2016학년도 9월 평가원
B형 해설지

D&T 수학연구소 제작
조민성
안정혁
조기강
전의영
공민석

1. $2A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 7-a\end{pmatrix}$이므로 $7-a=2$이다. 따라서 $a=5$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\times\frac{\tan x}{x}=1$

3. $3\times a\times r^4=a\times r^6$
$\Leftrightarrow r^2=3$
따라서 $a_3=4\times 3=12$

4. $\mathrm{Q}(-2,2,3)$이므로 거리는 4

5. $f'(x)=3(2e^x+1)^2\times 2e^x$이므로
$f'(0)=54$

6. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4,2)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,-2)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=4$

7. $(0,3\sqrt{2})$를 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 6\sqrt{2}\end{pmatrix}$이므로 $\mathrm{OP}=6\sqrt{2}$

8. $\log_2(16-x^2)=3$이므로 $16-x^2=8 \Leftrightarrow x^2=8$

9. $\mathrm{P}(A\cap B)=x$ 라 하면, $\mathrm{P}(B)=6x$이다. ($\because$ A와 B는 독립)
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6}-x$이고, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=6x-x=5x$이다.
따라서 $4x+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$이므로 $x=\frac{1}{24}$이다.
$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

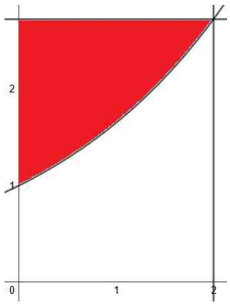
10. $y'=\frac{1}{x}$이므로 $y=5\left(x-\frac{1}{5}\right)+0$이므로 y절편은 $y=-1$이다.

11. $y=x-1$이므로 $m_1=1$이고, $ax-y+1=0$이므로
$m_2=a$이다. 따라서 $\frac{1}{6}=\frac{a-1}{a+1}$이다. 따라서 $a=\frac{5}{7}$

12. 접선의 기울기를 m이라고 하면 $y=mx+\frac{1}{m}$인데 $x=-2$를 지나므로 $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because m>0$)이다. 따라서 $\mathrm{P}(2,2\sqrt{2})$이다.
x절편의 좌표를 F'라고 하면 삼각형 PFF'는 이등변삼각형이다.
$\cos(\angle\mathrm{PFO})=\cos(\pi-2\angle\mathrm{PF'O})=-\frac{1}{3}$
(제2코사인 정리도 가능)

13. 신뢰구간이 $[38.02, 45.92]$이므로 신뢰구간의 길이는
$2\times 1.92\times\frac{10}{\sqrt{n}}=45.92-38.02=3.92$이다. 따라서 $n=25$

14.



빨간색의 부분의 부피이므로
$2\pi\times e^2-\pi\int_0^1 e^x dx=(e^2+1)\pi$

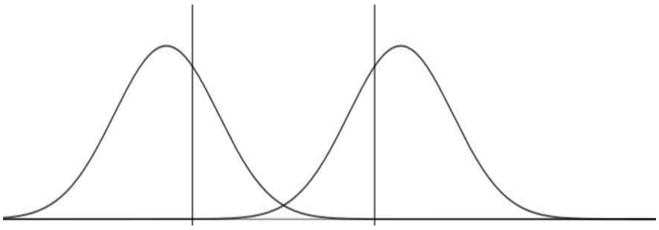
15.
총 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_4=120$이고,
여기서 $a\le b\le c\le d$의 순서가 되는 경우는 $(1,2,3,4)$
$(1,1,2,3)$, $(1,1,3,4)$, $(1,1,2,4)$이다.
$(1,2,3,4)$인 경우의 수는 2가지이다.
$(1,1,2,3)$인 경우의 수는 2가지이고, $(1,1,3,4)$, $(1,1,2,4)$의 경우도 동일하므로 2×3이다.
따라서 $\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

16.
$S_{n+1}-S_n=\frac{S_n}{n} \Rightarrow S_{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n$
이므로 $f(n)=\frac{n+1}{n}$
$S_n=S_1\times\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}=S_1\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$
이므로 $S_n=10n$이다. 따라서 $g(n)=10n$
$f(5)\times f(6)=72$

