함수 극한~평균값 정리

고고

2009학년도 6월모평 가형 4번

1. 다항함수 $g(x)$에 대하여
극한값 $\lim_{x \to 1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값은?

2010학년도 6월모평 가형 19번

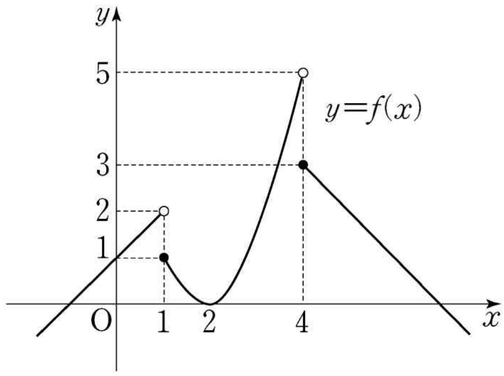
2. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0+}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\ \lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (3점)

2011학년도 6월모평 가형 7번

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은? (3점)

2012학년도 6월모평 나형 18번

4. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=\left|x^2-1\right|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1-} f(t)$의 값은? (4점)

2020학년도 6월모평 나형 20번

9. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

2020학년도 수능 나형 14번

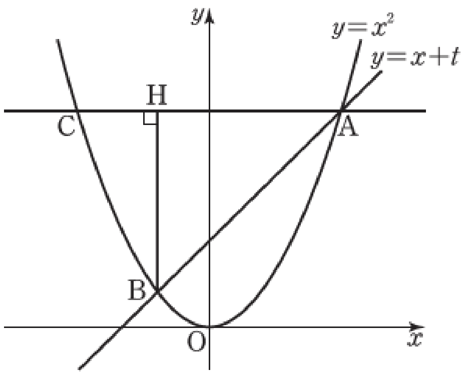
10. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은?

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

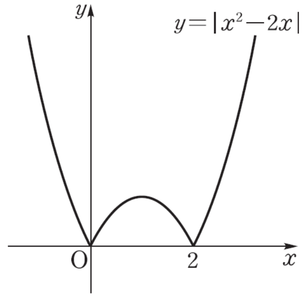
2023학년도 9월모평 12번

16. 실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{AH}} - \overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) (4점)



2016학년도 6월모평 A형 29번

21. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. (4점)



2017학년도 수능 나형 14번

23. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases},\ g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? (4점)

2018학년도 9월모평 나형 17번

24. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) - \lim\limits_{x \to 0+} g(x)=6$일 때, $f(0)$의 값은? (4점)

고고

2022년 10월학평 11번

31. 두 정수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 4$에서 $f(x) = ax^2 + bx - 24$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이다.

$1 < x < 10$일 때, 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$의 값은? (4점)

2023학년도 6월모평 6번

32. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (3점)

2015학년도 9월모평 A형 21번

39. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? (4점)

(가) $f(0)=-3$ (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

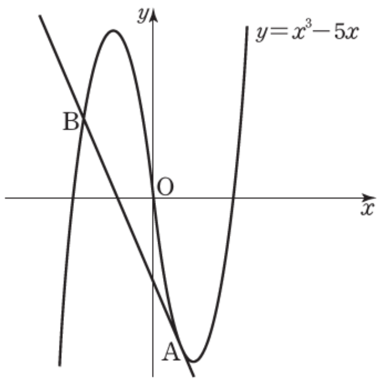
2011년 3월학평 가형 18번

48. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?
(단, P, Q는 서로 다른 점이다.)

[보기] ㄱ. 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다. ㄴ. $m>-1$ ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m이 존재한다.

2013학년도 6월모평 나형 17번

49. 곡선 $y = x^3 - 5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는? (4점)



2022학년도 수능 10번

53. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y = xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? (4점)

1. 2009학년도 6월모평 가형 4번

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$의 극한값이 존재하고 $x\to1$ 일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 하고, $g(x)$는 다항함수이므로 연속이다.

그러므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)-2x\}=g(1)-2=0$

$\therefore\ g(1)=2$ -------㉠

$f(x)+x-1=(x-1)g(x)$에서

$f(x)=(x-1)\{g(x)-1\}$ ---㉡

따라서 ㉠과 ㉡에 의해

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1}$$

$$=\frac{\{g(1)-1\}g(1)}{2}$$

$$=\frac{(2-1)\cdot2}{2}=1$$

2. 2010학년도 6월모평 가형 19번

$\lim_{x\to+0}\frac{x^3f(\frac{1}{x})-1}{x^3+x}$ 에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면

$x\to+0$일 때 $t\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3f(\frac{1}{x})-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

따라서 $f(t)=t^3+5t^2+at+b$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$ 에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}f(x)=1+5+a+b=0$

