)=-1$

이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)=-1$인 x의 값에서 연속이다.

$f(x)\to1-$이면 (i)에서 $g(x)=-1$

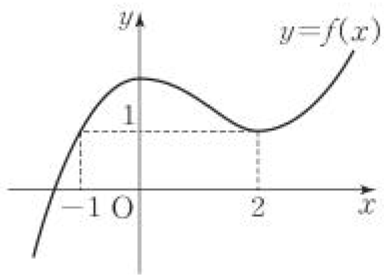
$f(x)\to1+$이면 (ii)에서 $g(x)\to1$

$f(x)=1$이면 $g(x)=0$

이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)=1$인 x의 값에서 불연속이다.

함수 $g(x)$가 $x=-1$, $x=2$에서만 불연속이므로 $f(x)=1$을 만족시키는 의 값은 과 뿐이다.

이므로 함수 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 $f(x)-1=(x+1)(x-2)^2$에서

$f(x)=(x+1)(x-2)^2+1$이므로 $f(3)=4\times1+1=5$

22. 답. ②

$g(x)=f(x-1)f(x+1)$이라 하면 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 함수 $g(x)$도 연속함수이다.

$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)>0$에서 $f(1)\{f(2)\}^2f(3)<0$이므로

$f(2)\neq0$, $f(1)f(3)<0$이고,

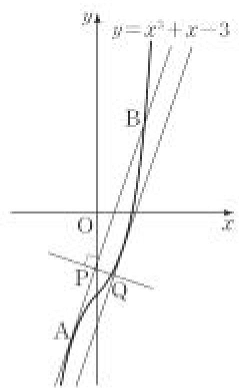
$f(2)f(3)>0$, $f(3)f(4)>0$에서 $f(2)\{f(3)\}^2f(4)>0$이므로

$f(3)\neq0$, $f(2)f(4)>0$이다.

$g(2)=f(1)f(3)<0$, $g(3)=f(2)f(4)>0$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x-1)f(x+1)=0$의 실근이 반드시 존재하는 구간은 열린 구간 $(2,\ 3)$이다.

23. 답 32

그림과 같이 점 Q에서의 접선의 기울기와 직선 의 기울기가 같을 때, 선분 PQ의 길이가 최대이다.



$y=x^3+x-3$에서 $y'=3x^2+1$이므로 직선 AB의 기울기는

$3\times(-1)^2+1=4$

점 Q의 x좌표를 q라 하면

$3q^2+1=4$, $3(q-1)(q+1)=0$

이때 $q\neq-1$이므로 $q=1$

직선 AB의 방정식은 $y=4(x+1)-5$, 즉 $4x-y-1=0$이고, 점 의 좌표는 $(1,\ -1)$이므로

$$a=\frac{|4\times1-(-1)-1|}{\sqrt{16+1}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

따라서

24. 답

[해설]

인 실수 에 대하여 닫힌구간 에서 연속이고 열린구간 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(c_1)$ $(1<c_1<t)$인 c_1이 존재한다.

$f'(x)\le 3$이므로 $\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\le 3$, $f(t)-f(1)\le 3(t-1)$

따라서 $f(t)\le 3t-1$ ⋯⋯ ㉠

닫힌구간 $[t,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(t,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(3)-f(t)}{3-t}=f'(c_2)$ $(t<c_2<3)$인 c_2가 존재한다.

$f'(x)\le 3$이므로 $\dfrac{f(3)-f(t)}{3-t}\le 3$, $f(3)-f(t)\le 3(3-t)$

따라서 $f(t)\ge 3t-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(t)=3t-1$ $(1<t<3)$이므로

$f\left(\dfrac{5}{3}\right)=3\times\dfrac{5}{3}-1=4$

25. 답 ①

삼차함수 $f(x)=-x^3-3x^2+ax$의 역함수가 존재하려면 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하여야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)=-x^3-3x^2+ax$에서 $f'(x)=-3x^2-6x+a$이므로

모든 실수 x에 대하여 $-3x^2-6x+a\le 0$, $3x^2+6x-a\ge 0$

방정식 $3x^2+6x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=9+3a\le 0$

따라서 $a\le -3$이므로 상수 a의 최댓값은 -3이다.

