2024학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열 (수학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제 1] 좌표평면에서 오른쪽(x축 양의 방향) 또는 위쪽(y축 양의 방향)으로만 움직이며 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수로만 이루어진 점에서만 방향 전환을 하는 로봇이 있다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 로봇이 원점에서 오른쪽으로 출발하여 점 $(21, 21)$까지 움직일 때, 방향 전환을 정확히 5번 거쳐 갈 수 있는 경로의 수를 구하시오. 단, 원점에서는 방향 전환이 일어나지 않는다고 가정한다. **[5점]** (답 : $190^2 = 36100$)

sol) 오른쪽으로 이동하는 것을 R, 위쪽으로 이동하는 것을 U로 쓰자. 원점에서 오른쪽으로 출발하고 방향 전환을 정확히 5번 하므로 가능한 경로는

$$(RR \cdots R)(UU \cdots U)(RR \cdots R)(UU \cdots U)(RR \cdots R)(UU \cdots U)$$

의 형태이다. 이때 각 그룹에는 적어도 하나의 R 또는 U가 있어야 하고, R과 U의 총합은 각각 21개이므로 답은

$$\left({}_3\mathrm{H}_{21-3}\right)^2 = \left({}_{20}\mathrm{C}_2\right)^2 = 190^2 = 36100$$

이다. ■

[문제 1-2] 원점을 중심으로 하고 반지름이 58인 원 모양 테두리를 설정하자. 로봇은 원점을 출발하여 테두리에 닿으면 멈춘다. 로봇이 멈출 때까지 움직인 거리의 최댓값을 구하시오. 단, 로봇은 한 점으로 간주한다. **[10점]** (답 : $41 + 3\sqrt{187}$)

sol) 로봇이 위치할 수 있는 격자점 (a, b)를 생각하자. 이때 a, b는 각각 음이 아닌 정수이다. 로봇이 테두리에 닿아 멈추기 직전의 격자점에 있는 상태를 “직전 상태”라 정의하자. 직전 상태에 도달한 후 로봇이 테두리에 닿아 멈출 때까지 추가적으로 이동할 수 있는 거리는 길어야 1이다. 또한 직전 상태에 이르기까지 로봇의 경로의 길이는 음이 아닌 정수이므로 직전 상태에 이르기까지의 경로의 길이가 최대가 될 때 전체 경로의 길이도 최대가 된다. (직전 상태에 이르기까지의 경로의 길이가 최대가 아니라면 이 경로는 최대 길이 경로보다 적어도 1 작고, 이는 테두리까지 이동하는 경로로 메꿀 수 있는 차이가 아니기 때문이다.) 따라서 $k = a + b$로 놓고 k의 최댓값을 구해보자.

점 (a, b)가 직전 상태에 있을 때 이 점은 원 $x^2+y^2<58^2$의 내부에 있으므로 $a^2+b^2<58^2$이고, $a^2+b^2=k^2-2ab$이므로 $k^2<58^2+2ab$이다. 한편 a, b는 음이 아닌 정수이므로 산술기하평균 부등식에 의해 $2ab \le \dfrac{(a+b)^2}{2}=\dfrac{k^2}{2}$이고, $\dfrac{k^2}{2}<58^2$에서 $k \le 82$이다.

따라서 산술기하평균 부등식의 등호성립조건에 의해 $a=b=41$일 때 등호가 성립하고, 점 $(41, 41)$에 도달한 직전 상태가 최대 길이 이동 경로가 된다. 또한 $x^2+y^2=58^2$은 점 $(\sqrt{1683}, 41)$을 지나므로 점 $(41, 41)$의 직전 상태에서 원의 테두리까지 이동하는 추가 경로의 길이는 $\sqrt{1683}-41=3\sqrt{187}-41$이다.

따라서 전체 경로의 길이는 $82+(3\sqrt{187}-41)=41+3\sqrt{187}$이다. ■

[문제 2] 자연수 n과 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$에 대하여 $a_n=n!$이고, b_n과 c_n은 모두 자연수이다. 1보다 큰 자연수 n에 대하여 다음 세 조건이 성립한다.