17.
ㄱ. $B^2+AB=E \Leftrightarrow B(B+A)=E$
이므로 $B(B+A)=(A+B)B$이다.
따라서 $AB=BA$
ㄴ. $B^2=B-E$에서 $E=B(E-B)$이므로 $B^{-1}=E-B$이다.
따라서 $B+A=E-B$이므로 $A+2B=E$이다.
ㄷ. $2B=E-A$를 $B^2=B-E$에 대입하면
$4B^2=4B-4E$이다.
$(E-A)^2=2(E-A)-4E \Leftrightarrow A^2-2A+E=-2E-2A$
따라서 $A^2=-3E$

$A^3+A^2+3A=-3A\pm3E+3A=-3E$이므로 거짓

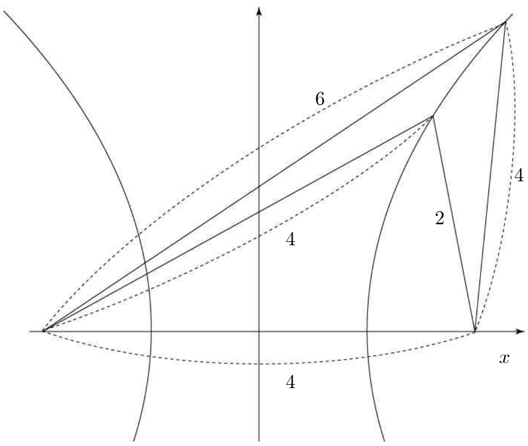
18.



에서 왼쪽은 확률변수가 X인 정규분포
오른쪽은 확률변수가 Y인 정규분포이다.
$f(12)=g(26)$이고 $\mathrm{P}(Y\geq 26)\geq 0.5$이므로 $m\geq 26$이다.
따라서 그림처럼 $m=28$이 되어야 한다. 따라서 확률변수 Y는 $\mathrm{N}(28, 4^2)$을 따른다. 따라서
$\mathrm{P}(Y\leq 20)=\mathrm{P}(Z\leq -2)=0.0228$이다.

19.

삼각형 $\mathrm{PF'F}$가 이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로
가능한 삼각형은 그림과 같이 두 가지 경우이다.



1) $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{FP}}=4$인 경우

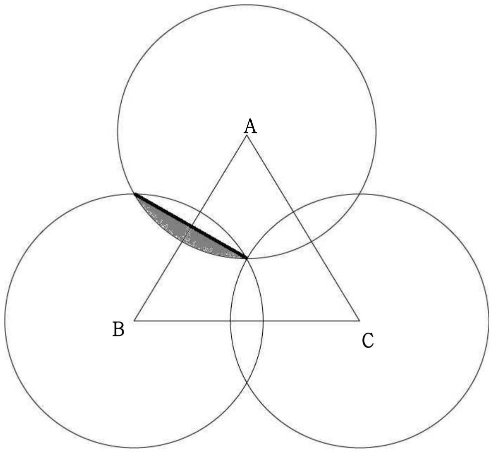
$\overline{\mathrm{F'P}}=6$이므로 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

2) $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{F'P}}=4$인 경우

$\overline{\mathrm{PF}}=2$이므로 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

따라서 $a=3\sqrt{7}\times\sqrt{15}=3\sqrt{105}$

20.



문제의 상황에 따라서 반지름의 길이는 $\frac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$이다.