26. 답 ⑤

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i) $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$에서

$\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=g(0)$

$\lim\limits_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=f(0)$

$-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$

$f(0)=0$⋯⋯㉠

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$의 값이 존재한다.

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

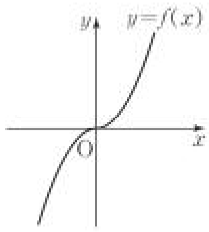
$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-f(x)-f(0)}{x-0}$

(㉠에의해)

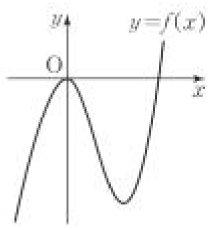
,

㉡

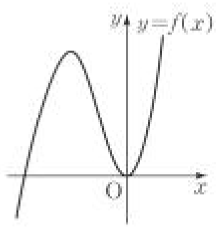
㉠, ㉡에 의하여 함수 의 그래프는 [그림1], [그림2], [그림3] 중 하나이다.



[그림1]

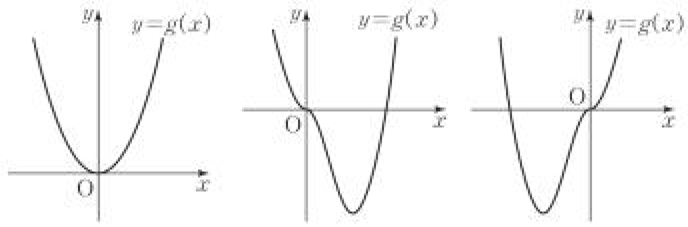


[그림2]

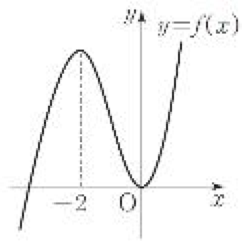


[그림3]

[그림1], [그림2], [그림3]의 각 경우에 대하여 함수 의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=0$

$f'(-2)=12-4a=0$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2$이므로

$f(2)=2^3+3\times 2^2=20$

27. 답 ⑤

[해설]

조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

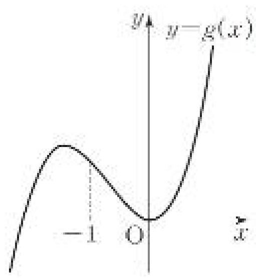
$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f(0)=f'(0)$에서 $c=b$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$g(0)=0$이고, $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이므로 그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서 $g'(0)=0$이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$에서

$g'(0)=b-2a=0$

따라서 $b=2a$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2=x^2(x+a-3)$이므로 $g(x)=0$에서

또는 이고, 에서 이므로

이어야 한다. 따라서

이므로

따라서 의 최솟값은 이다.

28. 답

삼차방정식 $f(x)-4x=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 방정식 $f(x)-4x=0$의 해를 α라 하면 함수 $|f(x)-4x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $f(x)-4x=(x-\alpha)^3$이어야 한다.

즉, $f(x)=(x-\alpha)^3+4$ ……㉠

조건 (나)에서 $x>0$일 때, $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때, $f(x)\leq 0$이므로 $x=0$일 때 $f(x)=0$이다.

㉠에서 $f(0)=(0-\alpha)^3+4\times 0=-\alpha^3=0$이므로

$\alpha=0$

따라서 $f(x)=x^3+4x$이므로

$f(3)=3^3+4\times 3=39$

29. 답 ⑤

ㄱ. $0<t<2$일 때, $f(t)>g(t)$이므로 점 A는 점 B보다 원점에서 항상 멀리있다. (참)

ㄴ. $2<t<6$일 때, $f'(t)<0$이고 $g'(t)>0$이므로 두 점 A, B는 서로 반대 방향으로 움직인다. (참)

ㄷ. $h(t)=f'(t)-g'(t)$라 하면 함수 $h(t)$는 닫힌 구간 $[6,\ 10]$에서 연속이고, $f'(6)=0,\ g'(6)>0$에서 $h(6)=f'(6)-g'(6)<0$, $f'(10)>g'(10)$에서 $h(10)=f'(10)-g'(10)>0$이므로 사이값 정리에 의하여 $h(c)=0$, 즉 $f'(c)=g'(c)$인 c가 열린 구간 $(6,\ 10)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