(가) b_n의 모든 소인수는 n 이하이다.
(나) $\log_2 n^3 \le c_n \le \log_2 n^4$
(다) b_n은 $a_n^{c_n}$의 약수가 아니다.

다음 수열의 수렴 및 발산을 판정하고, 수렴하는 경우 수렴값을 구하시오.

[문제 2-1] $\left\{\dfrac{1}{n}\ln a_{2n}-\dfrac{1}{n}\ln a_n-\ln(2n)\right\}$ **[5점]** (답 : $\ln 2-1$로 수렴)

sol) 문제의 수열을 $\{d_n\}$이라 하자. $a_n=n!$이므로

$$\frac{1}{n}\ln a_{2n}-\frac{1}{n}\ln a_n-\ln(2n)=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{a_{2n}}{a_n}\right)-\frac{1}{n}\ln(2n)^n=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{(2n)^n n!}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n\times(2n-1)\times\ \cdots\ \times(n+1)}{2n\times 2n\times\ \cdots\ \times 2n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{2n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}\right)$$

이다. 따라서 정적분의 정의에 의해

$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}\right)=\int_0^1\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x)dx - \ln 2 = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 - \ln 2 = \ln 2 - 1$$

이다. ■

[문제 2-2] $\left\{\dfrac{b_n}{n^2}\right\}$ **[10점]** (답 : 양의 무한대로 발산)

sol) b_n의 소인수 p_i에 대하여 (가) 조건에 의해 $p_i \le n$이므로 모든 p_i는 $n!$의 약수이다. 이때 $n!$이 가지는 p_i의 개수를 α_i라 하자. (단, $1 \le i \le m$) 즉, $p_i^{\alpha_i}$는 $n!$의 약수이지만 $p_i^{\alpha_i+1}$은 $n!$의 약수가 아니다. $a_n^{c_n} = (n!)^{c_n}$은 각각 적어도 $\alpha_i c_n$개의 p_i를 인수로 가진다.

만약 모든 p_i에 대하여 b_n이 각각 $\alpha_i c_n$개 이하의 p_i를 소인수로 가진다면 b_n은 $a_n^{c_n} = (n!)^{c_n}$의 약수가 되고, 이는 조건 (다)에 모순이다. 따라서 적당한 자연수 k가 존재하여 b_n은 $\alpha_k c_n + 1$개 이상의 p_k를 가진다. 편의상 $p_k = q$로 놓자. b_n은 $q^{\alpha_k c_n + 1}$의 배수이므로 $b_n \ge q^{\alpha_k c_n + 1}$이고, 소수인 q는 2 이상이므로 $b_n \ge q^{\alpha_k c_n + 1} \ge 2^{\alpha_k c_n + 1}$이 성립한다.

한편 조건 (나)에 의해 $2^{c_n} \ge n^3$이므로

$$b_n \ge q^{\alpha_k c_n + 1} \ge 2^{\alpha_k c_n + 1} = 2 \times (2^{c_n})^{\alpha_k} \ge 2 \times (n^3)^{\alpha_k}$$

이고, b_n은 적어도 하나의 q를 소인수로 가지므로 $a_k \ge 0$이다. 따라서

$$b_n \ge 2n^3, \quad \frac{b_n}{n^2} \ge 2n$$

이고 $\lim_{n \to \infty}(2n) = \infty$이므로 수열 $\left\{\dfrac{b_n}{n^2}\right\}$도 양의 무한대로 발산한다. ■

[문제 3] -20부터 20까지의 정수 중 0을 제외한 정수 40개가 주어져 있고, 이들을 두 개씩 묶어 20개의 순서쌍을 만든다. 20쌍 중 임의의 순서쌍에 대하여 두 정수의 합을 확률변수 X로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] $E(X)$의 값을 구하고, 이 값이 순서쌍의 결정 방법과 관계 없이 일정함을 설명하시오. **[5점]** (답 : $E(X) = 0$)