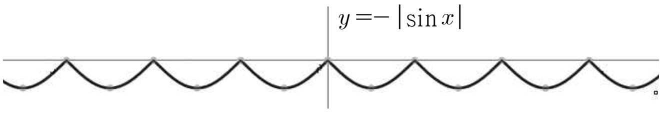
1) 첫째항 구하기
위 그림처럼 회색부분의 넓이의 3배이므로
회색부분의 넓이는 중심이 60°인 부채꼴에서 삼각형의 넓이를 빼면 된다. 따라서 $\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.
$S_1=3(2\pi-3\sqrt{3})$

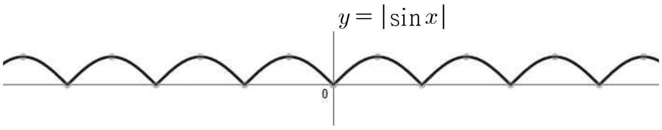
2) 공비 구하기
일단 첫째항의 삼각형과 두 번째 항의 삼각형의 길이의 비는
$6:6-2\sqrt{3}$이므로 $3:3-\sqrt{3}\Rightarrow 9:12-6\sqrt{3}$를 정리하면
$3:3-\sqrt{3}$인데 이를 제곱하면 넓이의 비이다.
$1:\frac{12-6\sqrt{3}}{9}$에서 도형이 3배씩 늘어나므로
$r=4-2\sqrt{3}$이다.

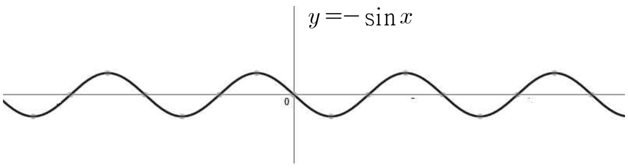
따라서 $S=\frac{3(2\pi-2\sqrt{3})}{1-(4-2\sqrt{3})}=(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$

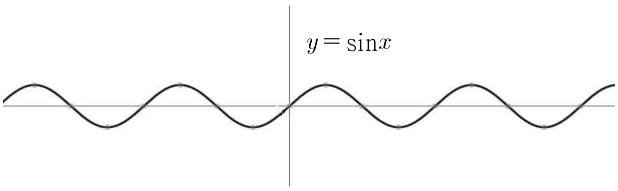
21. 함수 $f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$ 의 그래프를 그려보도록 하자.

$y=\sin x$, $y=-\sin x$, $y=|\sin x|$, $y=-|\sin x|$ 의 그래프는 다음과 같다.

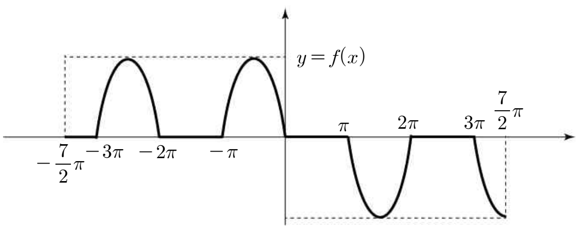








$f(x)$의 그래프는



1) $-\frac{7}{2}\pi \le a \le -3\pi$인 경우: 항상 $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$이다.

2) $-3\pi < a \le -\frac{5}{2}\pi$인 경우: $x<a$일 때, $\int_a^x f(t)\,dt<0$가 될 수 있는 경우가 존재한다.

3) $-\frac{5}{2}\pi < a$인 경우: $x>a$일 때 $\int_a^x f(t)\,dt<0$가 될 수 있는 경우가 존재한다.

그러므로 $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$이 되려면, a가 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi,\ -3\pi\right]$에 존재해야 한다. $\alpha=-\frac{7}{2}\pi$, $\beta=-3\pi$ $\therefore \frac{\pi}{2}$

22.

$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{16} = 2\sqrt{16}-2\sqrt{1}=6$

23.

$-x^2+7x=t$로 치환하면

$\sqrt{t}=t-2$, $(t \ge 2)$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2-5t+4=0$

$\therefore t=4$ $(\because t \ge 2)$

$-x^2+7x=4$이고, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 곱은 4이다.

24.

근의 공식을 사용하면

$-n \pm \sqrt{n^2+4n}$이므로 양의 실근은

$-n+\sqrt{n^2+4n}=a_n$이다.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} -n+\sqrt{n^2+4n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$=2$

25.

열차 B의 속력을 v_b라 하면, 열차 A의 속력은 $0.9v_b$이다.

