만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

지수의 계산

1. $2\times16^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

㉠ $2\times(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\times2^2$
$= 2^{1+2}$
$= \boxed{8}$

ㅋㅋ

3. $4\cos\frac{\pi}{3}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

㉠ $4\times\frac{1}{2} = \boxed{2}$

부정형처럼 보이지만...

2. $\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^3+1)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

㉠ $\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^3+1)}{\cancel{x-2}} = \boxed{9}$

등차수열은 "몇 칸" 차이인지가 중요 ㉠ 등차중항

4. 네 수 a, 4, b, 10 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+2b$ 의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

sol1) 그냥 풀기

$a \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} b \xrightarrow{+3} 10$

$\boxed{1}$ 4 $\boxed{7}$ 10

㉠ $a+2b = 1+14$
$= \boxed{15}$

sol2) 등차중항

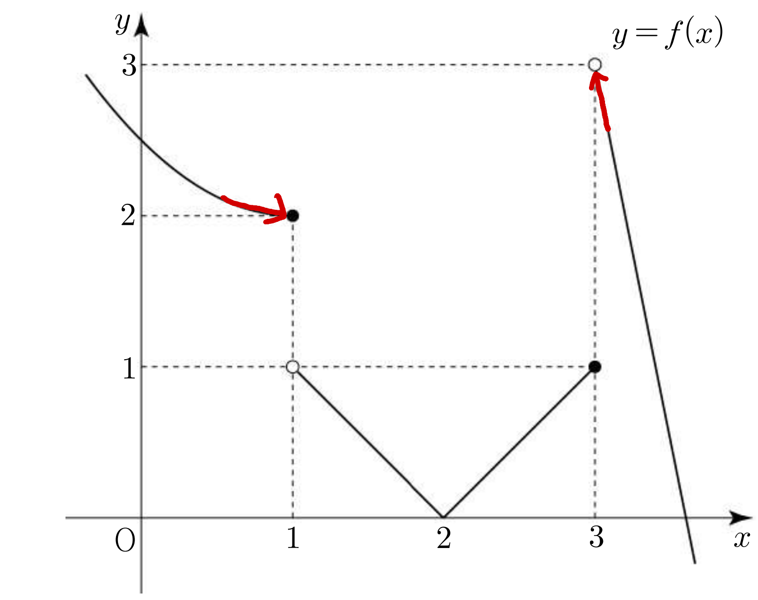
$a+b=8$ 이고, $14=2b$ 이므로 이를 계산하면

$a=1,\ b=7$

㉠ $a+2b = \boxed{15}$

극한의 정의

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1-} f(x) + \lim_{x\to 3+} f(x)$의 값은? [3점]

$2 + 3 = \boxed{5}$

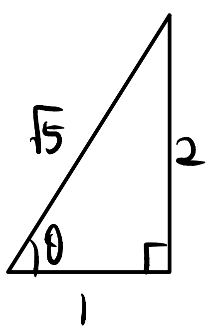
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

각의 범위에만 주의~

6. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = 2$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

θ를 예각으로 간주



$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta < 0$

$\therefore$ ㉠ $\cos\theta = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{5}}$

sol2) 식으로 계산

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 인데 $\sin\theta, \cos\theta$의 부호 판별 귀찮으니까 제곱!

$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 4$

$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{5}$ 이므로 $\cos\theta = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{5}}$ $(\cos\theta < 0)$

Σ의 사칙연산

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-1)^2 = 61, \quad \sum_{k=1}^{5} a_k(a_k-4) = 11$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k^2$의 값은? [3점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

시그마 식을 정리하면

$\sum_{k=1}^{5}(4a_k^2-4a_k+1) = 61$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5}(4a_k^2-4a_k)+5 = 61$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5}(4a_k^2-4a_k) = 56$ ... ①

$\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-4a_k) = 11$ ... ②

① − ②를 하면 $\sum_{k=1}^{5} 3a_k^2 = 45$ 이므로

㉠ $\sum_{k=1}^{5} a_k^2 = \boxed{15}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물

대표적인 삼각방정식 ⊕ 해의 합? 대칭성!

8. $0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 방정식 $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ 의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π ✓ ④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

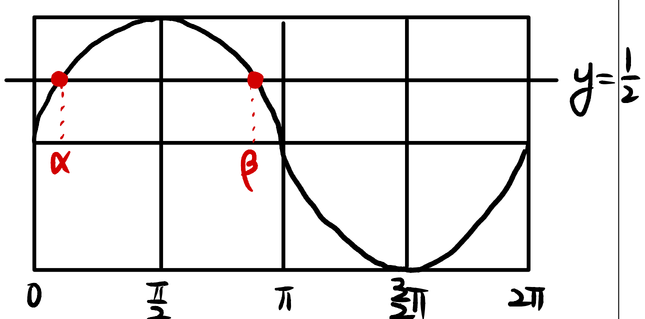
2 -1
1 2

$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$\therefore \sin x = \frac{1}{2}$ OR -2

하지만 $-1 \le \sin x \le 1$ 이므로 $\sin x = -2$는 불가능

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$



$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이므로

㉮ $\alpha + \beta = \boxed{\pi}$

그저 로그방정식

9. 두 양수 m, n에 대하여

$$\log_2\left(m^2 + \frac{1}{4}\right) = -1, \ \log_2 m = 5 + 3\log_2 n$$

일 때, $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ✓ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$\log_2(m^2 + \frac{1}{4}) = -1$ 에서 $m^2 + \frac{1}{4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore m^2 = \frac{1}{4}$ 이므로 $m = \frac{1}{2}$ ($\because m > 0$)

곧, $\log_2 m = -1$ 이므로 $5 + 3\log_2 n = -1$ 이다.

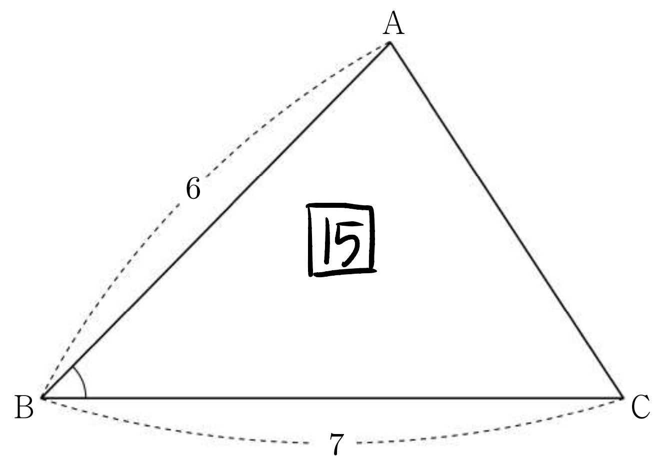
계산하면 $\log_2 n = -2$ 이고 $n = \frac{1}{4}$

㉮ $m + n = \boxed{\frac{3}{4}}$

원하는 값을 적절히 뽑아낼 수 있는가?

10. $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 7$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 넓이가 15일 때, $\cos(\angle ABC)$ 의 값은? (단, $0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2}$) [3점]

① $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ② $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ✓ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{33}}{7}$



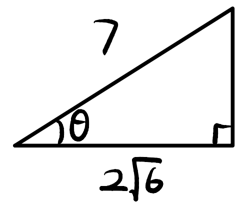
$\triangle ABC$의 넓이: $\frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \sin(\angle ABC)$

$= 21\sin(\angle ABC)$

$= 15$

$\therefore \sin(\angle ABC) = \frac{5}{7}$ 이다.

$\Rightarrow \angle ABC = \theta$ 로 두면



이므로

㉮ $\cos\theta = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{7}}$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물

등비수열의 성질

11. 첫째항이 3이고 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{6a_3}{a_5}$$

일 때, a_7의 값은? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

sol1) 단순계산

$a_1=3$이고, 공비를 $r>1$로 두면

$S_4=\frac{3(r^4-1)}{r-1}$, $S_2=\frac{3(r^2-1)}{r-1}$, $\frac{a_3}{a_5}=\frac{ar^2}{ar^4}=\frac{1}{r^2}$이다.

$\therefore \frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{3(r^2+1)(r^2-1)}{r-1}}{\frac{3(r^2-1)}{r-1}}=r^2+1$ 이므로 $r^2+1=\frac{6}{r^2}$

이제 양변에 r^2을 곱해주면 $(r^2\neq0)$ $r^4+r^2-6=0$ 인데

$(r^2+3)(r^2-2)=0$ 이므로 $r=\sqrt{2}$이다. $(r>1)$

㉠ $a_7=a_1r^6$
$=3\times(\sqrt{2})^6$
$=\boxed{24}$

sol2) 적절한 모양으로 묶어내기 ㉠ 등비수열은 "몇 칸 차이"인지가 중요!

① $\frac{S_4}{S_2}=\frac{a+ar+\boxed{ar^2+ar^3}}{a+ar}=\frac{\cancel{(a+ar)}(1+r^2)}{\cancel{a+ar}}=1+r^2$ ($r^2(a+ar)$)

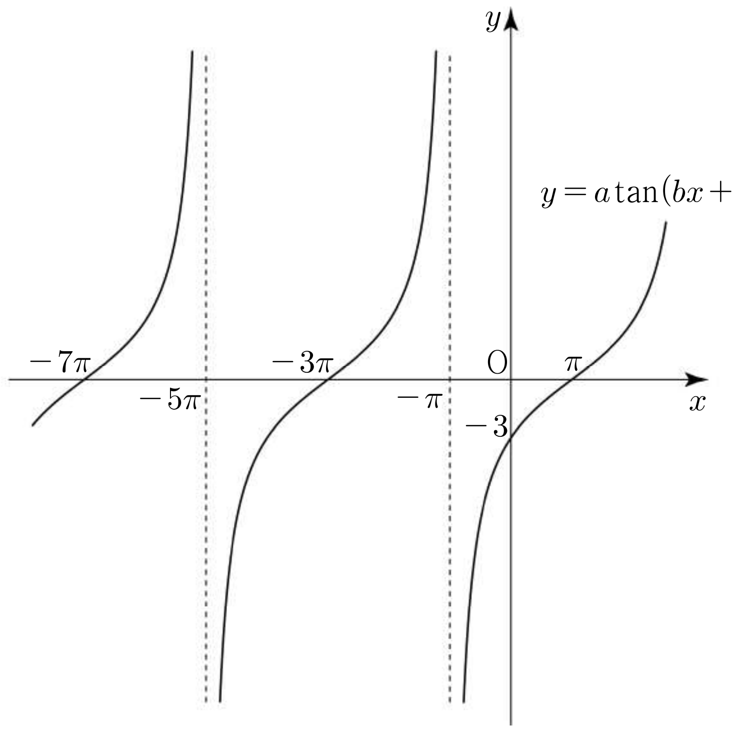
② a_3과 a_5는 두 칸 차이이므로 $\frac{a_3}{a_5}=\frac{1}{r^2}$

$\therefore 1+r^2=\frac{6}{r^2}$을 그대로 얻는다.