$\therefore\ a+b=-6\cdots$㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2+ax+b}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}$$

$$=\frac{a+13}{3}=\frac{1}{3}$$

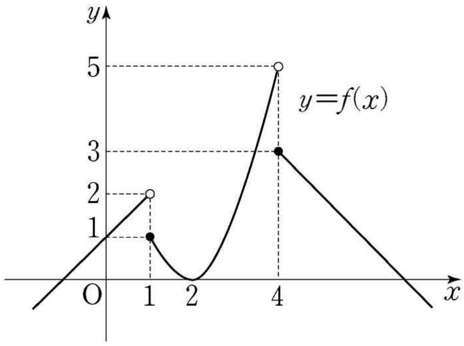
$\therefore\ a=-12$

따라서 ㉠에서 $b=6$이므로

$f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore\ f(2)=10$

3. 2011학년도 6월모평 가형 7번



$\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\dfrac{t-1}{t+1}$로 놓으면

$s=1+\dfrac{-2}{t+1}$ 이므로 $t\to\infty$일 때, $s\to 1-0$

$\therefore \lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right) = \lim\limits_{s\to 1-0} f(s)=2$ ----㉠

또, $\lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\dfrac{4t-1}{t+1}$로 놓으면

$s=4+\dfrac{-5}{t+1}$ 이므로 $t\to-\infty$일 때, $s\to 4+0$

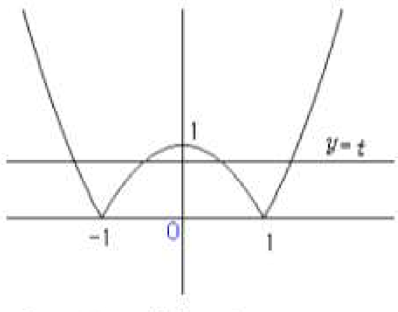
$\lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)$ ---㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)+\lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

4. 2012학년도 6월모평 나형 18번

그림과 같이 $t\to1-0$일 때 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 네 점에서 만난다.



$\therefore \lim\limits_{t\to1-0} f(t)=4$

9. 2020학년도 6월모평 나형 20번

(i) $n=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$를 만족시키려면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)의 꼴이어야 한다.

이때 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(4x^2+3x+a)=a$ 이므로 a=4

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(ii) $n=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=4$를 만족시키려면

$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수)의 꼴이어야 한다.

이때 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}(10x+b)=b$이므로 b=4

즉, $f(x)=10x^3+4x^2$이므로 $f(1)=10+4=14$

(iii) $n\geq3$ 일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=4$를 만족시키려면

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수)의 꼴이어야 한다.

이때 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}(6x+c)=c$이므로 c=4

즉,$f(x)=6x^{n+1}+4x^n$ 이므로 $f(1)=6+4=10$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14

10. 2020학년도 수능 나형 14번

조건 (가), (나)에 의하여

$f(x)g(x)=x^2(2x+a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는

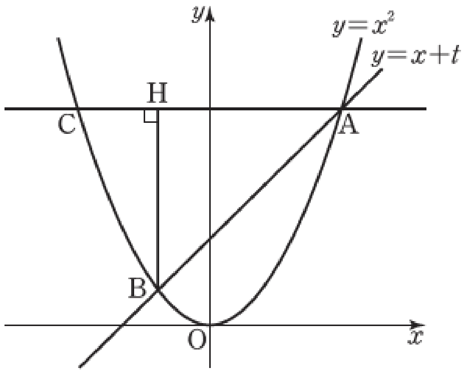
$f(x)=2x^2$

이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=8$

고고

16. 2023학년도 9월모평 12번



두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(a,\ a^2)$, $B(b,\ b^2)$

이라 하면 x에 대한 이차방정식

$x^2-x-t=0$

의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{AH}&=a-b\\&=\sqrt{(a-b)^2}\\&=\sqrt{(a+b)^2-4ab}\\&=\sqrt{1+4t}\end{aligned}$$

또, 점 C의 좌표가 $C(-a,\ a^2)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{CH}&=b-(-a)\\&=b+a=1\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

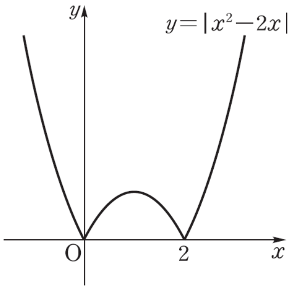
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1+4t)-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

21. 2016학년도 6월모평 A형 29번



$y=|x^2-2x|$에서 $x=1$일 때 $y=1$이므로
함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 2 & (t>1) \end{cases}$$

이때, 함수 $f(t)$는 $t \neq 0$, $t \neq 1$인 실수 t에서 연속이고 함수 $g(t)$는 이차함수이므로 모든 실수 t에서 연속이다.
그러므로 함수 $f(t)g(t)$는 연속함수의 성질에 의해 $t \neq 0$, $t \neq 1$인 모든 실수 t에서 연속이다.
따라서, 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속이기 위해서는 $t=0$, $t=1$에서도 연속이어야 한다.