$L_A = 80+28\log\frac{0.9v_v}{100}-14\log 3$,

$L_B = 80+28\log\frac{v_v}{100}-14\log 3$

$L_B-L_A = 28\left(\log\frac{10}{9}\right) = 28-56\log 3$

$\therefore a=28$, $b=56$

26.

$\overline{BQ} = \overline{AB} \times \cos(\angle ABC) = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$

$\overline{AQ} = \sqrt{(\overline{AB})^2-(\overline{BQ})^2} = \sqrt{81-27} = 3\sqrt{6}$

$\overline{PQ} = \overline{AQ} \times \cos(\angle AQP) = 3\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ}$와 $\overline{BC}$는 수직하므로

$\triangle BCP = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} = k$

27.

(나) 조건에 의하여 $a=l\times d$, $b=n\times d$, $c=m\times d$라고 하자.
(단, l, n, m은 1이상의 자연수)

(가) 조건에 의하여 $a+b+c+d=(l+m+n+1)d=20$이다.

1) $d=2$ 인 경우
$l+m+n=9$에서 l, n, m은 1이상의 자연수이므로
${}_3H_6={}_8C_6=28$

2) $d=4$인 경우
$l+m+n=4$이므로 ${}_3H_1={}_3C_1=3$

3) $d=5$인 경우
$l+m+n=3$이므로 1이다.
따라서 $3+1+28=32$이다.

28.

원주각의 성질에 의하여 $\angle BPC=\frac{\pi}{3}$이다. 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PC}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$ 이므로

$\overline{PC}=4\sin\theta$이다. $S(\theta)$의 반지름을 r이라고 하자.

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$(단, a, b, c는 세변의 길이)를 이용하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}(4\sin\theta)^2=\frac{1}{2}\times r\times(3\times 4\sin\theta)$를 정리하면

$r=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$이다.

따라서 $S(\theta)=\frac{4}{3}sin^2\theta$이다.

$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4\sin^2\theta}{3\theta^2}=\frac{4}{3}$이므로 $\alpha=\frac{4}{3}$이다. $60\times\frac{4}{3}=80$

29. 기하학적 풀이

1) 상황 이해 단면화

다음의 그림으로 상황을 이해하자. 두 구에 평면이 접하고 있다. 두 구의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 평면이 z축과 만나는 점을 Q라 하면 삼각형 닮음의 닮음을 이용하여 (그림1 참조)

$\frac{1}{\overline{O_1Q}} = \frac{2}{\overline{O_2Q}}$이므로 $\frac{1}{a} = \frac{2}{6-a}$이다. 그러므로 $a=2$이고, 그림과 같이 60°인 각들을 볼 수 있다.