30. 답 ①

[해설]

$$\int_{-1}^{1}|x(x-1)|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x(x-1)dx+\int_{0}^{1}-x(x-1)dx$$

$$\equiv\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$

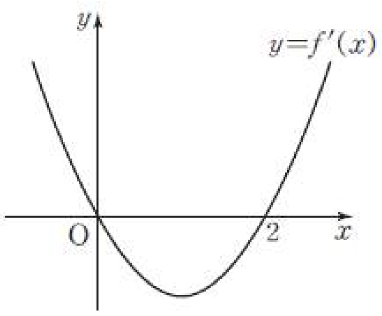
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

31. 답 ④

[해설]

$f'(0)=f'(2)=0$이고 삼차함수 $y=f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$=\int_{-1}^{0}|f'(x)|dx+\int_{0}^{2}|f'(x)|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}f'(x)dx+\int_{0}^{2}[-f'(x)]dx$$

$$=\Big[\ f(x)\ \Big]_{-1}^{0}+\Big[\ -f(x)\ \Big]_{0}^{2}$$

$=\{[f(0)-f(-1)]+[-f(2)+f(0)]$

$=2f(0)-[f(-1)+f(2)]$

$=2f(0)-4=4$

따라서 $2f(0)=8$이므로 $f(0)=4$이다.

[다른 풀이]

$f'(x)=ax(x-2)\ (a>0)$이라 하면

$$\int_{-1}^{2}|f'(x)|dx=a\int_{-1}^{0}x(x-2)dx-a\int_{0}^{2}x(x-2)dx$$

$$=a\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-a\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx$$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-a\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}a=4$$

따라서 $a=\dfrac{3}{2}$이므로 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x(x-2)$

즉, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(-1)=f(2)=2$에서 $C=4$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4$이므로 $f(0)=4$

32. 답 ⑤

[해설]

$|2t-x|=0$에서 $t=\dfrac{x}{2}$

(ⅰ) $\dfrac{x}{2}\geq 2$일 때, 즉 $x\geq 4$일 때

$$f(x)=\int_{0}^{2}|2t-x|dt=\int_{0}^{2}(x-2t)dt=\Big[\ xt-t^2\Big]_{0}^{2}=2x-4$$

(ⅱ) $0\leq\dfrac{x}{2}\leq 2$일 때, 즉 $0\leq x\leq 4$일 때

$$f(x)=\int_{0}^{2}|2t-x|dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{x}{2}}(x-2t)dt+\int_{\frac{x}{2}}^{2}(2t-x)dt$$

$$\equiv\Big[\ xt-t^2\Big]_{0}^{\frac{x}{2}}+=\Big[\ t^2-xt\Big]_{\frac{x}{2}}^{2}$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}\right)+(4-2x)-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\right)$$

ㄱ. (참)

ㄴ. (ⅰ) 일 때

(ⅱ) 일 때

$f(x)=2x-4 \geq 4$

(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값이 2이다. (참)

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{[2(4+h)-4]-4}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2h}{h}=2$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\left[\frac{1}{2}(4+h)^2-2(4+h)+4\right]-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{2}h^2+2}{h}=\lim_{h\to 0-}\left(\frac{1}{2}h+2\right)=2$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

33. 답 ②

[해설]

주어진 이차함수 $f(x)$에서 $f(0)=f(3)=0$이므로

$f(x)=ax(x-3)\ (a<0)$으로 놓을 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2-3ax)dx$$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=a\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{6}a=\frac{7}{6}$$

따라서 $a=-1$

즉, $f(x)=-x^2+3x$이고, $f'(x)=-2x+3$이므로

$f'(0)=3$

34. 답 ②

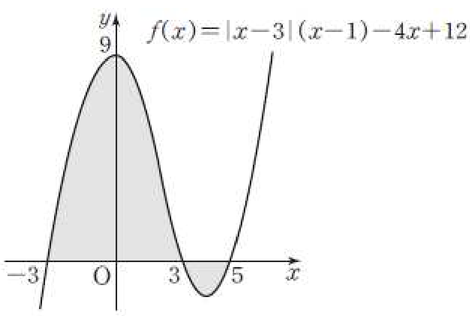
[해설]

