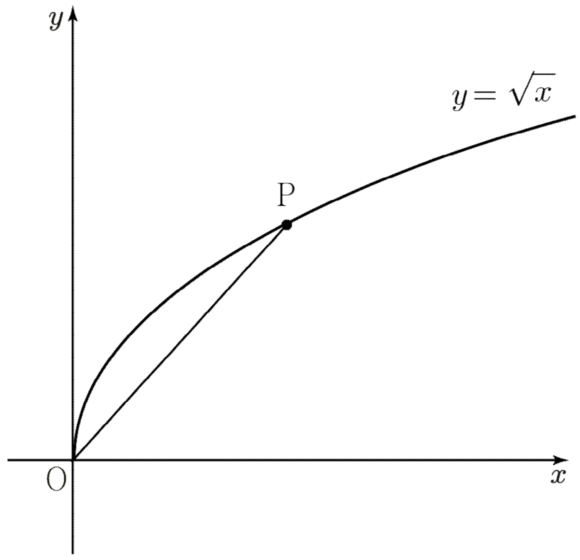
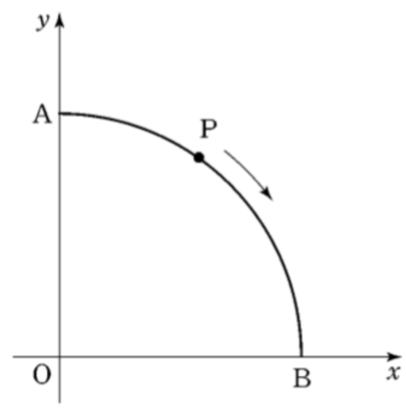
제2교시

17머스크

1. 점 P는 원점 O를 출발하여 곡선 $y=\sqrt{x}$를 따라 원점에서 멀어지고 있다. 점 P의 x좌표가 매초 2의 속도로 일정하게 변할 때, 직선 OP의 기울기가 10이 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오.

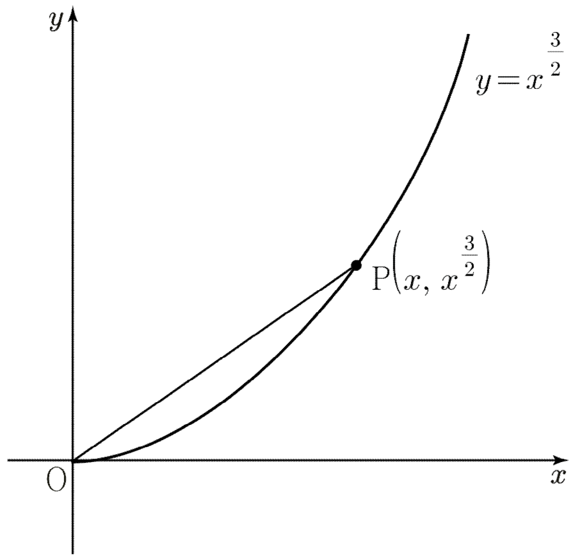


2. 좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 90° 이고 반지름의 길이가 10인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 매초 2의 일정한 속력으로 움직일 때, ∠AOP = 30° 가 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 변화율은?



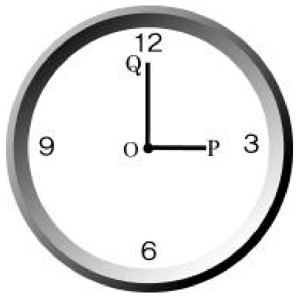
① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ -1 ⑤ -2

3. 곡선 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 위의 점 P가 시간이 지남에 따라 원점으로부터 멀어지고 있다. $x=3$이 되는 순간 선분 OP의 시각에 대한 길이의 순간변화율이 11일 때, 점 P의 x좌표의 시각에 대한 순간변화율은?