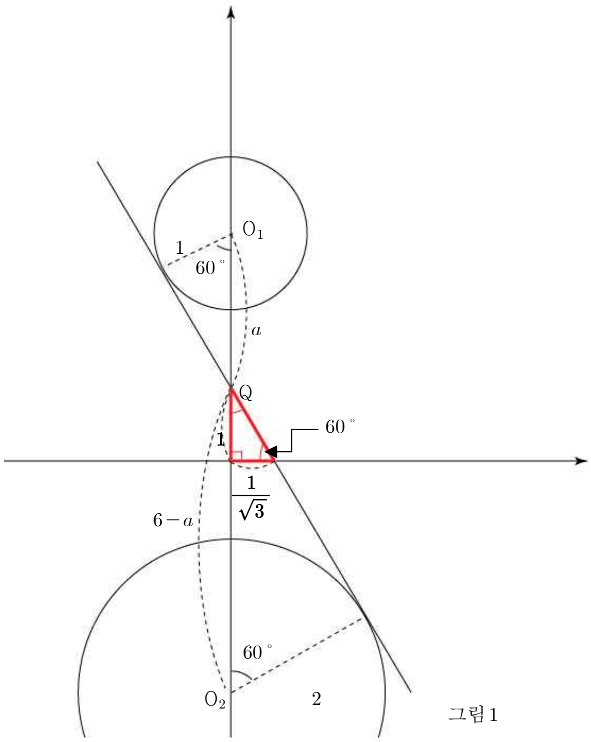


그림1

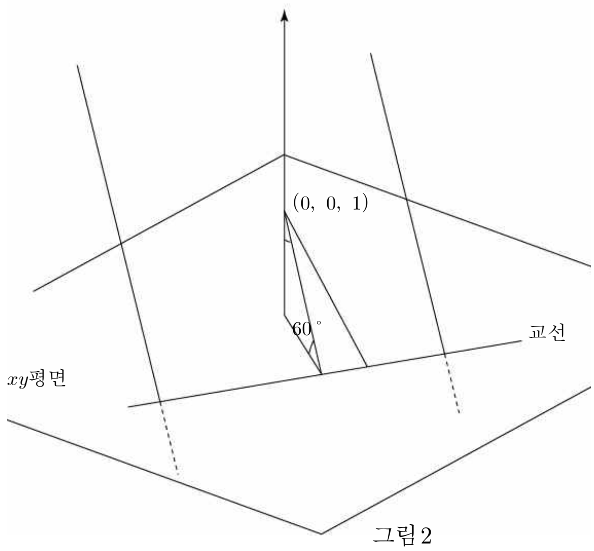


그림2

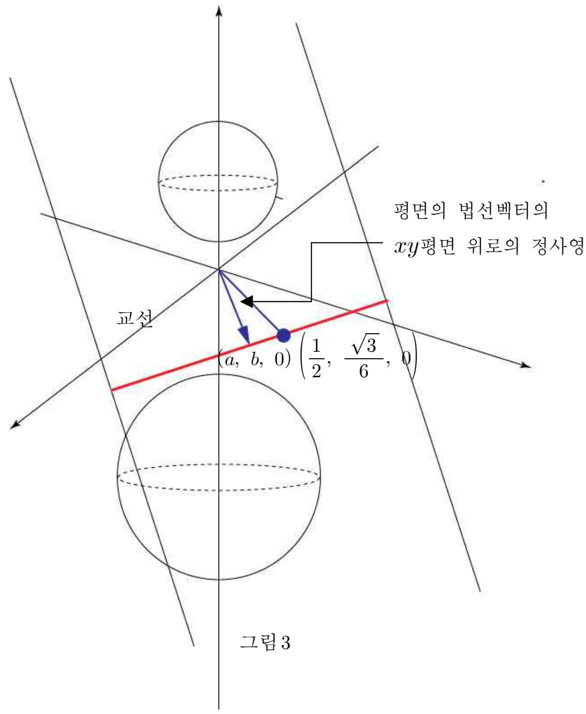


그림3

평면이 xy평면과 만나는 교선을 보면 <그림2>, <그림 3>과 같다. 평면의 법선 벡터를 $\overrightarrow{OX}(a,\ b,\ c)$라 하면 a와 b를 다음과 같이 설명할 수 있다. 원점을 시점으로 하여 교선에 수직이 되는 벡터를 만들면 $(a,\ b,\ 0)$이다. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$은 xy평면 위의 점이지만 평면에도 포함되므로 교선위에 존재함을 알 수 있다. (그림2, 그림3 참조)

2) 상황이해 (점P 의 위치)

$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 인데, $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

기하학적으로 $(a,\ b,\ 0) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$일 수 밖에 없다.

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

3) 평면의 법선벡터 찾기

법선벡터 $\overrightarrow{OX}(a,\ b,\ c)$인데,

앞에서 $a,\ b$의 값을 알아내었으니, 이제 법선 벡터의 c만 구하면 된다.

평면의 법선벡터는 <그림 4>에서 보이는 것과 같이 벡터 $\overrightarrow{OX}$를 의미한다. 그림에 보이는 직각삼각형을 이용하면 평면의 법선벡터는 $\left(a,\ b,\ \sqrt{a^2+b^2} \times \frac{1}{\tan 60^\circ}\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{3}\right)$ 이다.