$f(x)=|x-3|(x-1)-4x+12$

$$=\begin{cases}x^2-8x+15 & (x\geq 3)\\ -x^2+9 & (x<3)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x-3)(x-5) & (x\geq 3)\\ -(x-3)(x+3) & (x<3)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부부은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$=2(-9+27)+\left(-\frac{125}{3}+100-75\right)-(-9+36-45)$$

$$=2\times 19-\frac{50}{3}+18=\frac{112}{3}$$

35. 답 ②

[해설]

곡선 $y=x^2+a^2$ 위의 점 $B(1,\ a^2+1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^2+1)=2(x-1)$, 즉 $y=2x+a^2-1$

따라서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+a^2-1$의 교점의 좌표는

$y=2x+a^2-1$에서 $x^2-2x-(a-1)(a+1)=0$

$[x-(a+1)]\,[x+(a-1)]=0$

$x>1$에서 $x=a+1$이므로

$$\frac{S}{9}=\int_1^{a+1}(2x+a^2-1-x^2)dx$$

$$=\left[x^2+(a^2-1)x-\frac{1}{3}x^3\right]_1^{a+1}$$

$$=(a+1)^2+(a^2-1)(a+1)-\frac{1}{3}(a+1)^3-a^2+\frac{1}{3}$$

$$=a^2+2a+1+(a^3+a^2-a-a)-\frac{1}{3}(a^3+3a^2+3a+1)-a^2+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}a^3$$

또한 $a=3$일 때 $S=\frac{2}{3}\times 3^3=18$이므로

$\frac{2}{3}a^3=2$에서 $a^3=3$

따라서 $a=\sqrt[3]{3}$

36. 답 ⑤

[해설]

ㄱ. 주어진 그림에서 $\int_0^a f(t)dt>\int_0^a g(t)dt$이므로 일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. 두 물체 A,B의 높이의 차 $\int_0^T|f(t)-g(t)|dt$의 값은 의 값이 일 때까지 증가하다 그 이후로 감소하므로 $t=b$일 때, 물체 와 물체 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때, 물체 와 물체 는 같은 높이에 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

37. 28

[출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 구하여 문제를 해결한다.

함수 를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) 이면 이므로

(ⅱ) 이면 이므로

(ⅲ) 이면 이고 이므로

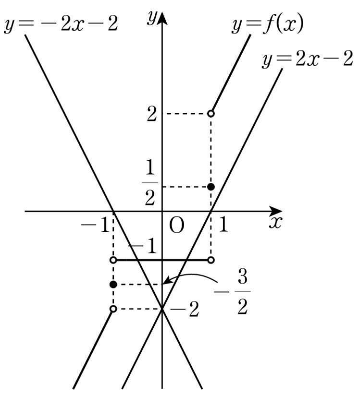
$f(x)=-\frac{3}{2}$

(iv) $|x|>1$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$ 이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=2x$$

그러므로 $f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ -\frac{3}{2} & (x=-1)\\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1\le t<-\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}<t\le 0$일 때 $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $0<t\le 1$ 또는 $t=2$ 또는 $t\ge 4$일 때 $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}<t<4$일 때 $g(t)=2$

$t=\frac{5}{2}$일 때 $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은

$-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4$

이므로 $m=7,\ a_m=4$

따라서 $m\times a_m=7\times 4=28$

38. ④

[출제의도] 수열의 극한 이해하기

$|x>2|$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}x-\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}=\frac{\frac{3}{2}x-0}{1+0}$$

일 때,

일 때,

일 때, 이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

그러므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (|x|>2)\\ 1 & (x=2)\\ -2 & (x=-2)\\ 1 & (|x|<2)\end{cases}$

$|k|>2$이면 $f(k)=\frac{3}{2}k$이므로

$|k|>2$에서 $f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=2$이면 $f(2)=1$이므로

$k=2$에서 $f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=-2$이면 $f(-2)=-2$이므로

$k=-2$에서 $f(k)=k$를 만족시킨다.