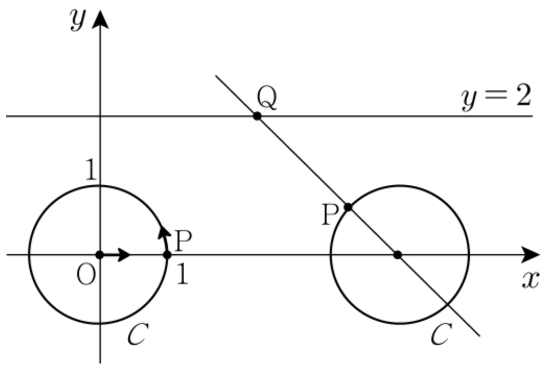
① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

4. 그림과 같은 원모양의 시계가 있다. 시계의 중심을 O, 길이가 2인 시침의 끝점을 P, 길이가 3인 분침의 끝점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하자. 4시 정각이 되는 순간, 넓이 S의 시간(분)에 대한 순간변화율은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 세 점 O, P, Q가 일직선 위에 있는 경우는 $S=0$으로 한다.)



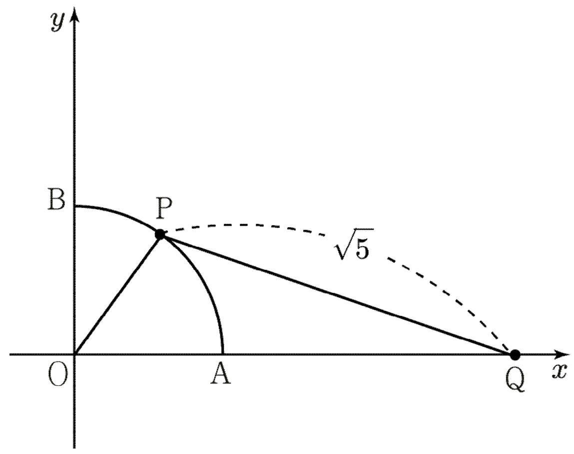
5. 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 원 C와 이 원 위를 움직이는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P는 원 C 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 속력으로 움직인다.
> (나) 원 C는 x축의 양의 방향으로 매초 10의 속력으로 움직인다.



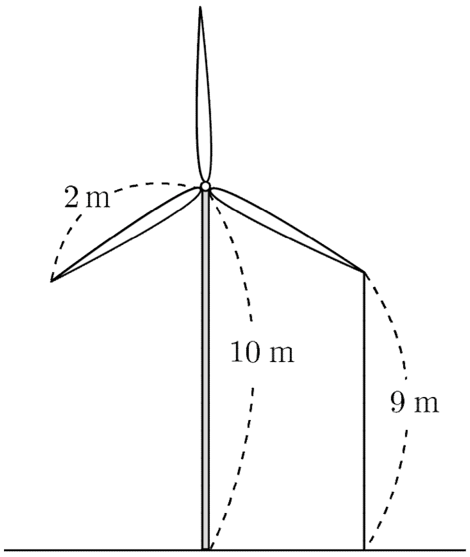
원 C는 중심이 원점에서, 점 P는 점 $(1, 0)$에서 동시에 출발할 때, 원 C의 중심과 점 P를 지나는 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점을 Q라 하자. 출발한 후 $\frac{3}{4}\pi$초가 되는 순간, 점 Q는 직선 $y=2$ 위를 매초 a의 속력으로 움직인다. a의 값을 구하시오.

6. 좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점 $\mathrm{A}(1, 0)$에서 출발하여 호 AB 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직일 때, x축 위의 점 Q는 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$를 만족시키면서 x축 위를 움직인다.

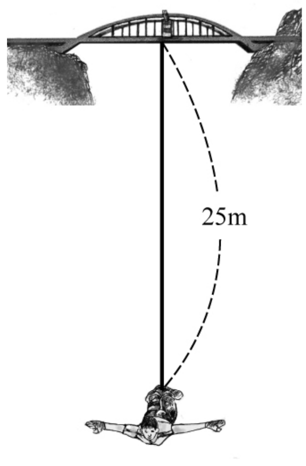


$\angle \mathrm{POA}=\frac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 x좌표의 시간(초)에 대한 변화율을 r이라 할 때, $9r^2$의 값을 구하시오.