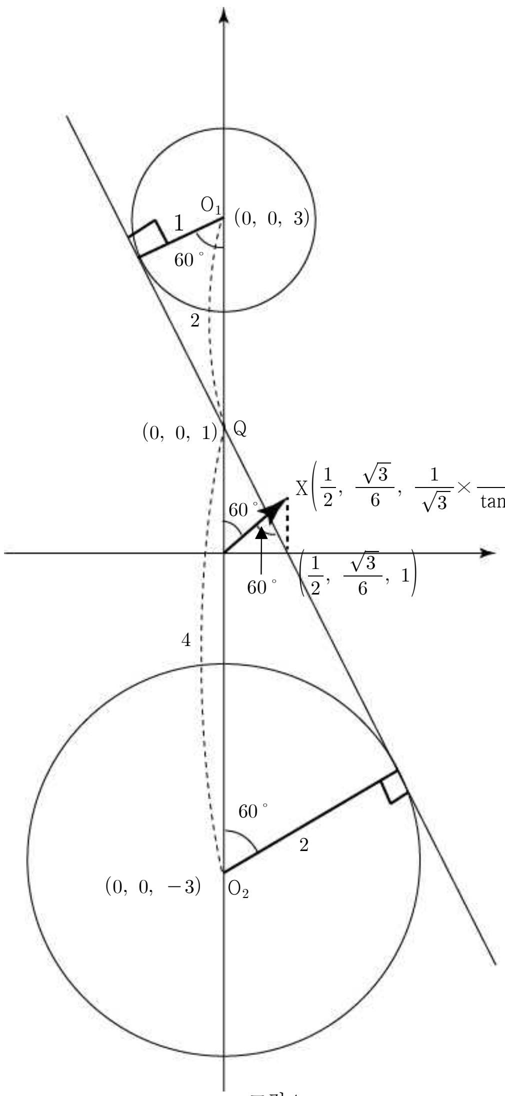


그림 4

4) 평면 찾기 + $(k,\ -\sqrt{3},\ 2)$대입

평면의 방정식:

평면이 $(0,\ 0,\ 1)$을 지나므로 평면의 방정식을

$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{6}y+\frac{1}{3}(z-1)=0$이고, 식 전체에 6을 곱하여 주면

$3x+\sqrt{3}y+2(z-1)=0$이다.

평면 위 의 점 $(k,\ -\sqrt{3},\ 2)$을 대입하면

$3k-3+2=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$

$\therefore 120k=40$

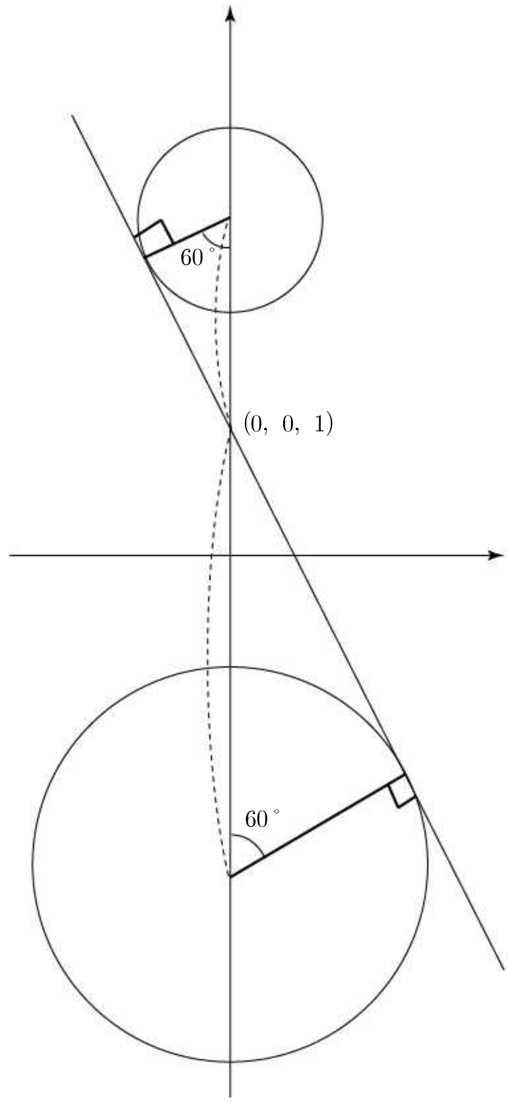
2)해석적 풀이 (계산으로 풀이)

법선의 벡터를 $(1, a, b)$라고 두면 평면의 방정식은

$x+ay+bz=d$이다.