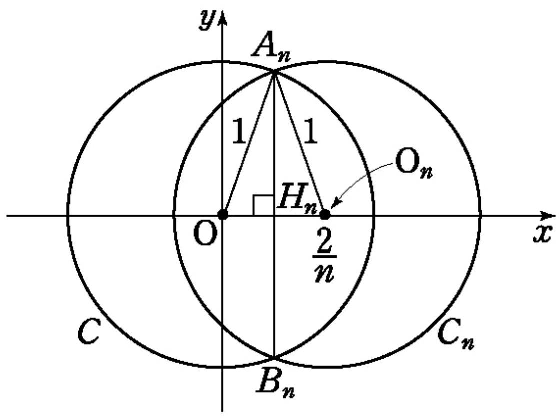
$|k|<2$이면 $f(k)=-1$이므로

$k=-1$에서 $f(k)=k$를 만족시킨다.

따라서 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$

39. 19



$\triangle A_nOO_n$은 이등변삼각형이고, $\overline{A_nB_n}\perp\overline{OO_n}$이므로

$$\frac{1}{2}l_n=\overline{A_nH_n}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

$nl_n=2\sqrt{n^2-1}$

$\therefore (nl_n)^2=4(n^2-1)=4(n-1)(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}=\frac{1}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{16}$$

40. ②

[출제의도] 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

, 라 하면

이므로

$5t=1$에서 $t=\frac{1}{5}$

따라서, $\overline{OC_1}=\frac{3}{5}$에서 $\overline{A_1C_1}=\frac{2}{5}$이고

$\overline{C_1P_1}=\overline{OD_1}=\frac{4}{5}$ 이므로

$\overline{A_1P_1}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

이때 삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_1Q_1}=\overline{P_1Q_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

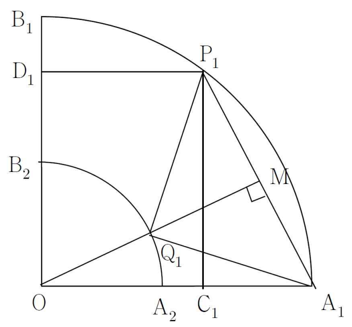
따라서

$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$

또한, 선분 A_1P_1의 중점을 M이라 하면

$\overline{A_1P_1}\perp\overline{Q_1M}$, $\overline{A_1P_1}\perp\overline{OM}$

이므로 세 점 O, Q_1, M은 한 직선 위에 있다.



이때,

$\overline{OM}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{Q_1M}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

이므로

$\overline{OQ_1}=\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 두 도형(부채꼴) OA_1B_1, OA_2B_2의 닮음비는

$1:\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{5}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

41. ⑤

[출제의도] 등비급수를 이용하여 무한히 반복되는 도형의 넓이의 합을 구할 수 있는가?

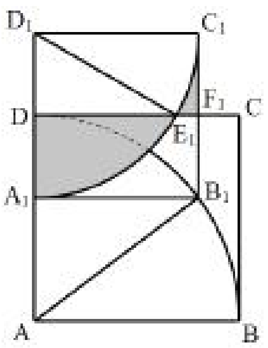


그림 에서 이므로

즉, $\overline{D_1E_1}=4$, $\overline{D_1D}=2$이므로

$\angle DD_1E_1=60^\circ$, $\angle C_1D_1E_1=30^\circ$

따라서

$S_1=\left(\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)+\left(8-2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$

한편, 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이는 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이의 $\frac{4}{5}$이므로 그림 에서 새로 칠한 부분의 넓이는 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{16}{25}}$$
$$=\frac{25}{9}\left(8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

42. ④

원 O_1의 반지름의 길이는 3이고 부채꼴 $A_1B_1D_1$의 반지름의 길이는

$\overline{A_1B_1}=\overline{A_1C_2}=3\sqrt{2}$ …… ㉠이므로

$T_1=S_1$

$=\frac{1}{2}\times$(원 O1의 넓이)$-${(부채꼴 $B_1C_1D_1$의 넓이)

$-$(삼각형 $B_1C_1D_1$의 넓이)}

$=\frac{1}{2}\times3^2\pi-\left\{\frac{1}{4}\times(3\sqrt{2})^2\pi-\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\right\}$

$\therefore\ S_1+T_1=18$

한편, $\overline{C_2C_1}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_1C_2}=6-3\sqrt{2}$ (∵ ㉠)