sol) 20쌍 중 한 순서쌍 (x, y)를 선택할 확률은 $\dfrac{1}{20}$로 일정하고, 이때 확률변수 X의 값은

$x+y$이다. 즉, 각각의 확률변수 X의 값을 x_i라 하면

$$E(X)=\sum_i x_i p_i=\frac{1}{20}\sum_i x_i$$

이고 각각의 x_i는 집합 $S=\{-20,\ -19,\ \cdots,\ -1,1,2,\ \cdots,20\}$의 임의의 두 원소의 합이므로 x_i의 총합은 집합 S의 원소의 총합과 같다. 이때 집합 S의 원소의 총합은 대칭성에 의해 0이므로 $E(X)=0$이고, 순서쌍의 결정 방법과 관계 없이 x_i들의 총합은 0으로 일정하므로 $E(X)$는 순서쌍의 결정 방법과 관계 없이 일정하다. (순서쌍의 결정 방법은 집합 S의 원소들을 더하는 순서를 바꿀 뿐이다.) ■

[문제 3-2] $V(X)$의 값이 최대가 되도록 하는 순서쌍의 결정 방법을 설명하고, 이때의 $V(X)$의 값을 구하시오. **[10점]** (답 : 573)

sol) $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)$이다. 우선 20쌍이 다음과 같이 결정되어 있다고 가정하자.

$$(l_1,r_1),\ (l_2,r_2),\ \cdots,\ (l_{10},r_{10})$$

이때 $1\le i\le 10$에 대하여 l_i와 r_i들의 집합은 집합 S와 동일하다. $1\le i\le 10$에 대하여 확률변수 X가 가지는 값 x_i는 l_i+r_i와 같고, 각각의 순서쌍을 선택할 확률은 $\dfrac{1}{20}$로 동일하므로

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i=\frac{1}{20}\sum_i (l_i+r_i)^2$$

이다. 한편 $\sum\limits_i (l_i+r_i)^2$에서 제곱된 항들만 추출하면 $l_1^2, l_2^2,\ \cdots, l_{10}^2$과 $r_1^2, r_2^2,\ \cdots, r_{10}^2$이 각각 한 번씩 모두 등장하므로 이들의 합은 집합 S의 모든 원소의 제곱의 합과 같고, 일정하다.

나머지 항인 $2\sum\limits_i l_i r_i$의 값이 최대가 되기 위해서는 l_i와 r_i의 부호가 같아야 하고, 더 나아가 $20\times 19+18\times 17+16\times 15+\cdots$ 와 같이 큰 수는 큰 수끼리, 작은 수는 작은 수끼리 곱할 때 최대가 된다는 것을 유추해볼 수 있다.

다만 직관적인 접근만 설명한 후 답을 적으면 감점될 여지가 있으며, 위 상황이 최대가 된다는 것을 엄밀하게 증명해야할 것으로 생각된다. 숫자가 음수인 경우 양수인 경우와 완벽하게 똑같은 상황이므로 1부터 20까지의 수 20개에 대해서만 증명해보자. $1\le n\le 10$에 대하여 $a_n=n,\ b_n=n+10$이라 놓자.

$$S_1=1\times 2+3\times 4+\cdots+19\times 20=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

이라 하자. $1 \le r < s \le 10$인 자연수 r, s에 대하여 S_1에서 $a_r b_r + a_s b_s$를 $a_r b_s + a_s b_r$로 바꾼 합을 S_2라 하자. 이때 $S_1 - S_2 = a_r(b_r - b_s) - a_s(b_r - b_s) = (a_r - a_s)(b_r - b_s) > 0$이므로 S_1의 합 중 임의의 두 항을 바꿀 경우 합이 작아진다. 따라서 S_1의 경우가 최댓값이라고 할 수 있다. 이는 재배열 부등식으로 잘 알려져 있는 절대 부등식이며, 그리디(욕심쟁이) 알고리즘과도 관련이 있다.