그 이후는 동일~

삼각함수의 변형

12. 세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\tan(bx+c)$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은? (단, $0<c<\pi$) [3점]



① $\frac{9}{16}\pi$ ② $\frac{5}{8}\pi$ ③ $\frac{11}{16}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{13}{16}\pi$

$y=\tan(bx+c)$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

그래프상에서 그래프의 한 주기는 $(-5\pi,-\pi)$에 존재하므로

주기는 4π이고, $b=\frac{1}{4}$이다. $(b>0)$

이 때, 주어진 함수를 변형하면 $y=\tan\left(\frac{1}{4}(x+4c)\right)$이므로

이 함수는 $y=\tan\frac{1}{4}x$ 그래프를 x축 방향으로 $-4c$ 만큼 평행이동한 것이다.

곧, $y=a\tan\frac{1}{4}x$는 $(0,0)$을 지나므로 $y=a\tan\left(\frac{1}{4}(x+4c)\right)$는

$(-4c,0)$을 지난다.

이때 문제에서 $0<c<\pi$이므로 $-4\pi<-4c<0$ 이고,

문제 조건에 맞는 $-4c=-3\pi$이다.

$\therefore c=\frac{3}{4}\pi$

곧 $y=a\tan\left(\frac{1}{4}(x+3\pi)\right)$이 그림에서 $(0,-3)$을 지나므로

$-3=a\tan\frac{3}{4}\pi \Rightarrow a=3$

㉠ $abc=3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\pi$
$=\boxed{\frac{9}{16}\pi}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

낯선수열: 써보자!

13. 첫째항이 2 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n-1 & (a_n<8) \\ \frac{1}{3}a_n & (a_n\ge 8) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{16} a_k$ 의 값은? [3점]

① 78 ② 81 ③ 84 ④ 87 ⑤ 90

$a_1=2$ 이므로 차례대로 써보면

$a_2=3$
$a_3=5$ 합 17
$a_4=9$ ← $a_4>8$ 이므로 a_5는 $\frac{1}{3}a_4$로 계산

$a_5=3$
$a_6=5$ 합 17
$a_7=9$

⋮ 반복!!

$\therefore$ ④ $\sum_{k=1}^{16}a_k=a_1+\underbrace{(a_2+a_3+a_4)}_{17}+\underbrace{(a_5+a_6+a_7)}_{17}+\cdots\underbrace{(a_{14}+a_{15}+a_{16})}_{17}$

$=2+17\times5$
$=\boxed{87}$

이제는 많이 보이는 유형. 실수인 거듭제곱근~

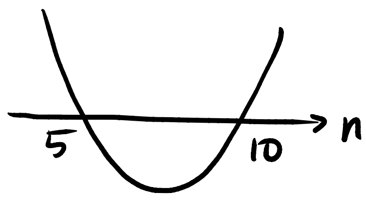
14. $4\le n\le 12$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2-15n+50$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $f(n)=f(n+1)$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

n제곱근 중 실수인 것의 개수: n의 홀/짝 여부에 의해 변화

즉, $f(n)\begin{cases} n\text{이 홀수일 때 언제나 } 1 \\ n\text{이 짝수일 때 } n^2-15n+50 \begin{cases} >0 : 2 \\ =0 : 1 \\ <0 : 0 \end{cases}\end{cases}$

$n^2-15n+50=(n-5)(n-10)$ 이므로



i) n이 홀수일때
n이 홀수면 $(n+1)$은 무조건 짝수
$f(n)=1$ 이므로 $f(n+1)=1$ 이다.
곧 $n=9$ 일 때 $f(n+1)=1$ 이 된다.

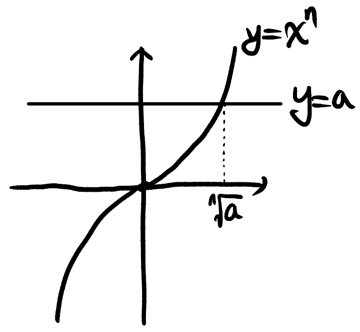
$(n-5)(n-10)$에 $n+1$을 대입했을 때 함숫값 $=0$

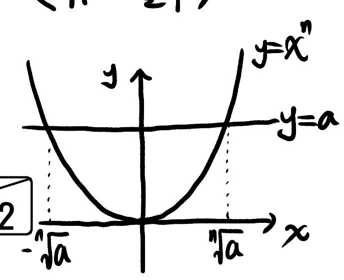
ii) n이 짝수일때
같은 규칙에 의해
n이 짝수면 $(n+1)$은 무조건 홀수.
$\therefore f(n+1)=1$ 이므로 $f(n)=1$ 이다.
곧 $n=10$ 일 때 $f(n)=1$ 이 된다.

$(n-5)(n-10)$에 n을 대입했을 때 함숫값 $=0$

$\therefore n=9, 10$
③ n의 합 $=\boxed{19}$

※ 거듭제곱근에서 실근의 개수
$x=\sqrt[n]{a}$ 에서 $x^n=a$ 이므로 $y=x^n$과 $y=a$ 의 교점의 갯수.
$y=x^n$는 n: 홀수 / n: 짝수로 구분되므로 케이스분류를 하면 다음과 같다.


⇒ 모든 실수 a에서 교점 1개
<n = 홀수>


⇒ $a>0$ 에서 교점 2개
$a=0$ 에서 교점 1개
$a<0$ 에서 교점 0개
<n = 짝수>

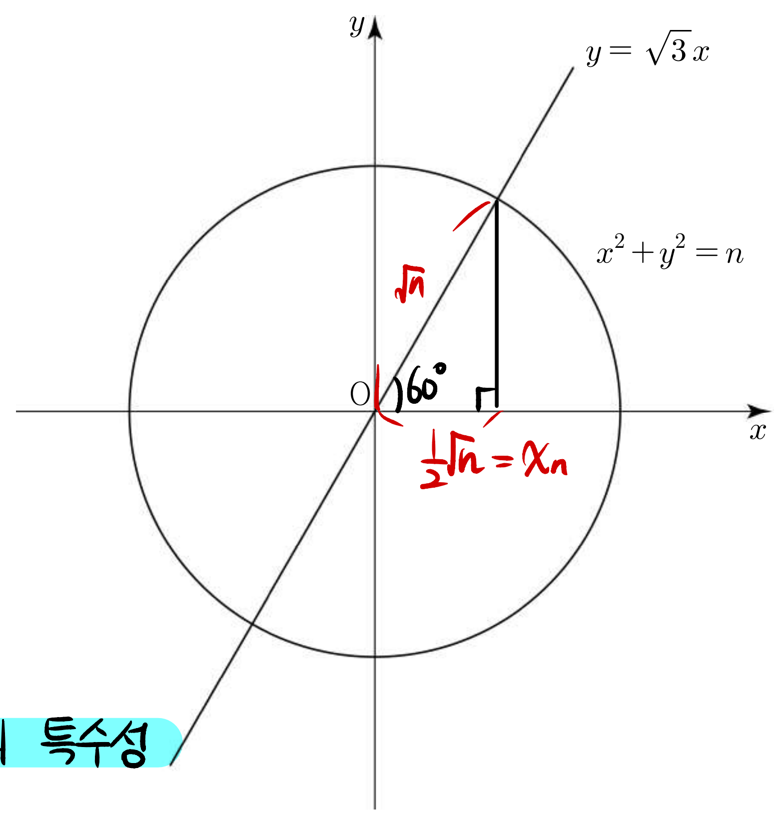
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

사실 구하라는 꼴의 조각에서 x_n 형태 어느정도는 예측가능.

15. 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n$이 직선 $y=\sqrt{3}x$와 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 x_n이라 하자.

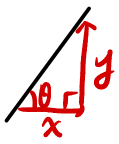
$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{x_k+x_{k+1}}$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16



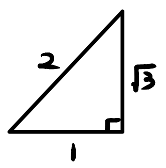
$y=\sqrt{3}x$ 의 특수성

기울기 $\sqrt{3}$인 직선: 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ로 두면 $\tan\theta=\sqrt{3}$이다.



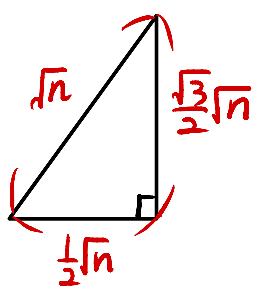
($\because$ $\frac{y값\ 변화량}{x값\ 변화량}$ = 기울기 = $\tan\theta$)

$\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로



꼴이다.

이때, $x^2+y^2=n$의 반지름의 길이는 $\sqrt{n}$이므로



이다.

따라서 $x_n=\frac{1}{2}\sqrt{n}$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{x_k+x_{k+1}}=\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}}=\sum_{k=1}^{80}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{80}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}=2\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$ 이므로

$$2\begin{pmatrix}\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}\\ \cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}\\ \vdots\\ \sqrt{81}-\cancel{\sqrt{80}}\end{pmatrix} \Rightarrow 2(\sqrt{81}-\sqrt{1})$$

$\therefore$ ⑤ $\boxed{16}$

식을 이리저리 건드려보자 ⊕ 로그는 밑이 서로 같아야 뭐라도 한다.

16. 세 양수 a, b, c가

$$2^a=3^b=c,\ a^2+b^2=2ab(a+b-1)$$

을 만족시킬 때, $\log_6 c$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

주어진 두 식간의 연관성 잘 안보임. 하나는 지수식, 하나는 다항식

⇒ 왼쪽 식의 a, b를 c에 대해 표현해서 오른쪽 식에 대입?

① $2^a=3^b=c$

⇒ $a=\log_2 c,\ b=\log_3 c$

② $a^2+b^2=2ab(a+b-1)$

→ $a^2+b^2=2ab(a+b)-2ab$

⇒ $(a+b)^2=2ab(a+b)$ 이므로 $a+b=2ab$이다. ($\because a+b>0$)

곧 ①을 ②에 대입하면 $\log_2 c+\log_3 c=2\log_2 c\log_3 c$ 인데,

"밑통일"이 안되어있어서 계산불가능.

⇒ 양변을 $\log_2 c\log_3 c$로 나눠주자.

?? 갑자기? ㅈㄴ 아이디어 같은데...

개쩌는 아이디어라기보다는 계산 Tip 정도.
두 수의 합/곱이 동시에 등장하면 쓴다.

($a+b=ab \Rightarrow \frac{a+b}{ab}=1$
$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 을 얻는다.)

$$\therefore \frac{\log_2 c+\log_3 c}{\log_2 c\log_3 c}=\frac{1}{\log_3 c}+\frac{1}{\log_2 c}=2$$

$\Rightarrow \log_c 3+\log_c 2=2$ ($\because \frac{1}{\log_a b}=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\log_b a$)

$\Rightarrow \log_c 6=2$ 이므로 ⊕ $\log_6 c=\frac{1}{\log_c 6}=\boxed{\frac{1}{2}}$

일반항으로 무지성 돌이박는 것도 때로는 좋다.

