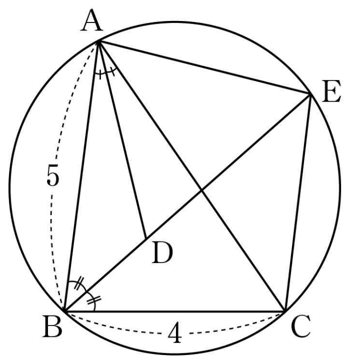
수학 영역

1. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보 기〉

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

[4점]

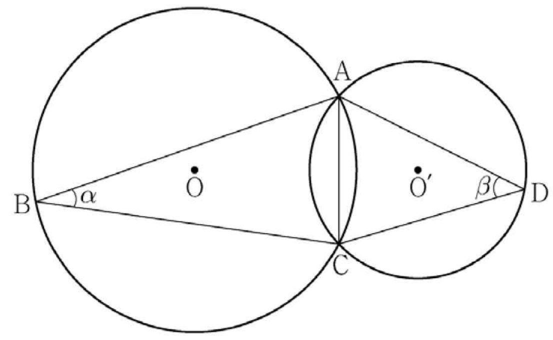
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때,

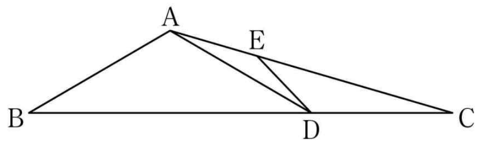
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ \overline{OO'}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[4점]

3. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$, $\overline{CA}=\sqrt{13}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD}=2$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
> $\cos(\angle ABC)=\boxed{(가)}$
> 이다. 삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD)=\sqrt{1-(\boxed{가})^2}$
> 이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\boxed{(나)}$ 이다.
> 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
> $$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$
> 이므로 $\sin(\angle CAD)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$이다.
> 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{DE}=\boxed{(다)}$
> 이다.

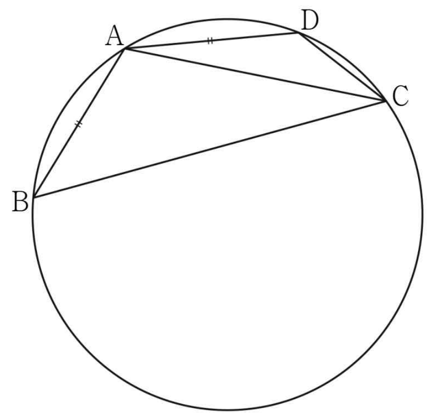
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

[4점]

① $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{8\sqrt{13}}{13}$ ④ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

4. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5<R<5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> ∘$\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{AC}=10$이다.
> ∘사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

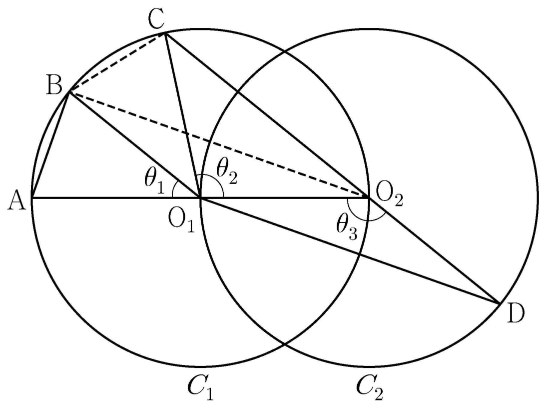
> $\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때
> 두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여
> $$\cos(\angle ACB)=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{BC}}\right),$$
> $$\cos(\angle DCA)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{CD}}\right)$$
> 이다.
> 이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로
> $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.
> 사각형 ABCD의 넓이는
> 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로
> $$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)=40$$
> 에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{BD}:R=\boxed{(다)}:1$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$의 값은?

[4점]

① $\frac{25}{2}$ ② 15 ③ $\frac{35}{2}$ ④ 20 ⑤ $\frac{45}{2}$

5. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은?

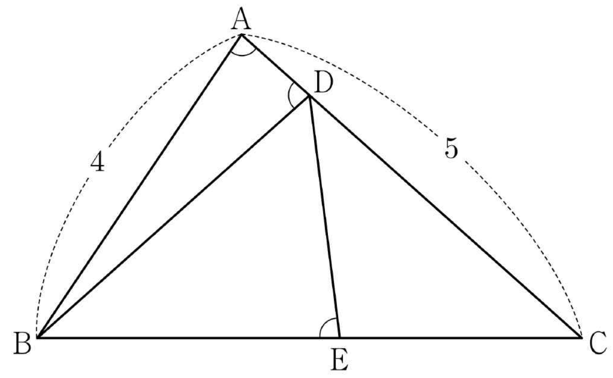
[4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

6. 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 5$이고 $\cos(\angle BAC) = \dfrac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는?



