1계 미분방정식 (1)

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 미분방정식(Differential Equation)

미분방정식이란, 1개 이상의 독립변수에 대한 도함수가 1개 이상 들어있는 방정식이다. 미분방정식의 해는 함수의 형태로 구해지며, 적분상수를 고려한다면 해가 유일하지 않으므로 미분방정식을 푸는 것은 해당 관계를 만족시키는 함수들의 해집합을 구하는 것과 같다. 가장 간단한 형태의 미분방정식은

$$f'(x) = g(x)$$

이며, 양변을 적분하여 적분상수 C에 대하여 $f(x) = \int g(x)dx + C$를 얻어낼 수 있다. 즉, 모든 부정적분은 미분방정식을 푸는 것이라 볼 수 있으며, 적분의 난해함을 생각하면 일반적인 미분방정식을 푸는 것이 얼마나 어려운지 알 수 있을 것이다.

또한 여러 개의 방정식이 연립된 연립 미분방정식도 존재하며, 다변수함수의 경우 각 독립변수에 대한 편미분이 관여하는 편미분방정식도 존재한다. 예를 들어, 수소 원자의 슈뢰딩거 방정식을 구면좌표계로 표현하면 다음과 같은 편미분방정식을 얻는다.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = E\Psi,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right]\Psi + V(r)\Psi = E\Psi$$

(여기서 Ψ는 r, θ, ϕ에 관한 삼변수함수이다.) 편미분방정식(PDE)이 아닌 미분방정식을 일반적으로 상미분방정식(ODE)라 하며, 미분방정식의 초기조건이 주어지면 반드시 유일한 해를 얻을 수 있다.

다음은 여러 형태의 미분방정식의 예시이다.

$x\dfrac{dy}{dx} + x^2y + 3 = 0$: 1계 상미분방정식

$x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$: 2계 상미분방정식

$\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} + 2y = 0$: 1계 편미분방정식

미분방정식은 동일한 방정식이어도 여러 개의 형태를 가질 수 있다. 가령, 다음의 미분방정식은 모두 동일하며 거의 동일한 해집합을 갖는다. (x, y 등이 분모에 들어가 해집합에서 0이 제외되는 경우 이외에는 해가 동일하다.)

① $x\dfrac{dy}{dx} + 3y^2 = 0$

② $xdy + 3y^2dx = 0$

③ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y^2}{x} = 0$

④ $\dfrac{1}{x}dx + \dfrac{1}{3y^2}dy = 0$

일변수함수에 대한 미분방정식의 경우 일반적으로 종속변수 y를 독립변수 x에 관한 식으로 나타내지만, 이는 관습일 뿐 x를 y에 대한 함수로 나타내야할 수도 있다. 또한 경우에 따라 어느 한 변수에 대해 정리하지 않아도 x, y 사이에 성립한 어떠한 관계 자체를 미분방정식의 해로 인정하기도 한다. 예를 들어, $x = 3y + \cos^7 y - 9$를 변형하여 $y = f(x)$의 형태로 바꾸는 것, $x^2y + \sin^{13}\left(\dfrac{3x-2y}{x^2+y^3}\right) - 3x^y$와 같이 주어진 x, y의 관계를 한 변수에 대해 정리하는 것은 불가능하다. 따라서 미분방정식을 풀 때 반드시 한 변수에 대해 정리해야한다는 고정관념은 가지지 않는 것이 좋다.

Ⅱ. 변수분리형(Separable of Variables)

$Mdx + Ndy = 0$으로 주어진 미분방정식을 생각하자. 여기서 M, N은 각각 x, y에 관한 이변수함수 $M(x, y), N(x, y)$이며 편의상 M, N으로 쓰기로 한다. $Mdx + Ndy = 0$이 실함수 f, g에 대하여

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

의 형태로 변형될 경우, 이를 변수분리형이라고 하며 단순히 양변을 적분하여 해를 얻을 수 있다. 즉, 해는

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

이다. 예를 들어,

$$x\frac{dy}{dx} + 3y^2 = 0$$

으로 주어진 미분방정식을 변형하면

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{3y^2}dy = 0$$

을 얻으므로, 양변을 적분하면

$$\ln|x| - \frac{1}{3y} = C \quad \cdots \quad [1]$$

를 얻는다. 이 시점에서 이미 미분방정식의 해가 구해졌지만, 더 정리를 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x = C \cdot e^{\frac{1}{3y}} \quad \cdots \quad [2]$$

(식 [1]과 [2]의 상수 C가 다르다는 것에 주의한다. C는 상수를 나타내는 기호일 뿐이므로, e^C등과 같이 표기가 복잡하게 바뀌면 이를 C'으로 치환하고 다시 $C' = C$로 치환하여 C로 쓸 수 있다. C는 특정 상수를 지칭하는 것이 아니다.)