17. 모든 항이 양수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4+a_6의 최솟값은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이다.
> (나) $a_3\times a_{22}=a_7\times a_8+10$

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

(가) 조건은 너무 대놓고 등차중항에 대한 식

⇒ $\{a_n\}$은 등차수열

그런데 모든 항이 양수이므로 $\{a_n\}$의 초항과 공차 모두 양수

(나) 우리는 등차수열의 곱에 대한 식 처리방법은 모름.

⇒ 일반항 써보자.

$\{a_n\}$의 초항을 a, 공차를 d로 두면

$a_3\times a_{22}=a_7\times a_8+10$

$\Rightarrow (a+2d)(a+21d)=(a+6d)(a+7d)+10$

$\Rightarrow \cancel{a^2}+23ad+\cancel{42d^2}=\cancel{a^2}+13ad+\cancel{42d^2}+10$

$\Rightarrow 10ad=10$

$\therefore ad=1$ 이므로 $d=\frac{1}{a}$

㉮ $a_4+a_6=2a_5$

$=2(a+4d)$

$=2\left(a+\frac{4}{a}\right)$ 이므로 산술기하평균에 의해

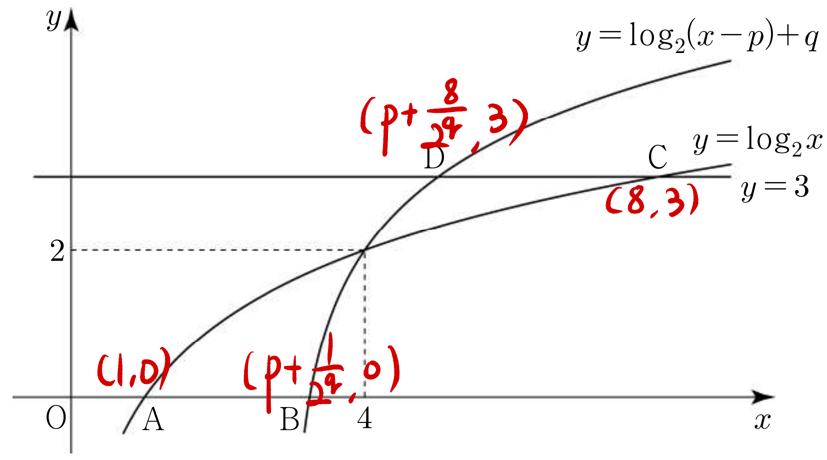
a, d 모두 양수여서 쓸 수 있음

$a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$ (등호는 $a=\frac{4}{a}$일 때 성립)

$\Rightarrow a_4+a_6=2\left(a+\frac{4}{a}\right)\geq \boxed{8}$

좌표계산 열심히!

18. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-p)+q$가 점 $(4,\ 2)$에서 만난다. 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-p)+q$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=3$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{BA}}=\frac{3}{4}$일 때, $p+q$의 값은? (단, $0<p<4$, $q>0$) [4점]



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

딱히 기하적 해석을 쓸 만한 여지가 보이지 않음

⇒ 억지로 하려고 하지 말고, 그냥 계산 ㄱㄱ

① $y=\log_2 x$와 $y=\log_2(x-p)+q$가 $(4,2)$에서 만난다.

⇒ $y=\log_2(x-p)+q$가 $(4,2)$를 지난다. $\therefore 2=\log_2(4-p)+q$

② 점 B의 좌표

⇒ $0=\log_2(x-p)+q$

⇒ $x=p+2^{-q}$

$\therefore B\left(p+\frac{1}{2^q},\ 0\right)$

③ 점 D의 좌표

⇒ $3=\log_2(x-p)+q$

⇒ $x=p+2^{3-q}$

$\therefore D\left(p+\frac{8}{2^q},\ 3\right)$

④ 점 A, C의 좌표 각 $A(1,0)$, $C(8,3)$

좌표 대입해서 계산해보면

$\overline{CD}-\overline{BA}=\left(8-p-\frac{8}{2^q}\right)-\left(p+\frac{1}{2^q}-1\right)=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow 9-\frac{9}{2^q}-2p=\frac{3}{4}$ $\therefore \frac{33}{4}=2p+\frac{9}{2^q}$

이제 ①에서 구한 $2=\log_2(4-p)+q$과 연립하면 $p=4-\frac{4}{2^q}$에서

$\frac{33}{4}=8-\frac{8}{2^q}+\frac{9}{2^q}$ $\therefore q=2,\ p=3$ ㉮ $p+q=\boxed{5}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의 눈물 (개인계정)

수열의 일부가 등차/등비라고 해서 전체수열도 그럴 것이라는 보장 X

19. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 네 수 a_1, a_3, a_5, a_7은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다.
> (나) 8 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \times a_{9-n} = 75$이다.

$a_1 + a_2 = \frac{10}{3}$, $\sum_{k=1}^{8} a_k = \frac{400}{3}$ 일 때, $a_3 + a_8$의 값은? [4점]

① $\frac{110}{3}$ ② 40 ③ $\frac{130}{3}$ ④ $\frac{140}{3}$ ⑤ 50

(가) 주의! a_1, a_3, a_5, a_7이 등비수열이라 해서
$\{a_n\}$ 전체가 등비수열이라는 보장 X

(나) n에 자연수를 대입해보면

$$\left.\begin{matrix} a_1 \times a_8 \\ a_2 \times a_7 \\ a_3 \times a_6 \\ a_4 \times a_5 \end{matrix}\right\} = 75$$

곧, 문제의 구성을 잘 파악해보면
① (가)를 통해 홀수th 항에 대한 힌트
② (나)를 통해 홀수th항과 짝수th을 짝지음
③ 홀수th 항 ⊕ 문제추가조건 ⇒ 짝수th 항 도출

∴ a_1는 a_8과, a_3는 a_6와, a_5은 a_4과, a_7은 a_2과 관련

+2 +2 +2
-2 -2 -2

(여기서 +2, -2는 항 번호의 차이를 의미)

⇒ a_1, a_3, a_5, a_7은 등비수열로 이루므로 항 번호가 커질수록 일정한 수가 곱해짐
⇒ 그와 마찬가지로 a_8, a_6, a_4, a_2과 같은 "일정한 간격의" 수열이 순서를 거꾸로 해서 곱해졌더니 곱이 일정하다?

⇒ a_8, a_6, a_4, a_2도 등비수열이다.

이게 이해가 어렵다면 $a_1 = a$, $a_3 = ar$, $a_5 = ar^2$, $a_7 = ar^3$으로 두자.

$$\boxed{a_1} \times a_8 = a_3 a_6 = a_5 a_4 = a_7 a_2$$
$$a \times \boxed{} = ar \times \boxed{} = ar^2 \times \boxed{} = ar^3 \times \boxed{} = 75$$

r이 1개씩 많아짐 r이 1개씩 적어져야 함

즉 $a_8 \to a_6 \to a_4 \to a_2$ 순으로 갈수록 r이 1개씩 줄어드므로
거꾸로 생각하면 $a_2 = b$로 뒀을 때 $a_2 = b$, $a_4 = br$, $a_6 = br^2$, $a_8 = br^3$이다.

다음 page

솔직히 ㄷ 보기 좀 마음에 안 듦. 대충 넘어간 사람이 개이득봤을 듯

20. 이차함수 $f(x) = (x-k)^2 \ (k>0)$이 있다. 양수 a에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 3) \\ kf(x-a) & (x > 3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> (가) $\lim_{x \to 3} g(x)$가 존재한다.
> (나) 함수 $y = g(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다.

<보 기>

ㄱ. $f(1) = 1$이면 $g(2) = 0$이다.
ㄴ. $g(k+a) < g(3)$
~~ㄷ~~. $(k-1)(k-2) \ge 0$

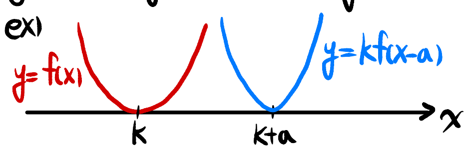
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$k>1$ 이면 그래프 뾰족
$0<k<1$ 이면 그래프 완만

$g(x)$에서 $y=kf(x-a)$는 $y=f(x)$ 그래프를 x축 방향으로 a만큼 평행이동 후 k상수배한 것

문제조건에서 a는 양수이므로 오른쪽 평행이동

ex)

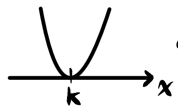


(가) $x=3$에서 극한값이 존재한다.
⇒ 좌극한과 우극한이 같다
⇒ $\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3+} kf(x-a)$ 에서 $y=f(x)$와 $y=kf(x-a)$ 모두 다항함수
⇒ "연속함수"이므로 극한값 = 함숫값
∴ $f(3) = kf(3-a)$

여기서 (나)만 가지고 바로 개형이 그려지기는 어려우므로 case 분류!

case 분류의 기준? $g(x)$가 $x=3$에서 나뉘니 k도 3을 기준으로 해보자!

그냥 막 나누는게 아니라 $y=f(x)$가



이므로 축과 $x=3$ 사이의 대소를 따진 것.

본격적인 case 분류는
다음 page

19번 이어서

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8$$
$$a\ b\ ar\ br\ ar^2\ br^2\ ar^3\ br^3$$

조건에서 ① $a_1+a_2=a+b=\frac{10}{3}$

② $\sum_{k=1}^{8} a_k=(a+b)+r(a+b)+r^2(a+b)+r^3(a+b)$
$=(a+b)(1+r+r^2+r^3)$
$=\frac{400}{3}$

$\therefore \frac{10}{3}(1+r+r^2+r^3)=\frac{400}{3}$ 에서 $r^3+r^2+r-39=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 1 & 1 & -39 \\ & & 3 & 12 & 39 \\ \hline & 1 & 4 & 13 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (r-3)(r^2+4r+13)=0$
$\therefore r=3$

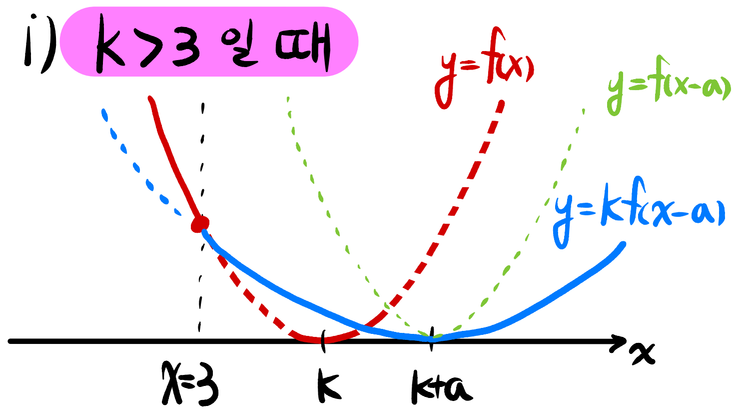
이제 $a_1a_8=a\cdot(br^3)=27ab=75$ $\therefore ab=\frac{25}{9}$를 얻는다.
곧 $a+b=\frac{10}{3}$, $ab=\frac{25}{9}$에서 a, b는 $x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}=0$의 두 근. ($\because$ 근과 계수의 관계)
계산하면 $(x-\frac{5}{3})^2=0$ 에서 $a=b=\frac{5}{3}$