$\therefore\ \overline{A_2C_2}=\overline{A_1C_1}-2\times\overline{C_2C_1}=6-2(6-3\sqrt{2})$

따라서, 원 O_2의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{A_2C_2}=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-6)=3\sqrt{2}-3$

두 원 O_1과 O_2의 반지름의 길이의 비가

$\frac{3\sqrt{2}-3}{3}=\sqrt{2}-1$이므로

수열 $\{S_n+T_n\}$은 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=\frac{18}{1-(3-2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{18}{2\sqrt{2}-2}=\frac{9}{\sqrt{2}-1}=9(\sqrt{2}+1)$$

43. ④

의 중점을 이라 하면

이므로 이다.

삼각형 와 삼각형 는 닮음이므로

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{DA}}{\overline{PA}}$, $\overline{DA}=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ 이다.

$\therefore g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(4\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta=8\sin^4\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$

$\angle OPD=\angle OPA-\angle DPA=\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)-\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta$

이고, $\angle OPC=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ 이므로

$\angle DPC=\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\pi-2\theta$

$\therefore f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2\times\sin(\pi-2\theta)=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\sin2\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^4\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\theta^2\times\sin^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(4\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\times\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\right)$$

$$=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

44. 3

점 $(t,0)$과 점 $(x,f(x))$사이의 거리가 최소일 때, 두점 $(t,0)$, $(x,f(x))$를 지나는 직선과 점 $(x,f(x))$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선은 서로 수직이다. 이때 $x=s$ 이므로

$\dfrac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1$, $t=s+f(s)\times f'(s)$ ⋯ ㉠

$h(1)=a$ 로 놓으면 $g(a)=1$ 이고, $h'(1)=\dfrac{1}{g'(a)}$ 이다

$t=a$ 일 때, $s=b$ 라 하면 $g(a)=f(b)=1$ 에서

$e^b+b=1$, $b=0$

㉠에서 $a=0+f(0)\times f'(0)=2$ 이다.

㉠의 양변을 s에 대하여 미분하면

$\dfrac{dt}{ds}=1+f'(s)\times f'(s)+f(s)\times f''(s)$

$\quad=1+(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s$

이므로 $t=2$, $s=0$일 때 $\dfrac{dt}{ds}=6$이다.

$g(t)=f(s)$ 의 양변을 s에 대하여 미분하면

$g'(t)\times\dfrac{dt}{ds}=f'(s)$ 이므로

$g'(2)\times6=f'(0)$, $g'(2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore h'(1)=\dfrac{1}{g'(2)}=3$

45. 3

라 하면, 일 때, 이다.

(준식)

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}+2\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}$

$=g'(1)+2g'(1)=3g'(1)$

$g(1)=f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$f(a)=a^3+3a^2+4a+5=1$에서 $a=-2$이다.

$f'(x)=3x^2+6x+4$에서 $f'(-2)=4$이고

$g(f(x))=x$에서 $g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$이므로

$3g'(1)=3\times\dfrac{1}{f'(-2)}=\dfrac{3}{4}$이다.

따라서 $4p=3$

46. ⑤

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=-3\sin t+\cos t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-3\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}$ (단, $\cos t+\sin t\neq0$)

$\dfrac{dy}{dx}=3$인 t의 값을 $\alpha(0<\alpha<\pi)$라 하면

$\cos\alpha=-3\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 $\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha>0$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$a=\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

$b=3\cos\alpha+\sin\alpha=-\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

따라서 $a+b=-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

47. 25

[출제의도] 함수의 미분법을 이용하여 함수의 연속성에 대한 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$ 에서

$f'(x)=(x^2)'e^{ax}+x^2(e^{ax})'$

$=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(ax^2+2x)e^{ax}=ax\left(x+\dfrac{2}{a}\right)e^{ax}$