[4점]

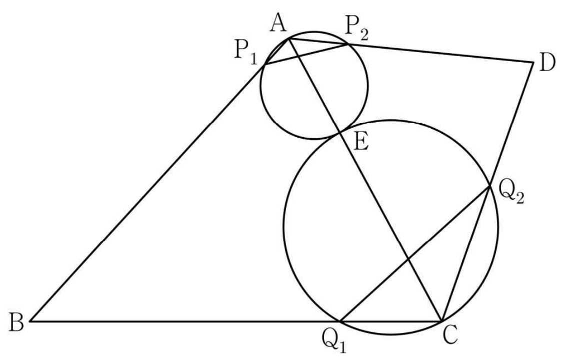
① $\dfrac{7}{3}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{8}{3}$ ④ $\dfrac{17}{6}$ ⑤ 3

7. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=3,\ \overline{\mathrm{CD}}=2,\ \cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3},\ \angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$)

[4점]

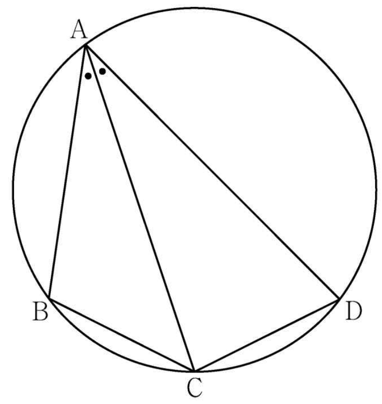


① $\sqrt{21}$　② $\sqrt{22}$　③ $\sqrt{23}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

8. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}}=5,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}}=7,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$$

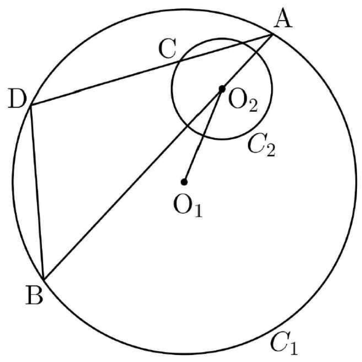
일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



[4점]

① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$　④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

9. 그림과 같이 중심이 O_1 이고 반지름의 길이가 r $(r>3)$ 인 원 C_1 과 중심이 O_2 이고 반지름의 길이가 1 인 원 C_2 에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$ 이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A 에 대하여 직선 AO_2 가 원 C_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B 라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C 에 대하여 직선 AC 가 원 C_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 D 라 하자.



다음은 $\overline{BD}$ 가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$ 을 r 에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

삼각형 ADB 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=\boxed{\text{(가)}}$$

이므로 $\overline{BD}$ 가 최대이려면 직선 AD 가 원 C_2 와 점 C 에서 접해야 한다.

이때 직각삼각형 ACO_2 에서 $\sin A=\frac{1}{\overline{AO_2}}$ 이므로

$$\overline{BD}=\frac{1}{\overline{AO_2}}\times\boxed{\text{(가)}}$$

이다.

그러므로 직선 AD 가 원 C_2 와 점 C 에서 접하고 $\overline{AO_2}$ 가 최소일 때 $\overline{BD}$ 는 최대이다.

$\overline{AO_2}$ 의 최솟값은

$$\boxed{\text{(나)}}$$

이므로 $\overline{BD}$ 가 최대일 때,

$$\overline{O_1C}^2=\boxed{\text{(다)}}$$

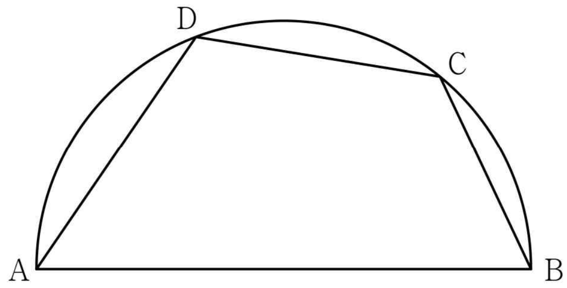
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$ 의 값은?

[4점]

① 216 ② 192 ③ 168 ④ 144 ⑤ 120

10. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.)



〈보 기〉

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

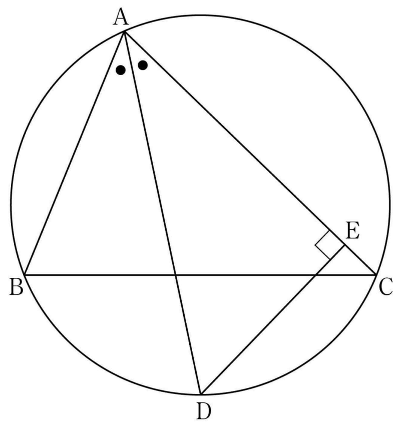
ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$ 이다.