㉠ $a_3+a_8=ar+br^3$
$=\frac{5}{3}\times 3+\frac{5}{3}\times 3^3$
$=\boxed{50}$

20번 이어서 ··· ①

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물

i) $k>3$ 일 때

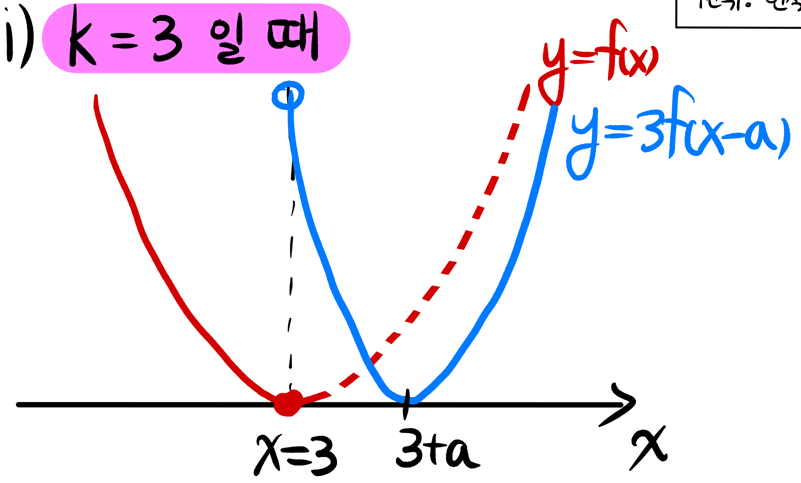


$x=3$ 에서의 극한값이 존재하도록 하려면
위 그림처럼 $y=kf(x-a)$ 그래프가 비교적 완만해야 함

⇒ $k<1$ 이고, 이는 $k>3$에 모순

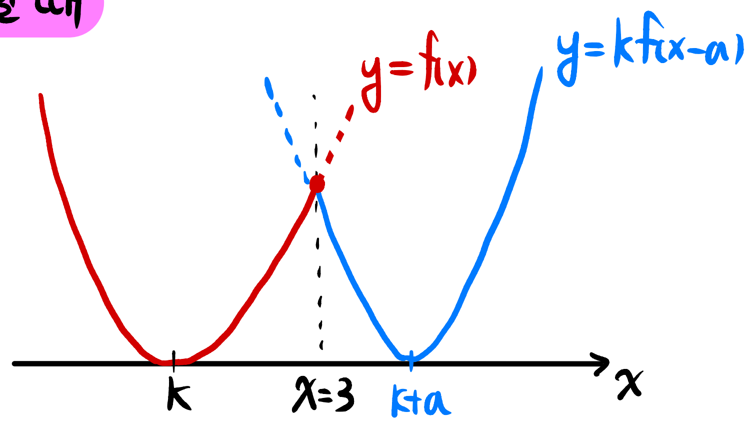
$y=f(x)$의 최고차항 계수 $=1$

ii) $k=3$ 일 때



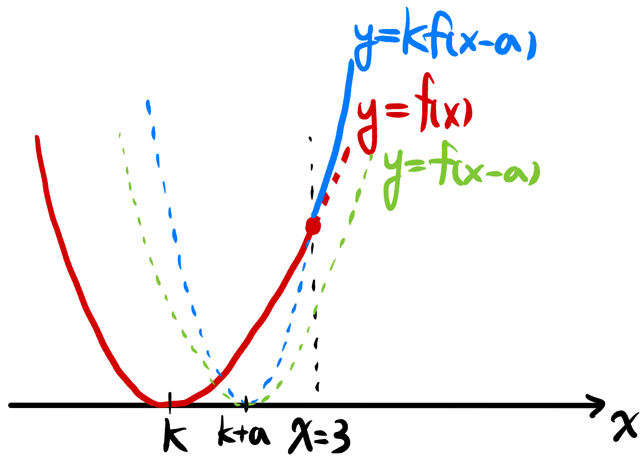
$f(3)=0$ 이므로 $y=3f(x-a)$ 에서 (가) 조건을 만족하는 건 당연히 불가능.

iii) $0<k<3$ 일 때



< $k+a \geq 3$ 인 경우 >

(나) 조건 만족하는 것 불가능



< $k+a<3$ 인 경우 >

$x=3$ 에서의 극한값이 존재하도록 하려면
위 그림처럼 $y=kf(x-a)$ 그래프가 비교적 뾰족해야 함

⇒ $1<k<3$

∵ 그래프가 더 뾰족해졌으니까

문제는 여기서 k에 대한 추가 정보를 알 수가 없다는 것.

처음의 그 $f(3)=kf(3-a)$ 에서 k와 a 모두 미지수고, 따라서 미지수는 2개인데 식은 1개. ∴ 부정방정식

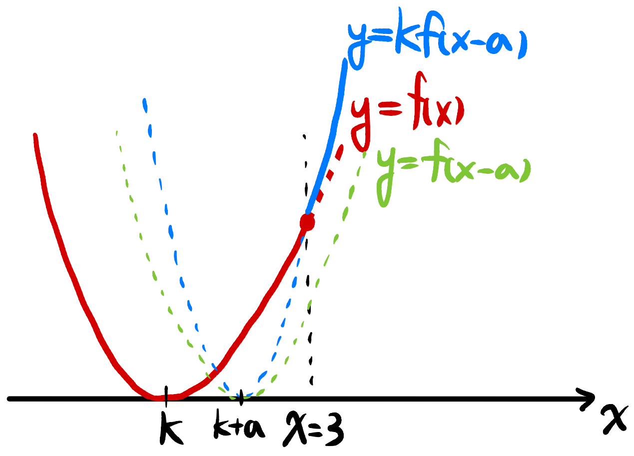
직접 그 식을 열심히 풀고 전개하고 노가다 뛰어봤자 결국 k와 a의 관계식만 나오지 별다른 힌트는 나오지 않는다.

그렇다고 혹시 빼먹은 조건이 없나 찾아봐도 그런 건 없다. 왜냐? 진짜 없으니까!

다음 page

20번 이어서 … ②

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물



여기서 보기를 봐야 한다.

ㄱ. $f(1)=1$ 이면 $g(2)=0$ 이다.

$f(x)=(x-k)^2$ 이므로 $f(1)=(1-k)^2$ 이고,
곧 $(1-k)^2=1$ 에서 양수 $k=2$ 이다.

$\therefore g(2)=f(2)=(2-2)^2=0$ 이므로 $\boxed{\text{성립}}$

ㄴ. $g(k+a)<g(3)$

그래프에서 너무나도 자명하게 옳다는 것을 알 수 있다. $\therefore$ $\boxed{\text{성립}}$

ㄷ. $(k-1)(k-2)\geq 0$

이는 $k\leq 1$, $k\geq 2$에 해당되는 값만 만족하는데, 우리가 알고 있는 k의 범위는 $1<k<3$뿐.
뭔가 (가) 조건에서 도출해낸 $f(3)=kf(3-a)$에 추가적인 계산의 여지가 있지 않을까 생각해봐도 그딴거 없다.
그냥 그게 답일 뿐. 실제로 $k=\frac{3}{2}$과 같은 수를 식에 대입하면 반례가 나온다. $\therefore$ $\boxed{\text{모순}}$

따라서 답은 $\boxed{\text{ㄱ, ㄴ}}$인데, 이 문제가 맘에 안 드는 이유는 괜히 (가) 조건을 만들어놓고 case 분류 외에는 쓸 필요가 없도록 했다는 것 ㅠㅠ

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물

나름 어려웠을수도? 수열이 중간에 쓰다가 끊긴다.
본 풀이 외에 $a_{20}+a_{21}=0$ 으로부터 거꾸로 규칙을 찾아도 가능

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 3의 배수가 아닌 경우 $a_{n+1}=(-1)^n\times a_n$이다.
> (나) n이 3의 배수인 경우 $a_{n+3}=-a_n-n$이다.

$a_{20}+a_{21}=0$일 때, $\sum_{k=1}^{18}a_k$의 값은? [4점]

① 57 ② 60 ③ 63 ④ 66 ⑤ 69

직접 써보면 알겠지만, $a_1\to a_2\to a_3\to\cdots$처럼 순서대로 예쁘게 정의되지 않는다.

$a_1=a_1$
$a_2=(-1)^1a_1=-a_1$ 이후에 a_4를 정의할 때 문제가 생김
$a_3=(-1)^2a_2=a_2$

왜? { ① $a_{n+1}=(-1)^na_n$으로 정의하자니 $n=3$이 3의 배수
② $a_{n+3}=-a_n-n$으로 정의하자니 $n=1$이 3의 배수 ×

⇒ 둘 다 쓸 수 없음

그러면 어떻게 정의해야 할까?

계속 써보면, $a_5=(-1)^4a_4=a_4$ 이고
a_6는 $(-1)^5a_5$ 와 $-a_3-3$으로 "동시에" 정의된다.

∴ $(-1)^5a_5=-a_3-3$
⇒ $a_5=a_3+3$ 이고, $a_4=a_5$ 이므로
$a_5=a_4=a_3+3$ 이다.

마찬가지로, a_7를 정의할 수 없으므로
$a_8=(-1)^7a_7=-a_7$이고
a_9는 $(-1)^8a_8$과 $-a_6-6$으로 "동시에" 정의된다.
∴ $(-1)^8a_8=-a_6-6$
⇒ $a_8=-a_6-6$이고, $a_8=-a_7$이므로
$a_7=a_6+6$ 이다.

∴ 규칙을 생각해보면 결국 항 3개 단위의 반복

㉮ $\sum_{k=1}^{18}a_k=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)+\cdots$
$=(-a_3+a_3+a_3)+(-a_6-a_6+a_6)+(-a_9+a_9+a_9)+\cdots$

왜 $a_1, a_4\cdots$로 안바꾸고 $a_3, a_6\cdots$로 바꾼지 이유는 다음 page

⇒ $a_3-a_6+a_9-a_{12}+a_{15}-a_{18}$ 이다.

단답형

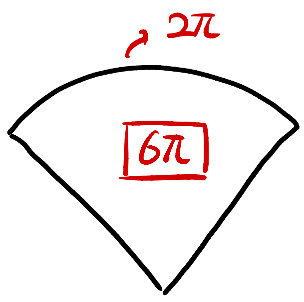
할 말 없음

22. $\log_2 8+\log_2\frac{1}{2}$의 값을 구하시오. [3점]

㉮ $\log_2\frac{8}{2}=\log_2 4$
$=\boxed{2}$

부채꼴의 호의 길이 & 넓이 공식!!