그림을 단면화하여 보면 $(0, 0, 1)$을 지나므로

$b=d$이다.



z축과 이루는 각은 60°이므로 $\frac{1}{2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$을 만족한다.

따라서 $3b^2=a^2+1$이다.

그리고 문제의 조건에 의하여 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$을 지나므로

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}a=b$이다.

두 식을 연립하면 $9b^2-12b+4=0$이므로 $b=\frac{2}{3}$이고

$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

$x+\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{2}{3}z=\frac{2}{3}$이다. 평면이 $(k, -\sqrt{3}, 2)$를 지나므로

$k-1+\frac{4}{3}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$이다.

30.

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 에서 $f'(x)=\{ax^2+(2a+b)x+c\}e^x$ 인데

(가) 조건에 의하여

$f'(x)=a(x^2-3)e^x$ 이므로 $b=-2a$ 이고, $c=-a$ 이다.

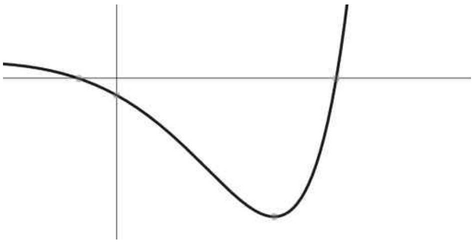
(나) 조건을 해석하면

$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)\geq -(x_2-x_1)$ 인데

$x_2 > x_1$ 이므로 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq -1$ 를 만족한다. (단, $x \geq 0$)

즉 임의의 두 점을 연결한 직선의 기울기가 -1 보다 커야한다는 뜻이다.

$f(x)$ 의 그래프를 그려보면

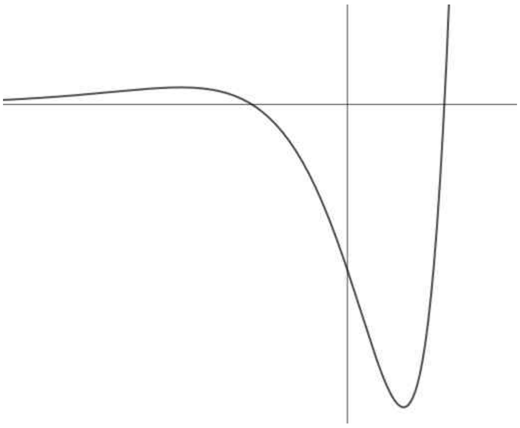


여기서 기울이가 가장 작을 때를 보기 위해서 $f'(x)$의 그래프를 그려보면

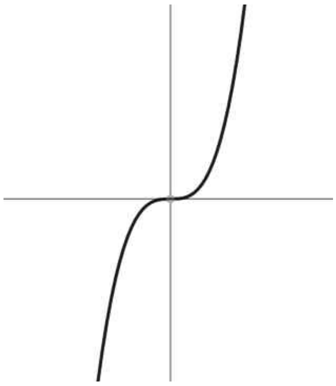
인데 $f'(x)\geq -1$ (단, $x \geq 0$) 이면 된다. 즉 $f'(x)$의 극소점의 함수값이 -1 보다 크면 된다.

$f''(x)=a(x-1)(x+3)e^x$ 이므로 $f'(1)\geq -1$ 이다.

$f'(1)=a\times(-2)\times e$ 이므로 $a \leq \dfrac{1}{2e}$ 이다.



abc의 최댓값을 구하므로 $abc=2a^3$ 인데 $2a^3$은 증가하는 함수



이므로 $a=\dfrac{1}{2e}$ 일 때 최댓값을 가진다. 따라서 $\dfrac{1}{4e^3}$ 이다.

$k=\dfrac{1}{4}$ 이므로 $60k=15$