[4점]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오.

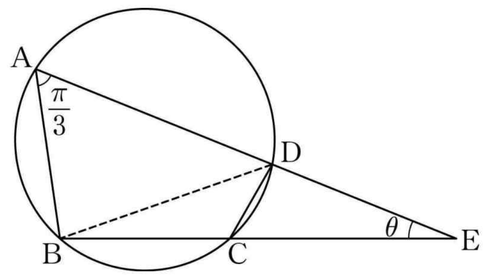


[4점]

12. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\quad \overline{AD}=3,\quad \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
>
> $\overline{CD}=\boxed{\text{(가)}}$
>
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
>
> ∠AEB는 공통, ∠EAB= ∠ECD
>
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
>
> 이를 이용하면
>
> $\overline{ED}=\boxed{\text{(나)}}$
>
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
>
> $\sin\theta=\boxed{\text{(다)}}$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은?

[4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

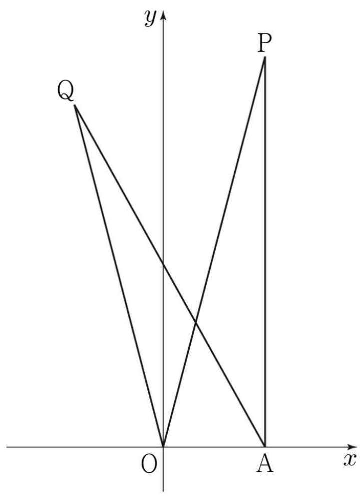
13. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.

(나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

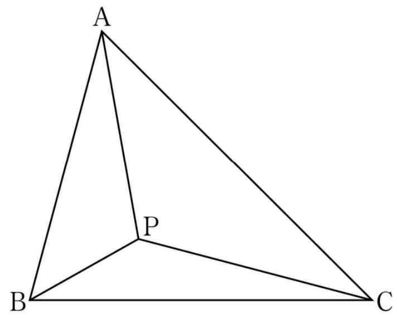
사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



14. 그림과 같이 $\angle\mathrm{BAC}=60^{\circ}$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PBC}=30^{\circ}$, $\angle\mathrm{PCB}=15^{\circ}$일 때, 삼각형 APC의 넓이는?

[4점]

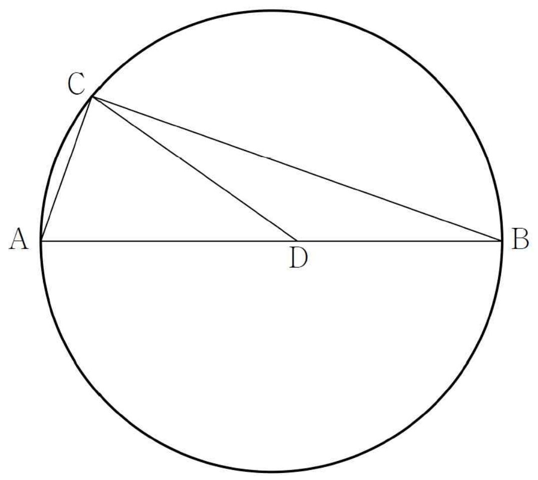


① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ ④ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

15. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

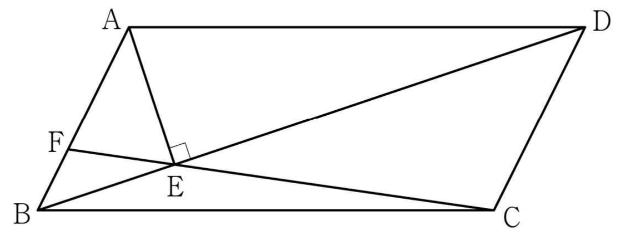
$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오.



[4점]

16. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle AFC)=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는?



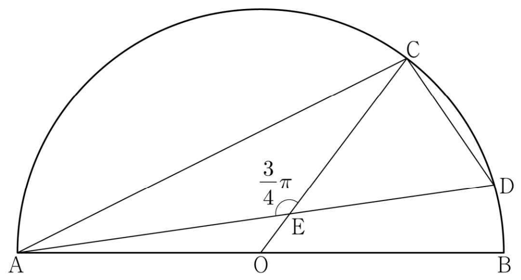
[4점]

① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

17. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

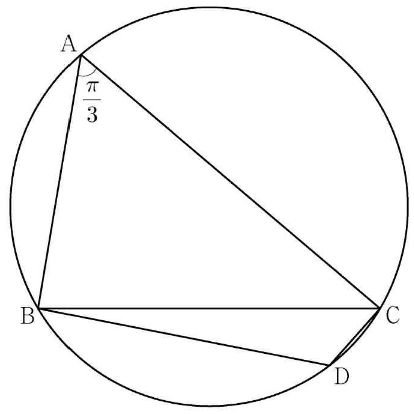
이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?