23. 호의 길이가 2π이고 넓이가 6π인 부채꼴의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]



① 부채꼴의 호의 길이 : $r\theta=2\pi$
② 부채꼴의 넓이 : $\frac{1}{2}r^2\theta=6\pi$
$r=6,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

㉮ $\boxed{6}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

21번 이어서

Q. 왜 위에서는 a_1, a_2, a_3를 a_1에 대한 식으로 쓰고, a_4, a_5, a_6을 a_4에 대한 식으로 썼으면서 세 개씩 묶어낼 때는 $a_3, a_6, \cdots$으로 묶어냈을까?

A. 바로 조건 (나) 때문. n이 3의 배수이면 $n+3$도 3의 배수이다.

⇒ 즉, 조건 (나)는 항 번호가 3의 배수인 항에 대한 조건이다.

⇒ (나) 조건을 활용하기 위해 $a_3, a_6, \cdots$으로 묶어낸 것.

뭐 어쨌든, $\sum_{k=1}^{18} a_k = a_3 - a_6 + a_9 - a_{12} + a_{15} - a_{18}$ 이다.

여기서 우리가 아직 안 쓴 조건이 있는데, 바로 $a_{20} + a_{21} = 0$ 이다.

⇒ $a_{21} = (-1)^{20} a_{20}$ 이므로 $a_{20} = a_{21}$ 이고, 곧 $a_{20} = a_{21} = 0$ 이다.

이제부터 조건 (나)를 차근차근 적용시켜보면

$a_{21} = -a_{18} - 18 = 0 \quad \therefore a_{18} = (-18)$

$a_{18} = -a_{15} - 15 = -18 \quad \therefore a_{15} = 3$

$a_{15} = -a_{12} - 12 = 3 \quad \therefore a_{12} = (-15)$

$a_{12} = -a_9 - 9 = -15 \quad \therefore a_9 = 6$

$a_9 = -a_6 - 6 = 6 \quad \therefore a_6 = (-12)$

$a_6 = -a_3 - 3 = -12 \quad \therefore a_3 = 9$

구) $9 + 12 + 6 + 15 + 3 + 18$

$= 21 + 21 + 21$

$= \boxed{63}$

사실 수식으로 항들을 표현해서 풀면 일일이 대입하지 않아도 되지만,

고2 수험생이 현장에서 이 문제를 마주했을 때 하기는 어려운 풀이라 생각해

그냥 이 방법을 사용하였습니다. (풀어서 설명하기도 빡심 ㅠㅠ)

증가함수의 최대/최소

24. 집합 $\{x \mid 1 \le x \le 25\}$에서 정의된 함수 $y = 6\log_3(x+2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [3점]

$y = 6\log_3(X+2)$는 밑 > 1 이므로 증가함수

⇒ 진수가 최대 ($X=25$)일 때 M
진수가 최소 ($X=1$)일 때 m

∴ $M = 6\log_3 27$, $m = 6\log_3 3$

⇒ $M+m = 6(\log_3 27 + \log_3 3)$
$= 6(\log_3 81)$
$= \boxed{24}$

기본적인 지수 방정식 (치환!)

25. 방정식 $9^x - 10 \times 3^{x+1} + 81 = 0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

$3^x = t$로 치환해달라고 소리 지르는 중

⇒ $t^2 - 30t + 81 = 0$
⇒ $(t-27)(t-3) = 0$

∴ $t = 3$ or 27 에서 $3^x = 3$을 만족하는 $x=1$, $3^x = 27$ 〃 $x=3$

곧 $\alpha=1$, $\beta=3$ 이고

㉠ $\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{10}$

이젠 익숙해져야 할 유형. 차의 함수는 적절히~

26. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)-x^2} = 1, \quad \lim_{x\to 3} \frac{g(x)-f(x)}{x-3} = 8$$

을 만족시킬 때, $g(5)-f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

문제 조건에도 $g(x)-f(x)$ 등장, 구하는 값도 $g(5)-f(5)$ 이므로
$g(x)-f(x) = h(x)$로 두자.

① $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{다항}}{\text{다항}} = \square$
⇒ 최고차항의 계수비로 판단

∴ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)-x^2} = 1$을 해석하면

⇒ $f(x) = ax^2 + \square$, $g(x) = (a+1)x^2 + \square$ 꼴
⇒ $g(x) - f(x) = x^2 + \square$ 꼴

∴ $h(x) = x^2 + \square$

② $\lim_{x\to 3} \frac{g(x)-f(x)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{h(x)}{x-3} = 8$

∴ $h(3) = 0$, $h'(3) = 8$ (왜? 미분계수의 정의 잘 생각해보시길)

※ 아실 분들은 아시겠지만
$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots$ 일 때
$f(\alpha)$는 $x-\alpha$을 없는셈치고
나머지 식에 α를 대입하면 됨.
곧 $h(x) = (x-3)(x-\alpha)$에서
$h'(3) = 3-\alpha = 8$이다.

따라서 식을 세보면 $h(3)=0$이므로
$h(x) = (x-3)(x-\alpha)$로 둘 수 있다.
여기서 $h'(x) = (x-\alpha) + (x-3)$ 이므로 $h'(3) = (3-\alpha) = 8$ ∴ $\alpha = -5$
⇒ $h(x) = (x-3)(x+5)$

㉠ $g(5) - f(5) = h(5)$
$= 2 \times 10$
$= \boxed{20}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

n=4인 경우 배렉기 쉬움. 케이스 분류는 차분히!

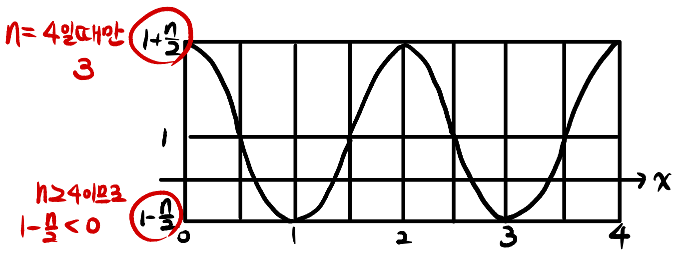
27. $n \geq 4$ 인 자연수 n 에 대하여 집합 $\{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{n}{2}\cos \pi x+1$$

이 있다. 방정식 $|f(x)|=3$ 의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=4}^{10} g(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$인 함수.

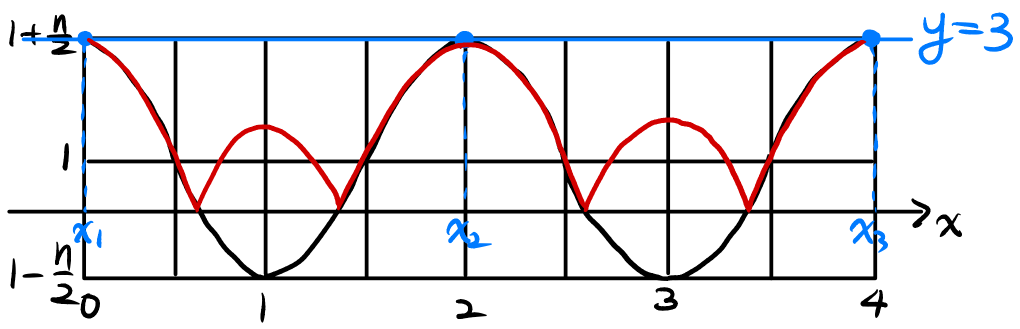
x축 방향 평행이동이 없으니 $0\leq x\leq 4$에서의 $f(x)$는 다음과 같다.



곧 $|f(x)|=3$의 모든 실근의 합은 $1+\frac{n}{2}=3$인 경우와 그래프를 접어올렸을 때 $y=3$과 접하는 경우, 즉 $1-\frac{n}{2}=-3$인 경우를 경계로 변동한다.

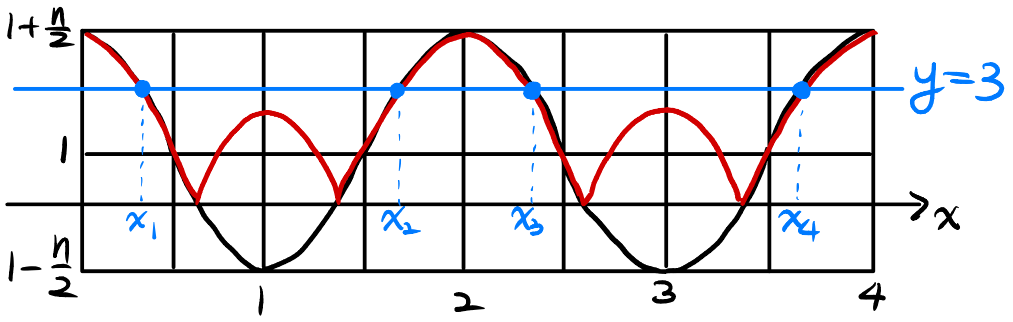
∴ $n=4,\ 8$이 기준!

i) $n=4$인 경우 $(1+\frac{n}{2}=3)$



∴ $x_1+x_2+x_3=0+2+4=6$

ii) $4<n<8$인 경우 $(1-\frac{n}{2}>-3)$

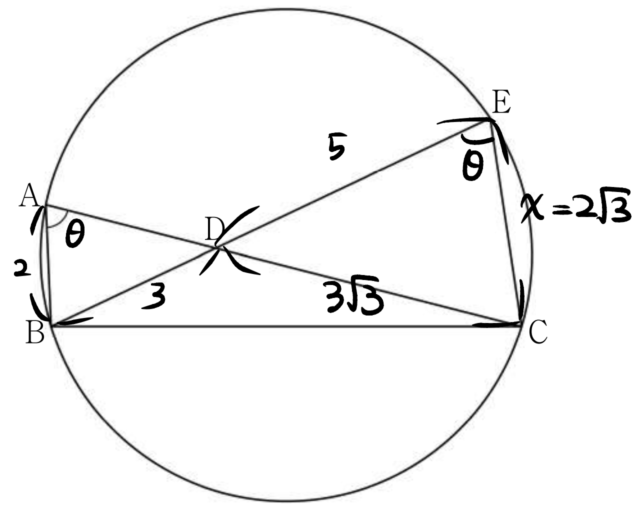


∴ $x_1+x_2+x_3+x_4=2\times1+2\times3=8$ (∵ 대칭성)

나머지 경우는 다음 page

원주각을 이용하는 전형적인 상황 세팅

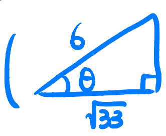
28. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\cos(\angle BAC)=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 선분 AC 위의 한 점 D에 대하여 직선 BD가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{DE}=5$, $\overline{CD}+\overline{CE}=5\sqrt{3}$ 일 때, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



결국 이용할 수 있는 기하적 성질 ⊕ sin/cos Law 전부 이용하자.

원 ⊕ △ ⊕ 각도 등장? 원주각 필수 고려!

$\angle BAC=\theta$로 두면 $\angle CEB=\theta$ (∵ 호 BC에 대한 원주각)

⇒ $\cos(\angle BAC)=\cos(\angle CEB)=\frac{\sqrt{3}}{6}$ ( 에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{33}}{6}$)

그리고 △ABD와 △ECD에서 각각 한 변의 길이가 주어졌고 $\angle ADB=\angle EDC$ (∵ 맞꼭지각) 이므로 △ABD와 △ECD는 닮음

또한, 주어진 조건이 $\overline{CD}+\overline{CE}=5\sqrt{3}$ 이므로 △ECD를 중점적으로 보자.