따라서 $V(X)$는

$$V(X) = 2 \times \frac{1}{20}\left[(1+2)^2 + (3+4)^2 + \cdots + (19+20)^2\right] = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(4k-1)^2 = 573$$

이다. ■

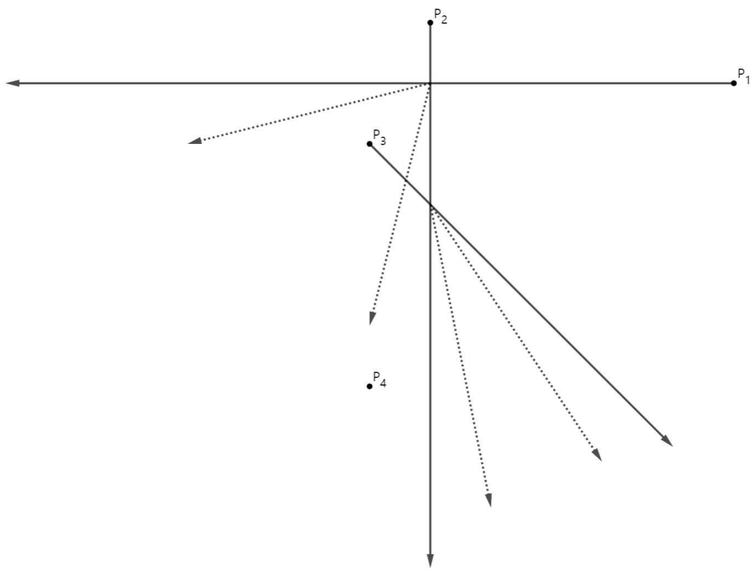
[문제 4] 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{P}_1(6, 4), \mathrm{P}_2(1, 5), \mathrm{P}_3(0, 3), \mathrm{P}_4(0, -1)$과 네 벡터 $\overrightarrow{v_1} = (-1, 0), \overrightarrow{v_2} = (0, -1), \overrightarrow{v_3} = (1, -1), \overrightarrow{v_4} = (1, 1)$이 주어져 있다. 이때

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_i} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_i} + t\overrightarrow{v_i} \ (i = 1, 2, 3, 4, \ t \geq 0)$$

를 만족시키는 점 Q_i가 그리는 자취를 반직선 l_i라 정의하자. 또한, 다음 두 조건에 따라 새로운 반직선을 생성해나간다.

(가) 반직선 l_i와 l_j의 교점을 P라 할 때, 양의 실수 a에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t(a\overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{v_j})$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t(\overrightarrow{v_i} + a\overrightarrow{v_j})$를 만족하는 점 R, S가 그리는 자취에 해당하는 반직선을 새로 그린다.

(나) 새로 생성된 반직선들에 대해서도 (가)의 조건을 그대로 적용한다.



위 그림은 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ 및 새로 생성된 반직선 몇 개를 그린 것이다.
다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 두 반직선 l_1, l_2가 주어져 있을 때, 새로 생성된 반직선들이 점 $\mathrm{A}(2, 2)$를 지나도록 하는 양의 실수 a가 존재하는지 판단하시오. 존재하는 경우 a의 값을 구하고, 존재하지 않는 경우 그 이유를 서술하시오. **[5점]** (답 : 존재하지 않음)

sol) 반직선 l_1 위의 점은 양의 실수 t_1에 대하여 $(6, 4) + t_1(-1, 0) = (6 - t_1, 4)$로 표현되고, 반직선 l_2 위의 점은 양의 실수 t_2에 대하여 $(1, 5) + t_2(0, -1) = (1, 5 - t_2)$로 표현되므로 이들의 교점은 $t_1 = 5, \ t_2 = 1$일 때 점 $(1, 4)$임을 알 수 있다.

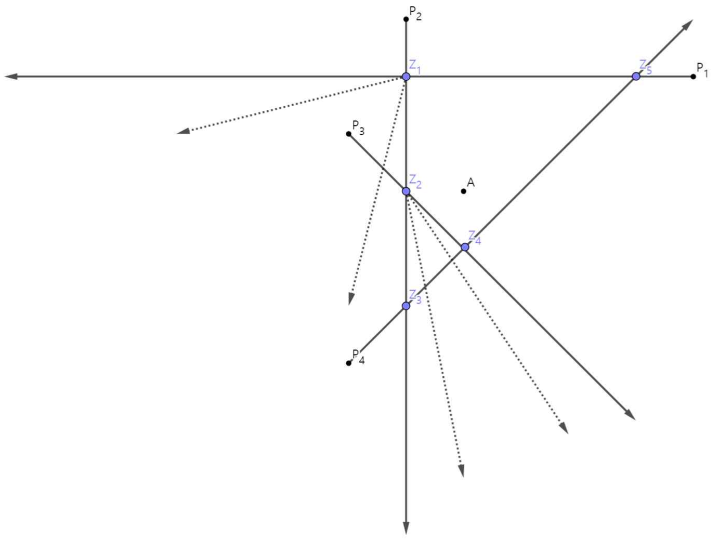
$a\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(-a,\ -1)$, $\overrightarrow{v_1}+a\overrightarrow{v_2}=(-1,\ -a)$이므로 (가) 조건에 의해 그려진 새로운 반직선 위에 있는 점들은 양의 실수 s_1, s_2에 대하여 각각 다음과 같이 표현된다.