7. 지면에서 회전 중심축까지의 높이가 10 m이고, 길이가 2 m인 풍력 발전기의 날개가 축을 중심으로 일정한 속력으로 시계반대방향으로 돌고 있다. 지면에서 날개 끝까지의 높이가 9 m가 될 때, 시간(초)에 따른 높이의 변화율이 4π(m/s)이고, 풍력 발전기의 날개가 한 바퀴 도는데 걸리는 시간을 k초라 하자. $k^2 = \frac{q}{p}$ (p, q는 서로소)일 때, $10(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, 축은 지면과 평행하고 축과 날개의 두께는 고려하지 않는다.)

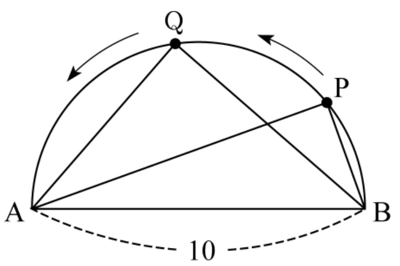


8. 높이가 45 m인 번지점프대에 길이가 20 m인 원기둥 모양의 탄력 줄이 연결되어 있다. 이 탄력 줄은 힘을 주어 길이가 늘어나도 원기둥 모양이 유지되며 그 부피는 변하지 않는다고 한다. 어떤 사람이 탄력 줄을 매고 점프대를 출발한 후 20 m였던 탄력 줄의 길이가 25 m로 되는 순간에 탄력 줄의 길이가 늘어나는 속도는 10 m/초이고, 탄력 줄의 반지름의 길이는 $\frac{3}{100}$ m이다. 이 순간에 탄력 줄의 반지름의 길이의 변화율을 $-\frac{b}{a}$ m/초라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)



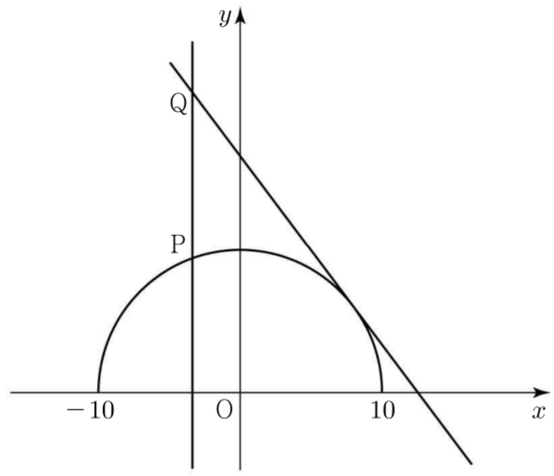
9. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 두 점 P, Q가 점 B에서 동시에 출발하여 다음 조건을 만족시키면서 반원 위를 움직인다.

(가) $\angle \mathrm{QAB} = 2\angle \mathrm{PAB}$
(나) 선분 BP의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

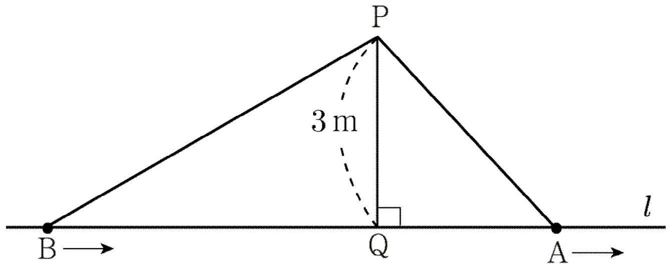


점 P가 점 B에서 출발하여 5초가 되는 순간 선분 AQ의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은 p이다. $100p^2$의 값을 구하시오. (단, $0 \le \angle \mathrm{PAB} < \frac{\pi}{4}$ 이다.)

10. 곡선 $C : x^2 + y^2 = 100 \ (y \ge 0)$과 곡선 C의 접선 $y = -\sqrt{3}x + 20$이 있다. 곡선 C 위의 점 P에서 y축에 평행한 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 점 A(10, 0)을 출발하여 곡선 위를 매초 5의 일정한 속력으로 점 B(-10, 0)까지 이동할 때, 시간(초)에 대한 선분 PQ의 길이의 순간변화율의 최댓값을 구하시오.