함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$, $t=1$에서 연속일 조건을 각각 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $t=0$일 때,

$$\lim_{t\to-0} f(t)g(t)=\lim_{t\to-0} f(t)\times\lim_{t\to-0} g(t)$$
$$=0\times g(0)=0$$
$$\lim_{t\to+0} f(t)g(t)=\lim_{t\to+0} f(t)\times\lim_{t\to+0} g(t)$$
$$=4\times g(0)=4g(0)$$
$$f(0)g(0)=2g(0)$$

위의 세 값이 같아야 하므로 $g(0)=0$

(ⅱ) $t=1$일 때,

$$\lim_{t\to1-0} f(t)g(t)=\lim_{t\to1-0} f(t)\times\lim_{t\to1-0} g(t)$$
$$=4\times g(1)=4g(1)$$
$$\lim_{t\to1+0} f(t)g(t)=\lim_{t\to1+0} f(t)\times\lim_{t\to1+0} g(t)$$
$$=2\times g(1)=2g(1)$$
$$f(1)g(1)=3g(1)$$

위의 세 값이 같아야 하므로 $g(1)=0$
따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 $g(0)=0$, $g(1)=0$이고 $g(t)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$g(t)=t(t-1)$
$\therefore$ $f(3)+g(3)=2+6=8$

23. 2017학년도 수능 나형 14번

$x<2$일 때,
$f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$
$x \geq 2$일 때
$f(x)=1>0$
이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.
그런데, $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다.
즉,

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$
$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{ax+1}{1}=2a+1$$
$$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$$

에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$이므로
$2a+1=4a+2$, $2a=-1$
따라서, $a=-\dfrac{1}{2}$이다.

24. 2018학년도 9월모평 나형 17번

$x<0$일 때, $g(x)=-f(x)+x^2+4$
$x>0$일 때, $g(x)=f(x)-x^2-2x-8$
한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=f(0)$이다. 이때,

$$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-}\{-f(x)+x^2+4\}=-f(0)+4$$
$$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)-x^2-2x-8\}=f(0)-8$$

이므로 $\lim_{x\to0-} g(x)-\lim_{x\to0+} g(x)=6$ 에서
$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$
따라서 $f(0)=3$

31. 2022년 10월학평 11번

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
조건 (가)와 (나)에서
$f(4)=\lim_{x\to 4-} f(x)=16a+4b-24$이고
$f(0)=f(4)$이므로 $-24=16a+4b-24$에서
$b=-4a$ …… ㉠
$0\le x<4$에서 $f(x)=a(x-2)^2-4a-24$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로
$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을
갖지 않으면 $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.
$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 1개 가지면 $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로
$f(1)f(2)=(-3a-24)(-4a-24)$
$=12(a+8)(a+6)<0$
$-8<a<-6$이고 a는 정수이므로 $a=-7$
㉠에 의하여 $b=28$
따라서 $a+b=-7+28=21$

32. 2023학년도 6월모평 6번

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|x+a|$
$=|-1+a|$,

$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|x|=1$,

$|f(-1)|=|-1|=1$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|f(x)|=|f(3)|$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3-}|x|=3$,

$\lim_{x\to 3+}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|bx-2|$
$=|3b-2|$,

$|f(3)|=|3b-2|$
이므로
$|3b-2|=3$

$b>0$이므로 $b=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

39. 2015학년도 9월모평 A형 21번

조건 (나)에 $x=1$을 대입하면

$0 \le f(1) \le 0$

$\therefore\ f(1)=0 \cdots ㉠$

또한, 조건 (나)에서 $x \ne 1$일 때, 즉

(i) $x>1$

$\frac{6x-6}{x-1} \le \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \le \frac{2x^3-2}{x-1}$

그런데,

$\lim_{x\to 1+0} \frac{6x-6}{x-1}=6$,

$\lim_{x\to 1+0} \frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1} 2(x^2+x+1)=6$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$

$x<1$일 때도 같은 방법으로 생각하면

$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$

$\therefore\ \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6 \cdots ㉡$

따라서, 다항함수 $f(x)$가 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 삼차이하의 다항함수이어야 한다.