⇒ $\overline{CE}=x$, $\overline{CD}=5\sqrt{3}-x$로 두면 cos Law에 의해

$(5\sqrt{3}-x)^2=x^2+5^2-10x\cos\theta$

⇒ $75-10\sqrt{3}x+x^2=x^2+25-\frac{5\sqrt{3}}{3}x$ ∴ $x=2\sqrt{3}$

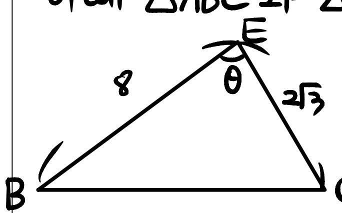
곧, $\overline{CE}=2\sqrt{3}$, $\overline{CD}=3\sqrt{3}$이다.

이제 닮음을 이용해 $\overline{BD}$의 길이를 구해보면

$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{CE}:\overline{CD}$

⇒ $2:\overline{BD}=2\sqrt{3}:3\sqrt{3}$ ∴ $\overline{BD}=3$

이때 △ABC와 △CBE는 외접원을 공유하므로 △CBE를 이용해 답을 구하자.



⇒ $\overline{BC}^2=8^2+(2\sqrt{3})^2-2\times8\times2\sqrt{3}\times\cos\theta$

∴ $\overline{BC}=2\sqrt{15}$

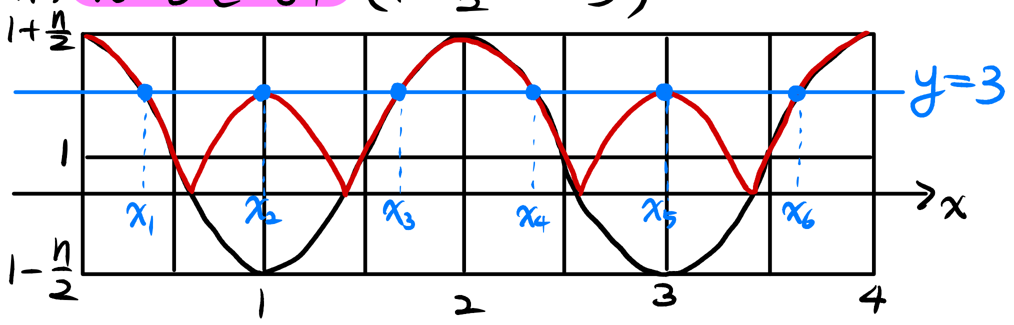
㉠ $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$에서 $\frac{2\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{33}}{6}}=2R$ ∴ $\frac{6\sqrt{55}}{11}=R$ 이므로

외접원의 넓이 $=R^2\pi=\frac{180}{11}\pi$ 이므로 $p+q=\boxed{191}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

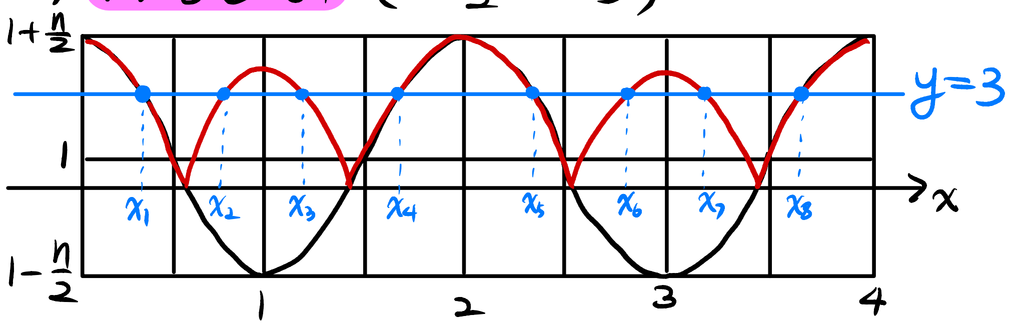
27번 이어서

iii) n=8인 경우 $\left(1-\frac{n}{2}=-3\right)$



$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 2\times1+2\times3+1+3 = 12$

iv) n>8인 경우 $\left(1-\frac{n}{2}<-3\right)$



$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_8 = 16$ ($\because$ 대칭성)

㉠ $\sum_{n=4}^{10} g(n) = g(4) + \sum_{k=5}^{7} g(k) + g(8) + \sum_{k=9}^{10} g(k)$

$= 6 + 3\times8 + 12 + 2\times16$

$= \boxed{74}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수안희: 한석원의 눈물

(나) 조건 적용 어려웠을 듯? 결국 특수한 지점 위주로!

29. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값을 구하시오. [4점]

$\boxed{5}$

(가) 모든 자연수 k에 대하여 a_k는 x에 대한 방정식 $x^2+3x+(8-k)(k-5)=0$의 근이다.
(나) $a_n \times a_{n+1} \le 0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 개수는 2이다.

(가) $x^2+3x+(8-k)(k-5)=0$

$\Rightarrow (x+(8-k))(x+(k-5))=0$의 두 근 a_k

곧, a_k는 모든 자연수 k에 대하여

$a_k \begin{cases} k-8 \\ 5-k \end{cases}$ 둘 중 하나의 값을 갖는다.

여기서 (나) 조건을 일일이 써보기엔 굉장히 막연한데, 중요한 check point가 2개 있다.

① $k-8$, $5-k$은 각각 $k=5, 8$에서 0이 된다.
$\Rightarrow a_n \times a_{n+1} \le 0$ 에서 경계지점으로 활용가능하다.

② $5<k<8$ 일 때, 즉 a_6, a_7은 어떤 주트를 택하더라도 음수.

①을 잘 생각해보면 만약 $a_5=0$이면 a_5의 앞뒤로는 무조건 곱이 0이 된다.
$(a_4a_5=0,\ a_5a_6=0)$

즉, (나) 조건에서 $a_na_{n+1}\le 0$을 만족하는 10이하의 자연수 n은 "2개"랬으니 조건이 이미 충족되는 꼴. → 이는 $a_8=0$일 때도 마찬가지.

∴ a_5, a_8이 모두 0이 되는 것은 불가능!

i) a_5만 0일 경우 → $n=4$, $n=5$일때만 (나) 조건 만족

a_8은 $5-k$ 주트를 따를 것이므로 $a_8=-3$

또한, a_6과 a_7은 a_5와 a_8이 결정되어 있으므로 (나) 조건에 영향 X

⇒ 그냥 ㉮ $\sum_{n=1}^{10} a_n$이 최대가 되도록 a_6의 최댓값 -1, a_7의 최댓값 -1을 택하자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
				0	-1	-1	-3		

⇒ 나머지 항들의 부호를 (나) 조건에 위배되지 않으면서 $\sum_{n=1}^{10} a_n$이 최대가 되도록 배열하면 더 이상 $a_na_{n+1}\le 0$인 n이 존재하면 안되므로 $a_8a_9>0$ 에서 $a_9<0$, 이어서 $a_{10}<0$ 이다. ∴ $a_9=-4$, $a_{10}=-5$

⊕ 그 이후 a_4, a_3, a_2, a_1은 차례대로 ⊕ 부호의 값을 배열해주면 최대가 된다.

∴

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	3	2	1	0	-1	-1	-3	-4	-5

(나) 조건 만족

이 경우, ㉮ $\sum_{n=1}^{10} a_n = \boxed{-4}$ 나머지 경우는 다음 page

풀이과정이 상당히 길어서 보기도 전에 때려질 수도 있는데, 결국 똑같은 계산 반복이라 할만함. 어렵지 않을걸?

30. 두 양수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |-ax^2+b| & (x\le 0) \\ x^2-2ax+b^2 & (x>0) \end{cases}$$

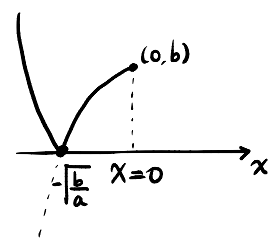
이다. 양의 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$는 최솟값 2를 갖고, 두 상수 α, β에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left|\lim_{t\to\alpha-} g(t)-\lim_{t\to\alpha+} g(t)\right|=2$
(나) $\lim_{t\to\beta-} g(t)-\lim_{t\to\beta+} g(t)+1=g(\beta)$
(다) $g(\alpha)\ne g(\beta)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha$, $\alpha+24\beta=30$일 때, $f(-2)+f(1)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

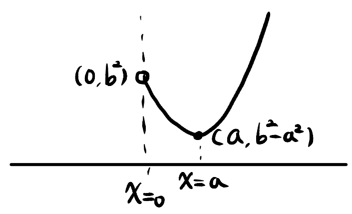
f(x)에 대해 아는 내용만 정리해보면

① $x\le 0$: $|-ax^2+b|$ 이므로 두 양수 a, b에 대해



의 개형

② $x>0$: $x^2-2ax+b^2=(x-a)^2+b^2-a^2$ 이므로 두 양수 $a, b\ (a<b)$에 대해
대칭축: $x=a>0$ 이고, 꼭짓점 (a, b^2-a^2) 에서 $b^2>a^2$ 이므로 ($\because b>a$)



의 개형을 갖는다.

곧, 두 함수를 이어붙이는 데에서 a와 b의 값에 따라 개형에 차이가 있으며 이를 case 분류해보면 다음과 같다.

다음 page

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수완회: 한석원의 눈물

29번 이어서

ii) a_8만 0인 경우 → $n=7, 8$일 때만 (나) 조건 만족

마찬가지로, a_5는 $k-8$ 추트를 띠을 것이므로 $a_5=-3$
또한 동일한 논리로 $a_6=a_7=-1$로 두자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
				-3	-1	-1	0		

⇒ $a_4a_5>0$에서 $a_4<0$, $a_3a_4>0$에서 $a_3<0$, ⋯ 이므로 a_1, a_2, a_3, a_4는 싹다 ⊖ 부호를 가진다.
그니까 a_9와 a_{10}에서 양수를 취해줌으로서 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 최대로 하려고 해도 아래와 같이 역부족이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
-7	-6	-5	-4	-3	-1	-1	0	1	2

(나) 조건 만족

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \boxed{-34}$

iii) a_5, a_8 모두 0이 아닌 경우

마찬가지의 논리로 $a_5=a_8=-3$이고, a_6과 a_7도 동일하게 -1을 대입하면

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
				-3	-1	-1	-3		

⇒ 여기서 남은 항에 전부 양수값들만 때려넣으면 $n=4, 8$일 때만 (나) 조건을 만족시키고, $\sum_{n=1}^{10} a_n$도 최대임을 생각가능.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	3	2	1	-3	-1	-1	-3	1	2