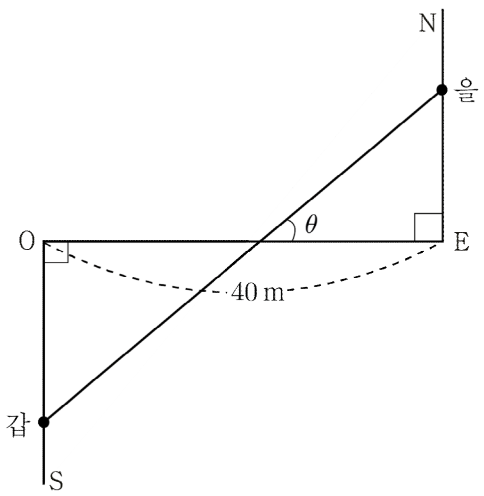


11. 그림과 같이 두 정점 P, Q 사이의 거리가 3 m이고, 점 Q를 지나고 선분 PQ에 수직인 직선을 l이라 하자. 점 A가 점 Q에서 출발하여 직선 l을 따라 초속 1 m의 일정한 속력으로 움직일 때, 직선 l 위의 점 B는 $\overline{AP}+\overline{PB}=20$(m)을 만족시키며 점 Q쪽으로 움직이고 있다. $\overline{AQ}=4$(m)가 되는 순간, 선분 BQ의 길이(m)의 시간(초)에 대한 변화율은?



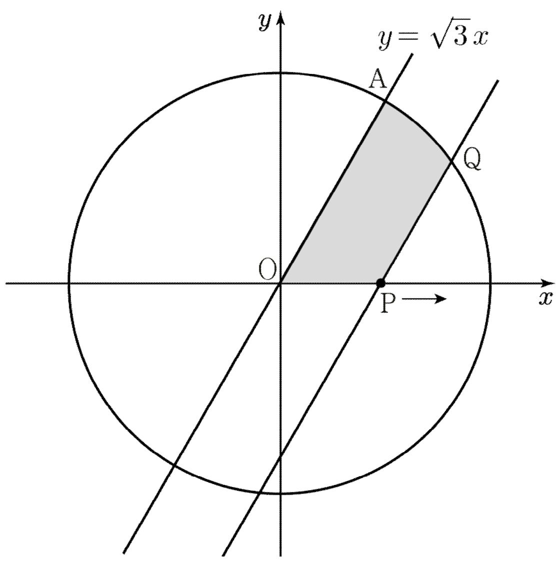
① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

12. 지점 O와 지점 E 사이의 거리는 40 m이다. 아래 그림과 같이 갑은 지점 O에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 OS를 따라 초속 3 m의 일정한 속력으로 달리고, 을은 갑이 출발한 지 10초가 되는 순간 지점 E에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 EN을 따라 초속 4 m의 일정한 속력으로 달리고 있다. 갑과 을의 지점을 연결하여 만든 선분과 선분 OE가 만나서 이루는 각을 θ(라디안)라 할 때, 갑이 출발한 지 20초가 되는 순간 θ의 변화율은?

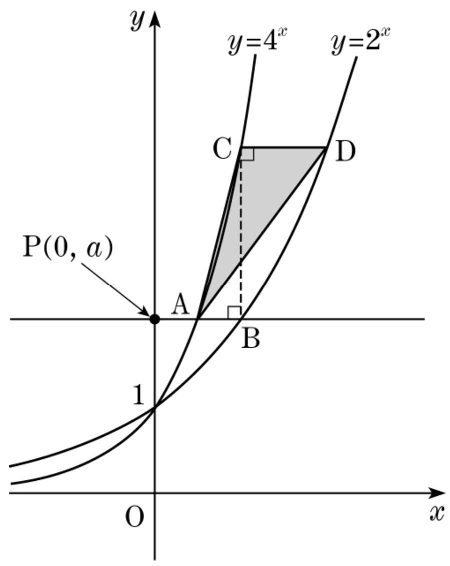


① $\frac{21}{290}$ rad/초 ② $\frac{13}{290}$ rad/초 ③ $\frac{7}{290}$ rad/초
④ $\frac{3}{290}$ rad/초 ⑤ $\frac{1}{290}$ rad/초