(i) $f(x)$가 일차함수인 경우

최고차항의 계수가 1이면서 ㉡을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 일차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)=x^2+ax-3$ ($\because$ (가))라 하면 ㉠에서

$f(1)=a-2=0 \quad \therefore\ a=2$

그런데, $f'(x)=2x+2$ 이므로 ㉡을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수인 경우

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ ($\because$ (가))라 하면

㉠에서

$f(1)=a+b-2=0 \quad \therefore\ a+b=2 \cdots ㉣$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$라 하면 ㉡에서

$f'(1)=2a+b+3=6 \quad \therefore\ 2a+b=3 \cdots ㉤$

㉣, ㉤에서 $a=1,\ b=1$ 이므로

$f(x)=x^3+x^2+x-3$

$\therefore\ f(3)=3^3+3^2+3-3=36$

48. 2011년 3월학평 가형 18번

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^3-3\beta^2+2\beta)$라 하면

ㄱ. $y'=3x^2-6x+2$이므로 기울기가 m인 접선의 두 접점의 x좌표는 $3x^2-6x+2-m=0$을 만족하므로 $\alpha+\beta=2$이다. (참)

ㄴ. 기울기가 m인 접선의 두 접점이 존재하므로 α, β는 서로 다른 실수이다.

$3x^2-6x+2-m=0$ 이 서로 다른 실근을 가지므로

$3^2-3(2-m)>0$

$\therefore\ m>-1$ (참)

ㄷ. 두 접선은 평행하므로 두 접선 사이의 거리가 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 되기 위해서는 두 접점 P, Q를 지나는 직선과 접선이 수직이어야 한다. 즉, 기울기의 곱은 -1이다.

$m\times\frac{(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)-(\beta^3-3\beta^2+2\beta)}{\alpha-\beta}=-1$

$m\{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

$m\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

그런데, α, β는 $3x^2-6x+2-m=0$ 의 두 근이므로

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{2-m}{3}$

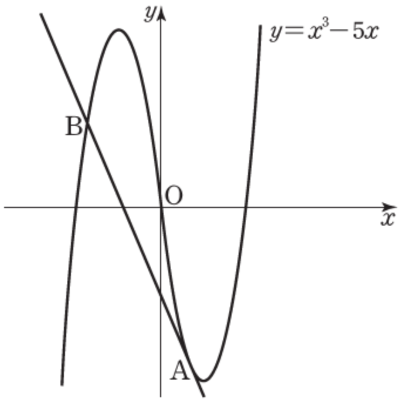
$\therefore\ m\left(\frac{2-m}{3}\right)=1$

$\therefore\ m^2-2m+3=0$

판별식 $\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$이므로 실수 m이 존재하지 않는다.

따라서 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m은 존재하지 않는다. (거짓)

49. 2013학년도 6월모평 나형 17번



$f(x)=x^3-5x$ 라 하면

$f'(x)=3x^2-5$

이므로 점 $\mathrm{A}(1,-4)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-5=-2$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x-2$

이 때, 접선과 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$x^3-5x=-2x-2$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 $\mathrm{B}(-2,2)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(2+4)^2}$

$=\sqrt{9+36}$

$=3\sqrt{5}$

53. 2022학년도 수능 10번

점 $(0,0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

이때, 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)(x-0)+0$

$y=f'(0)x$ …… ㉡

또, 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,2)$가 있으므로

$1\times f(1)=2$

$f(1)=2$ …… ㉢

$y=xf(x)$에서

$y'=f(x)+xf'(x)$이므로

$(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉣

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

㉠에서

$d=0$

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로

㉢에서

$a+b+c=2$ …… ㉤

㉡과 ㉣에서

두 접선이 일치해야 하므로

$f'(0)=f'(1)+2,\ f'(1)=0$

따라서 $f'(0)=2,\ f'(1)=0$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=2$에서

$c=2$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로

$f'(1)=0$에서

$3a+2b+2=0$

㉤에서 $c=2$를 대입하면

$a+b=0$이므로

$b=-a$를 위 식에 대입하여 a,b를 구하면 $a=-2,\ b=2$이므로

$f(x)=-2x^3+2x^2+2x,$

$f'(x)=-6x^2+4x+2$

따라서

$f'(2)=-14$

문제별 난이도
-중상에 해당하는 문제들을 무리없이 풀어낸다면 고3 평가원 시험 기준 2등급 이상이라고 보시면 될것 같습니다!

1. 중
2. 중하
3. 중
4. 중
9. 중
10. 중
16. 중상
21. 중상~상
23. 중
24. 중
31. 중상
32. 중하
39. 중
48. 중상
49. 중하
53. 중상

하지만 난이도는 주관적! 대략적! 이므로 너무 신경쓰시지 않아도 됩니다.

고고