(나) 조건 만족

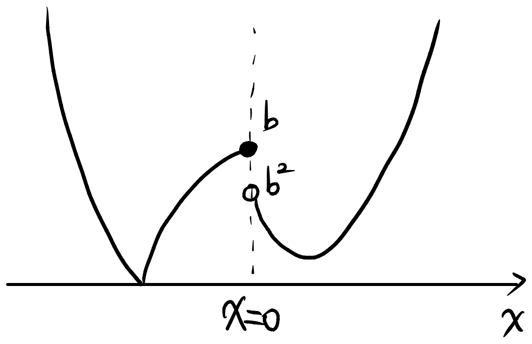
$\therefore$ 이 경우 $\sum_{n=1}^{10} a_n = \boxed{5}$

따라서 ㉠ $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값: $\boxed{5}$

30번 이어서 … ①

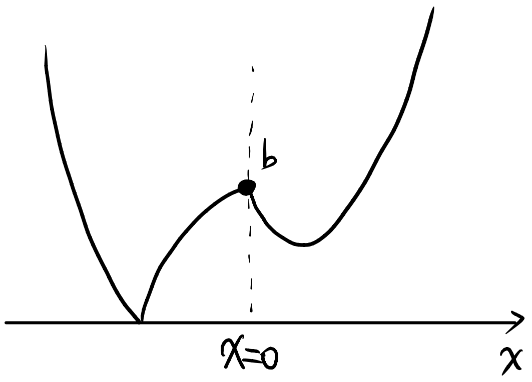
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물

i)



: $b^2<b$, 즉 $0<b<1$일 경우

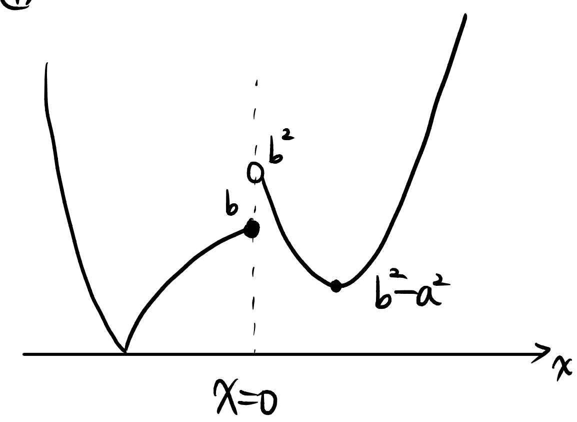
ii)



: $b^2=b$, 즉 $b=1$일 경우

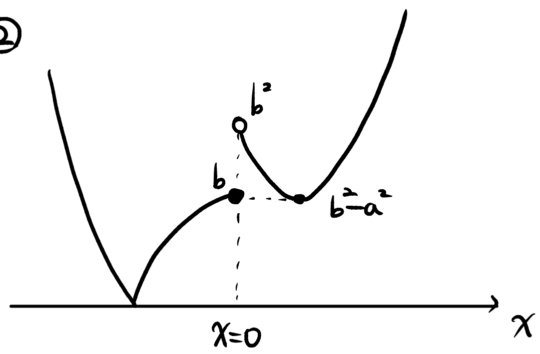
그리고 여기서 실수하기 쉬운 부분이 b^2-a^2의 케이스도 분류해야 한다는 것! (i)과 ii)는 항상 $b>b^2-a^2$)

iii)-①



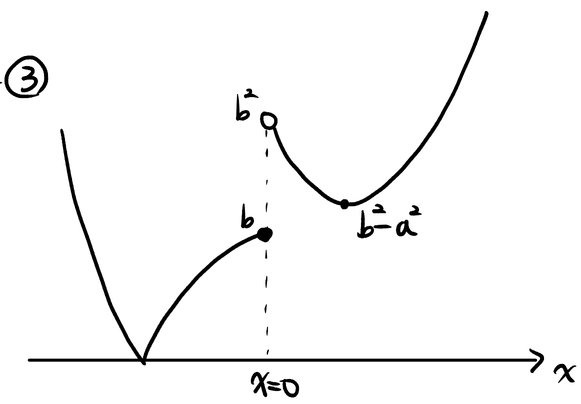
: $b^2-a^2<b<b^2$일 경우

iii)-②



: $b=b^2-a^2<b^2$일 경우

iii)-③



: $b<b^2-a^2<b^2$일 경우

이제 조건들을 해석해보자. 다음 page

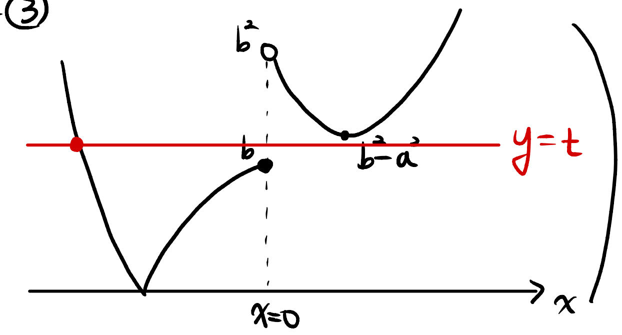
30번 이어서 ... ②

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

$g(t)$는 최솟값 2를 가진다. (t는 양의 실수)

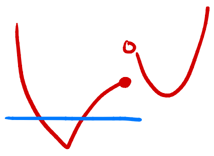
⇒ $y=f(x)$는 $y=t$와 최소 두 점에서는 "무조건" 만난다. ⇒ iii)-③ 모순!

(iii)-③ ∴



(가) $\left|\lim_{t\to\alpha-} g(t) - \lim_{t\to\alpha+} g(t)\right| = 2$

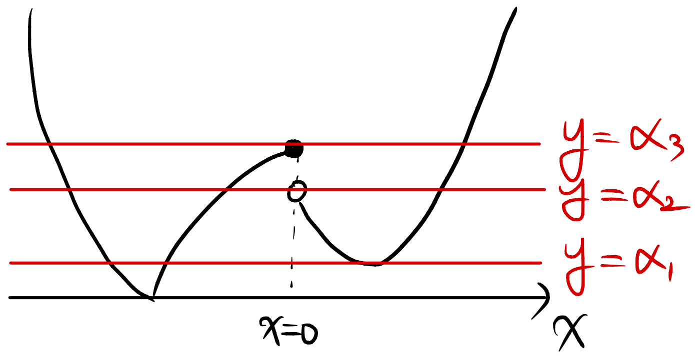
일반적인 지점이면 $\lim_{t\to\alpha-} g(t) = \lim_{t\to\alpha+} g(t)$ 이다. ex)



& $t=\alpha+$ 나 $\alpha-$나 교점개수 같음.

이는 $t=\alpha$를 기준으로 $g(t)$의 극한값이 드라마틱한 변화가 나타난다는 것을 의미한다. → 특수한 지점!

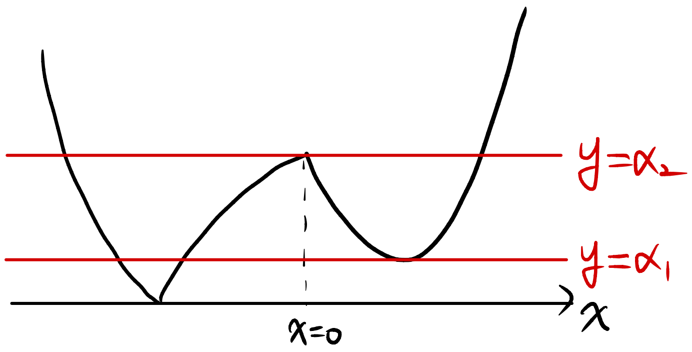
i)



로 두고 극한값을 계산해보면 주어진 (가) 조건을 만족하는 지점은 α_1뿐이다.

(※ α_1: $|2-4|=2$
α_2: $|4-3|=1$
α_3: $|3-2|=1$)

ii)



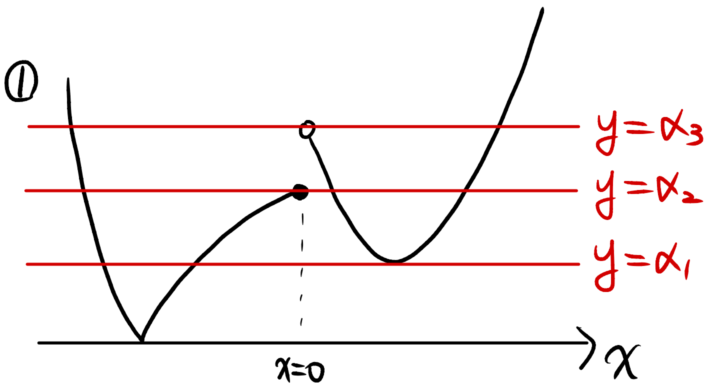
도 마찬가지로

$\left|\lim_{t\to\alpha_2-} g(t) - \lim_{t\to\alpha_2+} g(t)\right| = |4-2| = 2$

$\left|\lim_{t\to\alpha_1-} g(t) - \lim_{t\to\alpha_1+} g(t)\right| = |2-4| = 2$

⇒ α_1, α_2 모두 만족!

iii)-①



도 마찬가지로

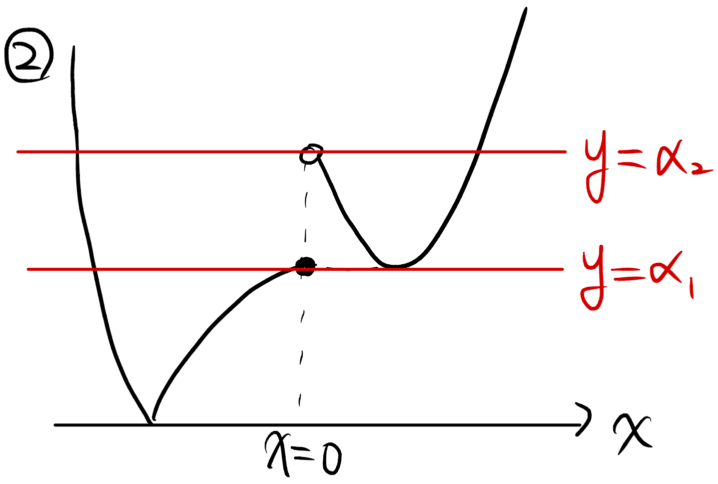
$\left|\lim_{t\to\alpha_3-} g(t) - \lim_{t\to\alpha_3+} g(t)\right| = |3-2| = 1$

$\left|\lim_{t\to\alpha_2-} g(t) - \lim_{t\to\alpha_2+} g(t)\right| = |4-3| = 1$

$\left|\lim_{t\to\alpha_1-} g(t) - \lim_{t\to\alpha_1+} g(t)\right| = |2-4| = 2$

⇒ α_1 뿐!

iii)-②



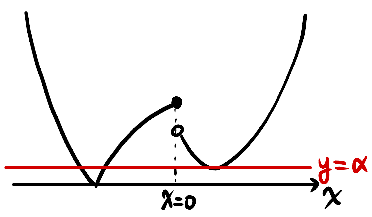
도 마찬가지로

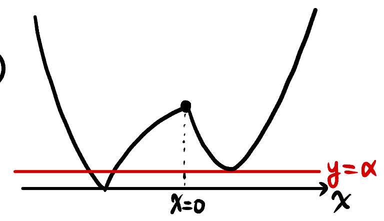
$\left|\lim_{t\to\alpha_2-} g(t) - \lim_{t\to\alpha_2+} g(t)\right| = |3-2| = 1$

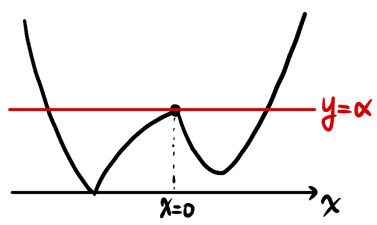
$\left|\lim_{t\to\alpha_1-} g(t) - \lim_{t\to\alpha_1+} g(t)\right| = |2-3| = 1$

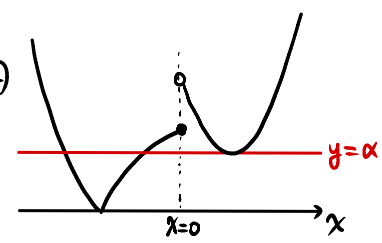
⇒ α 존재 X

결국 (가) 조건을 통해

①


②


③


④


로 후보군이 추려진다.