[4점]

① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

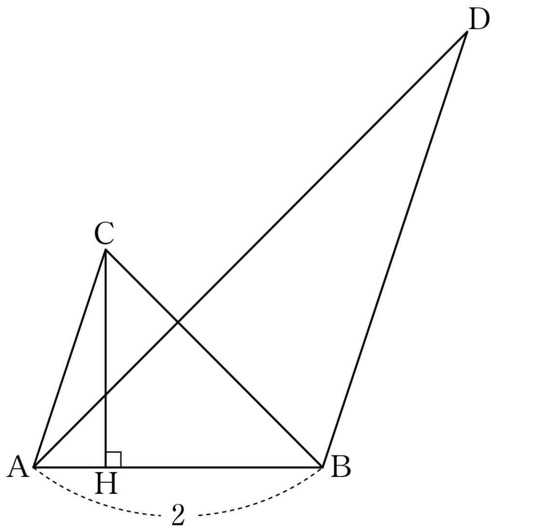
18. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle\mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?



[4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

19. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}/\!/\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



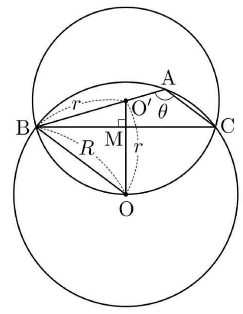
두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle\mathrm{CAB})=51$이다. $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$)

[4점]

20. $\angle\mathrm{BAC}=\theta\left(\dfrac{2}{3}\pi\le\theta<\dfrac{3}{4}\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB위에 있을 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2R$$



세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자.
선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면

$$\overline{\mathrm{O'M}}=r-\overline{\mathrm{OM}}=r-|R\cos\theta|$$

직각삼각형 O′BM에서 $R=\boxed{\text{(가)}}\times r$이므로

$$\sin(\angle\mathrm{O'BM})=\boxed{\text{(나)}}$$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\boxed{\text{(다)}}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

빠른 정답 [N제 20문항]

1	②	2	26	3	①	4	⑤	5	②
6	③	7	①	8	①	9	④	10	⑤
11	84	12	④	13	22	14	③	15	27
16	①	17	⑤	18	②	19	15	20	27
21		22		23		24		25	
26		27		28		29		30	

문항 코드

01. 1416-15-2103-0004
02. 1416-21-2101-0010
03. 1416-13-2210-0004
04. 1416-15-2204-0007
05. 1416-15-2111-0006
06. 1416-12-2106-0005
07. 1417-13-2306-0001
08. 1416-11-2211-0005
09. 1416-13-2208-0006
10. 1416-14-2207-0008
11. 1416-21-2110-0003
12. 1416-15-2203-0003
13. 1416-21-2304-0001
14. 1416-11-2303-0001
15. 1416-20-2107-0007
16. 1416-13-2307-0001
17. 1416-13-2209-0002
18. 1416-12-2109-0009
19. 1416-21-2103-0008
20. 1416-21-2108-0002

MOCKING BIRD

모킹버드

mockingbird.co.kr
기출부터 자작 실모까지 All in One 문제은행

후기 작성시 Pro 1달 이용권을 전원 제공합니다.

1달간 실모 4회분과 손해설 및 영상해설이 모두 제공됩니다.

1. 빠른 채점: '채점하기' 기능을 이용해주세요.
2. 손해설지: '문제지' 다운로드 옆 버튼을 누르면 됩니다.
3. 영상해설: 문항코드를 검색엔진에 입력해주세요.
4. 질문 게시판: 문항코드를 입력하고 질문해주세요.
5. 후기 게시판: 후기 작성시 Pro 1달 이용권이 제공됩니다.

모킹버드는 무엇이 좋나요?
☞ 기출은 기본, 고퀄 자작 실모까지
☞ AI 문항 추천 알고리즘
☞ N제 코너, 언제든 무료 사용가능

모킹버드 컨텐츠는 누가 만들죠?
☞ 지인선, 기출의 파급효과 팀, 진주환 수학 연구소 등등 참여
☞ 서울대, 카이스트, 의치한 등 명문대를 재학하거나 졸업
☞ 메가스터디, 강남대성 등 컨텐츠 팀 근무 이력 보유

무료 혜택은 있나요?
☞ 가입시 10일간 실모 1회, 질문 게시판 이용 가능
☞ 첫 카드 등록시 실모 1회 추가 제공
☞ N제 코너, 언제든 무료 사용가능

얼마인가요?
☞ Free: 무료, N제 코너 자유 사용
☞ Standard: 실모 4회 제공 (회당 3000원)
☞ Pro: 실모 4회 제공+영상해설 제공 (회당 4000원)