변수분리형은 물리학에서도 자주 등장하는 미분방정식이다. 속도 또는 속도의 제곱에 비례하는 공기저항력을 받는 상황, 상대론적 힘을 받아 힘이 속도에 의존하면서 바뀌는 상황과 같이 연속적인 변화량을 다루기 위해서 미분방정식은 필수적이다.

공기저항력이 속도에 비례하는 경우를 살펴보자. 비례상수를 b로 놓고 운동방정식을 쓰면

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = mg - bv$$

이다. 양변에 dt를 곱하면 v, t의 변수가 쉽게 분리되므로, 변수를 분리한 후 양변을 적분하면

$$dt = \frac{m}{mg - bv}dv$$

$$t = \int_0^t dt' = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{mg - bv}dv = \left[-\frac{m}{b}\ln|mg - bv|\right]_{v(0)}^{v(t)} = -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg - bv(t)}{mg - bv(0)}\right)$$

$$e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{mg - bv(t)}{mg - bv(0)}, \quad v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v(0) - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}$$

이므로 시간 t에 따른 속도 v를 알 수 있다. ($v(0)$는 초기속도이다.) 또한 t를 양의 무한

대로 보내면 지수 항이 0으로 수렴하여 속도는 $\frac{mg}{b}$에 가까워지고, 실제로 $v_{\infty} = \frac{mg}{b}$일 때 중력과 공기저항력의 크기가 같아져 물체는 더 이상 가속되지 않고 종단속도에 도달한다.

Ⅲ. 완전 미분방정식(Exact Differential Equation)

완전 미분방정식은 가장 간단하게 풀리는 미분방정식 중 하나이다. 예를 들어,

$$2xydx + (x^2 + 2y)dy = 0$$

이 주어져있을 때 음함수 미분을 고려하여

$$x^2y + y^2 = C$$

가 해임을 쉽게 알 수 있다. $2xy$를 y로 편미분한 것과 $x^2 + 2y$를 x로 편미분한 것은 $2x$이므로 여기에서 이 미분방정식이 완전 미분방정식임을 알 수 있고, 이를 역으로 적분하여 해를 알아낼 수 있다. dx에 곱해진 항은 x로 적분하고, dy에 곱해진 항은 y로 적분하되, 적분변수 이외의 변수는 모두 상수로 취급해야 한다. (이를 편적분이라 한다.)

각각의 적분 결과는 $x^2y + g(y)$, $x^2y + y^2 + f(x)$이므로 이를 모두 고려한 $x^2y + y^2 = C$가 최종 답이 될 것이다. (x에 관한 식은 $f(x)$이지만 이미 x^2y가 있으므로 $f(x) = 0$이고, x^2y를 제외한 y에 관한 식은 y^2 뿐이므로 $g(y) = y^2$으로 놓고 식을 합치면 된다.)

일반적으로,

$$Mdx + Ndy = 0$$

으로 주어진 미분방정식에 대하여 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$이 성립할 때 이 미분방정식을 완전 미분방정식이라 한다.

이러한 풀이가 성립하는 이유는 전미분과 편미분의 교환법칙을 생각해보면 자명하다. 미분방정식의 한 해 f에 대하여 f의 전미분은

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

로 주어지고, 이는 음함수 미분으로도 잘 알려져 있다. 이때 편미분의 교환법칙에 의해

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

이므로 만약 $M = \frac{\partial f}{\partial x}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$이면 자연스럽게 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$이 성립하는 것이다.

따라서 일반성을 잃지 않고 M을 x로 편적분한 후, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$를 이용하여 y로 이루어진 식을 찾아내어 $f = C$의 형태로 답을 쓰면 된다.

Ⅳ. 1계 선형 미분방정식(Linear Differential Equation of Order One)

$Mdx + Ndy = 0$으로 주어진 미분방정식이 다음과 같이 변형될 때 이 미분방정식을 1계 선형 미분방정식이라고 한다.

$$y' + f(x)y = r(x)$$

$y' = \frac{dy}{dx}$를 대입하여 정리하면

$$[f(x)y - r(x)]dx + dy = 0$$

이고, 양변에 x에 대한 함수 $v(x)$를 곱하여 완전 미분방정식을 얻을 것이다. 즉,

$$[v(x)f(x)y - v(x)r(x)]dx + v(x)dy = 0$$

에서 완전 미분방정식의 조건에 의해

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad v(x)f(x) = v'(x)$$

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = f(x), \quad \ln|v(x)| = \int f(x)dx$$