다음 page

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의 눈물

30번 이어서 … ③

(나) $\lim_{t\to\beta-} g(t) - \lim_{t\to\beta+} g(t) + 1 = g(\beta)$

(다) $g(\alpha) \neq g(\beta)$

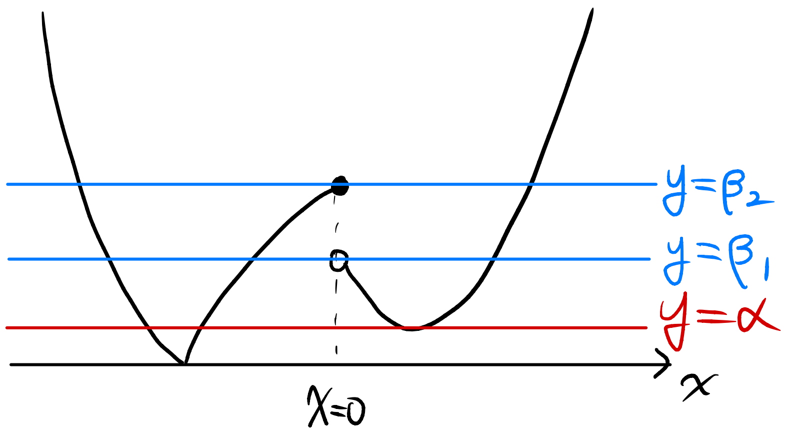
일단, 위와 같은 논리로 일반적인 경우라면 $\lim_{t\to\beta-} g(t) = \lim_{t\to\beta+} g(t)$ 이므로

$\lim_{t\to\beta-} g(t) - \lim_{t\to\beta+} g(t) + 1 = g(\beta) = 1$ 이 되는데, $g(t)$의 최솟값은 2이므로 모순이다.

즉, β 또한 특수한 지점이고, 조건 (다)에 의해 당연히 $\alpha \neq \beta$도 보장된다.

이를 각 case에 대입해보자.

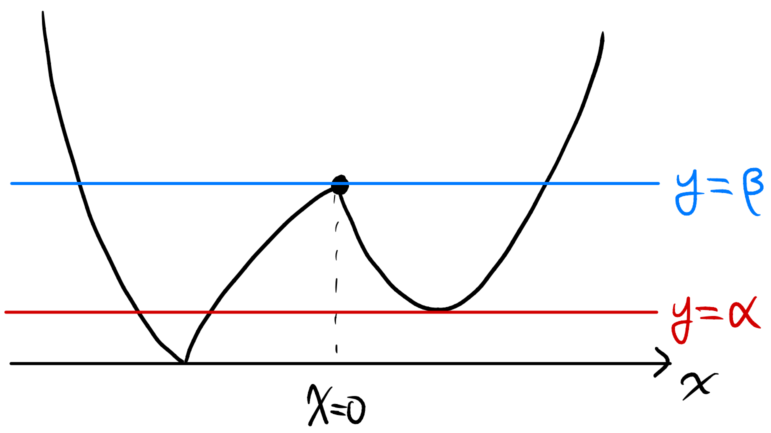
①



$y=\beta_2$: $\lim_{t\to\beta_2-} g(t) - \lim_{t\to\beta_2+} g(t) + 1 = 3-2+1 = 2$ 에서 $g(\beta_2) = 3$ 이므로 둘은 같지 않다. $\therefore$ 모순

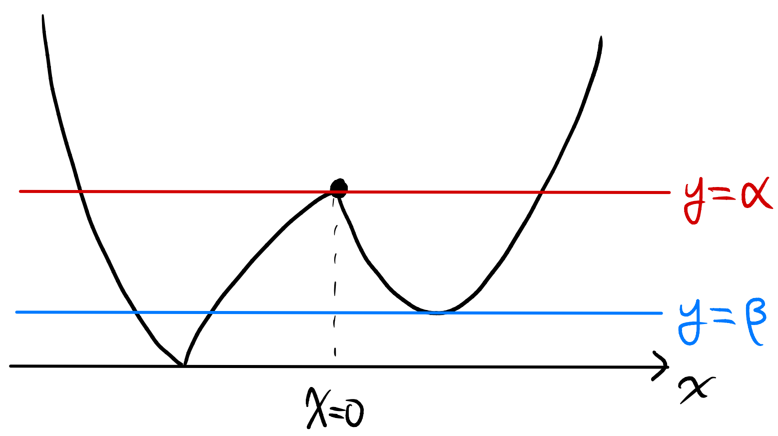
$y=\beta_1$: $\lim_{t\to\beta_1-} g(t) - \lim_{t\to\beta_1+} g(t) + 1 = 4-3+1 = 2$ 에서 $g(\beta_1) = 3$ 이므로 둘은 같지 않다. $\therefore$ 모순

②



$\Rightarrow$ 마찬가지로 $4-2+1 = g(\beta) = 3$ 이므로 성립 … 하는 줄 알았으나 $g(\alpha) = g(\beta) = 3$ 이므로 조건 (다)에 위배. $\therefore$ 모순

③



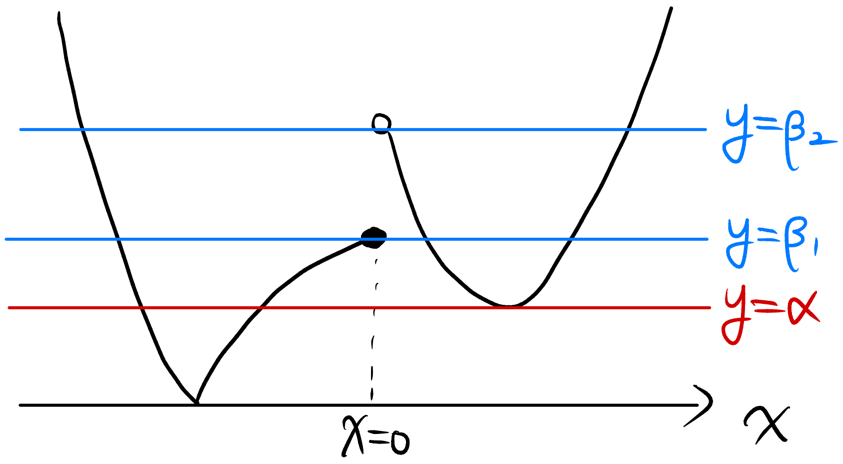
$\Rightarrow$ 마찬가지로 $2-4+1 \neq g(\beta) = 3$ 이므로 모순

다음 page

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

30번 이어서 ... ④

④

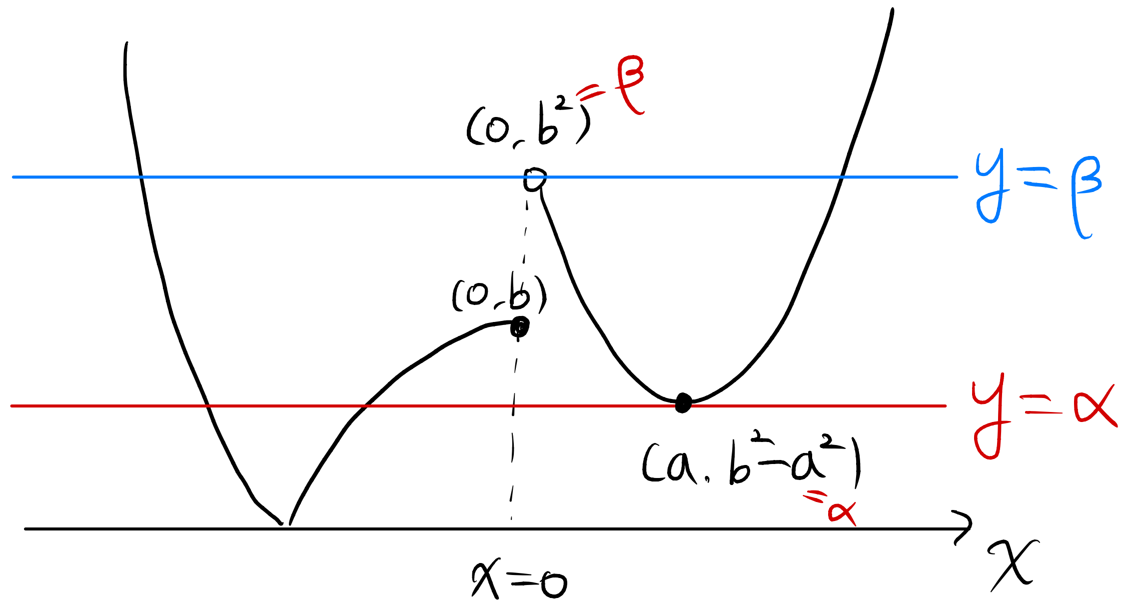


⇒ 마찬가지로

$$\begin{cases} 3-2+1 = g(\beta_2) = 2 \text{ 이므로 성립} \\ 4-3+1 \neq g(\beta_1) = 4 \text{ 이므로 모순} \end{cases}$$

($g(\alpha)=3$, $g(\beta)=2$에서 $g(\alpha)\neq g(\beta)$도 만족)

곧 조건들을 통해 최종적으로 개형이 하나로 결정된다.



이 때, $f(\frac{1}{2})=\alpha$에서 $\frac{1}{2}>0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$임을 알 수 있고, 곧 $b^2-a^2=b^2-\frac{1}{4}=\alpha$ 임을 얻는다.

여기에 $b^2=\beta$임을 알고 있으므로 $\alpha+24\beta=30$에 대입하면

$$\left(b^2-\frac{1}{4}\right)+24b^2=30 \rightarrow b^2=\frac{121}{100} \text{ 이므로 } b=\frac{11}{10} \quad (\because b>0)$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} \left|-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{10}\right| & (x\le 0) \\ x^2-x+\frac{121}{100} & (x>0) \end{cases}$$

이므로 ㉠ $f(-2)+f(1)=\frac{9}{10}+\frac{121}{100}=\frac{211}{100}$

$\Rightarrow p+q=\boxed{311}$