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

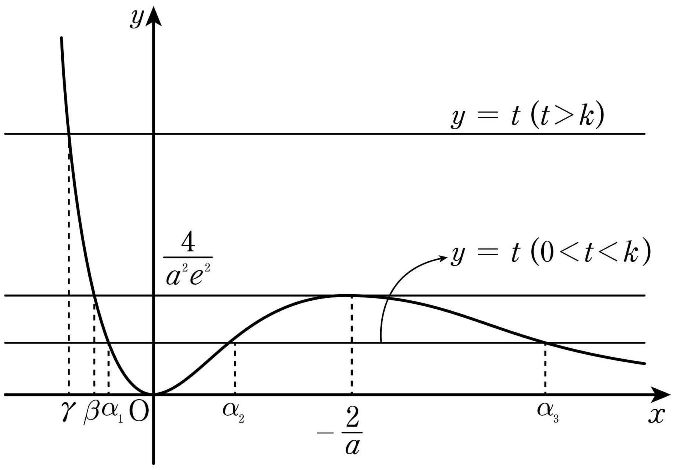
x	⋯	0	⋯	$-\dfrac{2}{a}$	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

따라서 함수 는 에서 극솟값 를 갖고

에서 극댓값 를 갖는다.

또 이고, 이므로

함수 의 그래프는 그림과 같다.



부등식 $f(x)\geq t\ (t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값 $g(t)$에 대하여

$k=\dfrac{4}{a^2e^2}$ 라 하면, $g(t)$는 $0<t<k$ 또는 $t=k$ 또는 $t>k$로 나누어 생각할 수 있다.

ⅰ) $0<t<k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 세 실근을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$라 하면 부등식 $f(x)\geq t$의 해는 그림에서 $x\leq\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\leq x\leq\alpha_3$이므로 부등식을 만족시키는 x의 최댓값은 α_3이다.

따라서 $g(t)=\alpha_3$이다.

ⅱ) $t=k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 음의 실근을 β라 하면 부등식 $f(x)\geq t$의 해는 $x\leq\beta$ 또는 $x=-\dfrac{2}{a}$ 이므로 $g(t)=-\dfrac{2}{a}$ 이다.

ⅲ) $t>k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 실근을 γ라 하면 부등식 $f(x)\geq t$의 해는 $x\leq\gamma$이므로 $g(t)=\gamma$이다.

정의역이 $\left\{x|x<\beta,\ x\geq-\dfrac{2}{a}\right\}$인 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} h_1(x)=f(x) & (x<\beta) \\ h_2(x)=f(x) & \left(x\geq-\dfrac{2}{a}\right)\end{cases}$$

라 정의하면, 두 함수 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$는 각각의 정의역에서 일대일 대응이므로 역함수를 갖는다. 또한, $y=h_1(x)$의 치역은 $\{y|y>k\}$이고, $y=h_2(x)$의 치역은 $\{y|0<y\leq k\}$이므로 함수 $h(x)$의 역함수의 정의역은 $\{x|x>0\}$이다. 이때, $h(x)=t$를 만족하는 x의 값은 방정식 $f(x)=t$의 해 중에서 최댓값이므로 $h(x)$의 역함수가 $g(t)$이다. $g(t)$는 $0<t<k,\ t>k$인 모든 점에서 연속함수이므로 $t=k$에서의 연속성을 조사하면 된다.

$\displaystyle\lim_{t\to k-}g(t)=-\frac{2}{a}$에서 $a<0$이므로 $-\dfrac{2}{a}>0$

$\displaystyle\lim_{t\to k+}g(t)=\beta$에서 $\beta<0$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$이다.

따라서 함수 $g(t)$는 $t=k$에서만 불연속이다.

$k=\dfrac{4}{a^2e^2}=\dfrac{16}{e^2}$, $\dfrac{4}{a^2}=16,\ a^2=\dfrac{1}{4}$

따라서

48. ⑤

$$=\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0 \text{ 이므로}$$

$m=-3,\ -2,\ -1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이므로 7 개다.

49. ①

$$S_k=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2k\pi}{4n}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\frac{1}{2n}\quad\left(x_k=\frac{k}{2n},\ \triangle x=\frac{1}{2n}\text{로 놓으면}\right)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$$

50. ④

[출제의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

$0\leq t\leq\dfrac{\pi}{3}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\left(\sqrt{\sec^2t+\tan t}\right)^2=\sec^2t+\tan t$

이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2t+\tan t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^2x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sec^2x-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$=\Big[\tan x-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\tan\frac{\pi}{3}-\ln\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\ln2$$