이므로

$$v(x) = e^{\int f(x)dx} = \exp\left(\int f(x)dx\right)$$

를 얻는다. 엄밀하게는 $v(x) = \pm e^{\int f(x)dx}$이지만, 이를 만족시키는 $v(x)$를 한 개만 찾으면 되므로 부호를 $+$로 가정하고 f의 적분상수는 0으로 둘 것이다.

$$M = v(x)f(x)y - v(x)r(x) = v'(x)y - v(x)r(x)$$

에서

$$\int M dx = v(x)y - \int v(x)r(x)dx$$

이고, 이를 y에 대해 편미분했을 때 $v(x)$가 되므로 최종적인 답은

$$v(x)y - \int v(x)r(x)dx = 0$$

이 되어

$$y = \frac{1}{v(x)} \int v(x)r(x)dx$$

이다. (부정적분 기호가 있으므로 우변을 0으로 간주해도 된다.)
또는, $v(x)$를 직접 대입하여

$$e^{\int f(x)dx}[f(x)y - r(x)]dx + e^{\int f(x)dx}dy = 0$$

에서

$$e^{\int f(x)dx}f(x)ydx + e^{\int f(x)dx}dy = e^{\int f(x)dx}r(x)dx$$

이므로 곱미분 형태를 고려하여 바로

$$e^{\int f(x)dx}y = \int e^{\int f(x)dx}r(x)dx$$

를 얻을 수도 있다. ($x' + f(y)x = r(y)$로 주어지는 경우 역시 1계 선형 미분방정식이며, 동일한 방법으로 x를 y에 대한 함수로 구할 수 있다.)

Ⅴ. 베르누이 방정식(Bernoulli's Equation)

$Mdx + Ndy = 0$으로 주어진 미분방정식이 실수 a에 대하여 다음과 같이 변형될 때 이 미분방정식을 베르누이 방정식이라고 한다.

$$y' + f(x)y = r(x)y^a$$

$a = 1$일 때 이는 변수분리형이며 $a = 0$일 때는 1계 선형이므로 베르누이 방정식은 이들을 확장시킨 형태로 볼 수 있다.

$a \neq 0$, $a \neq 1$인 경우를 살펴보자. 양변에 y^{-a}를 곱하면

$$y^{-a}y' + f(x)y^{1-a} = r(x)$$

이고, $Y = y^{1-a}$로 치환하면 $Y' = (1-a)y^{-a}y'$이므로

$$\frac{1}{1-a}Y' + f(x)Y = r(x), \quad Y' + (1-a)f(x)Y = (1-a)r(x)$$

를 얻고 이는 Y에 관한 1계 선형 미분방정식이다. 1계 선형 미분방정식의 풀이로 접근하면

$$v(x) = e^{\int (1-a)f(x)dx}, \quad Y = \frac{1}{v(x)}\int (1-a)v(x)r(x)dx$$

이므로 최종적으로

$$y^{1-a} = \left[\exp\left(\int (1-a)f(x)dx\right)\right]^{-1}\int (1-a)r(x)\exp\left(\int (1-a)f(x)dx\right)dx$$

를 얻는다.

베르누이 방정식은 치환이 이용된 특수한 경우이며, 이외에도 상술한 방법 네 가지가 통하지 않는 경우 치환을 이용한 방법을 생각해보아야 한다. (본문에 수록되지 않은 풀이 네 가지가 더 존재하지만, 물리나 화학 등의 자연과학에서 등장하는 미분방정식의 대부분은 상술한 네 가지 방법만을 이용하여 해결할 수 있다.)

예를 들어, $(x + e^y)dx + e^y dy = 0$으로 주어진 미분방정식은 상술한 방법 네 가지로 풀 수 없다. 하지만 $Y = e^y$의 치환을 적용하면 Y에 관한 1계 선형 미분방정식이 되어 쉽게 풀 수 있게 된다.

Ⅵ. 연습문제

[1 ~ 10] 다음 미분방정식의 해를 구하여라.

1. $dr = b(\cos\theta dr + r\sin\theta d\theta)$

2. $(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$

3. $(2xy - \tan y)dx + (x^2 - x\sec^2 y)dy = 0$

4. $y' = x - 2y\cot 2x$

5. $dx - (1 + 2x\tan y)dy = 0$

6. $6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0$

7. $y' = y - xy^3e^{-2x}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

9. $y(x\tan x + \ln y)dx + \tan x dy = 0$

10. $y' = 2(3x+y)^2 - 1$, $x(0) = 1$