$$(1,4)+s_1(-a,\ -1)=(1-as_1,\ 4-s_1),\quad (1,4)+s_2(-1,\ -a)=(1-s_2,\ 4-as_2)$$

이때 이들 반직선 위에 점 $\mathrm{A}(2,2)$가 있기 위해서는 각각 $s_1=2$, $s_2=-1$이어야 하고, s_2는 양의 실수이므로 후자는 불가능하다. 또한, 전자의 경우 $1-2a=2$에서 $a=-\dfrac{1}{2}$이므로 a가 양의 실수임에 모순이다. 따라서 이러한 양의 실수 a는 존재하지 않는다. ■

[문제 4-2] 네 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4가 주어져 있을 때, 새로 생성된 반직선들이 점 $\mathrm{A}(2,2)$를 지나도록 하는 양의 실수 a가 존재하는지 판단하시오. 존재하는 경우 a의 값을 구하고, 존재하지 않는 경우 그 이유를 서술하시오. **[10점]** (답 : 존재하지 않음)

sol) 아래 그림에서 사각형 $\mathrm{Z_1Z_2Z_4Z_5}$의 내부를 영역 S라 하자.



반직선 l_1, l_2, l_3, l_4와 새로 생성된 반직선을 모두 포함하여 점 T에서 서로 만나는 임의의 두 반직선 l_i, l_j가 주어져 있을 때, (가)에 의해 생성되는 새로운 반직선들은 점 T에서 시작하는 반직선 l_i, l_j의 일부로 둘러싸인 영역만을 지날 수 있다. 따라서, 이러한 영역과 S의 교집합이 공집합임이 주어져 있다면 새롭게 생성되는 반직선들은 절대로 S의 내부를 지날 수 없고, 따라서 점 A도 지날 수 없다.

서로 만나는 두 반직선에 대하여 두 반직선의 교점에서 시작하는 각각의 반직선의 일부로 막힌 영역을 $f(l_i, l_j)$라 하자. (더 엄밀히 정의하면, 반직선 l_i의 방향벡터를 $\overrightarrow{l_i}$라 쓸 때, 두 반직선의 교점에서 시작하는 각각의 반직선의 일부로 구분되는 영역 중 $\overrightarrow{l_i}+\overrightarrow{l_j}$의 끝점을 포함하는 영역을 $f(l_i, l_j)$라 하자.)

한편, 점 Z_i $(1 \le i \le 5)$에서 시작하는 모든 반직선 l_i, l_j에 대하여 각각의 $f(l_i, l_j)$는 모두 S와의 교집합이 공집합이다. **[문제 4-1]**에서 $f(l_1, l_2)$와 S의 교집합이 공집합임을 수식적으로 보였으며, 나머지 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4의 가능한 모든 조합에 대해서도 동일한 논리가 성립한다는 것을 알 수 있다. 또는 그림으로도 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \ne j$에 대하여
$f(l_i, l_j) \cap S = \varnothing$임을 확인할 수 있다.

따라서 앞선 논리에 의해 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4에 의해 생성되는 모든 반직선들은 $f(l_i, l_j)$의 영역만 지날 수 있고, $f(l_i, l_j) \cap S = \varnothing$이므로 귀납적으로 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4에 의해 생성되는 모든 반직선들은 S를 통과할 수 없다는 것을 알 수 있다. 따라서 이러한 양의 실수 a는 존재하지 않는다. ■

복기자 : sukita1729@gmail.com