13. 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원이 있다. 직선 $y=\sqrt{3}x$와 원이 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 P는 원점 O를 출발하여 x축을 따라 양의 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직인다. 점 P가 원점 O를 출발하여 t초가 되는 순간, 점 P를 지나고 직선 $y=\sqrt{3}x$에 평행한 직선이 제 1사분면에서 원과 만나는 점을 Q라 하자.
세 선분 AO, OP, PQ와 호 QA로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, 점 Q의 y좌표가 5가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율을 구하시오. (단, $0<t<5$)



14. 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 y축 위의 점 $\mathrm{P}(0, a)(a>1)$가 있다. 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 D라 하자.

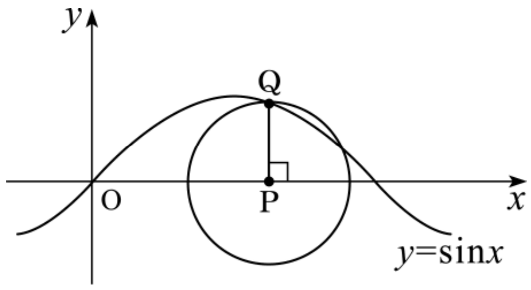


점 P가 점 $(0, 2)$를 출발하여 y축의 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속도로 움직인다. 점 P가 점 $(0, 4)$를 지나는 순간, 삼각형 ADC의 넓이의 시간(초)에 대한 순간변화율은?

① $5+\dfrac{3}{2\ln 2}$ ② $5+\dfrac{5}{2\ln 2}$ ③ $7+\dfrac{1}{2\ln 2}$

④ $7+\dfrac{3}{2\ln 2}$ ⑤ $7+\dfrac{5}{2\ln 2}$

15. 좌표평면에서 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0<t<\pi)$에서의 좌표는 $\left(\frac{t^2}{\pi}, 0\right)$이다. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sin x$와 만나는 점을 Q라 할 때, 점 P를 중심으로 하고 선분 PQ를 반지름으로 하는 원의 넓이를 S라 하자.

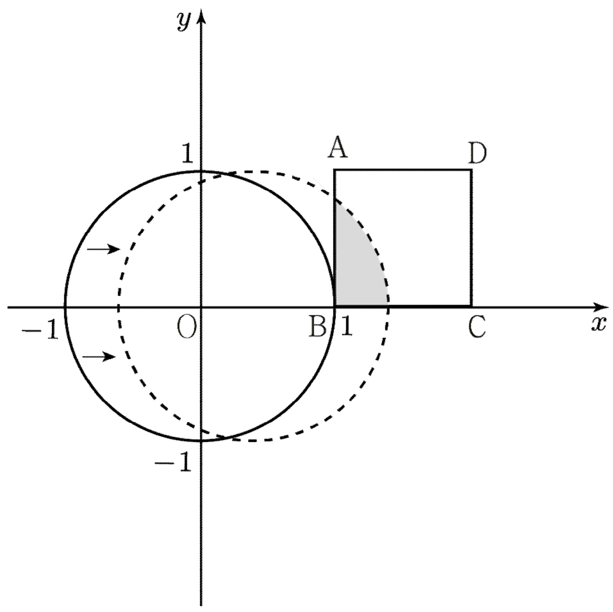


$t=\frac{\pi}{2}$인 순간, 넓이 S의 t에 대한 변화율은?

① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ 0

④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

16. 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 O와 네 점 A(1, 1), B(1, 0), C(2, 0), D(2, 1)을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 원 O의 중심이 x축을 따라 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. t초 후 원의 내부와 정사각형 ABCD의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 S라 하자. 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은? (단, $0 \le t \le 1$)

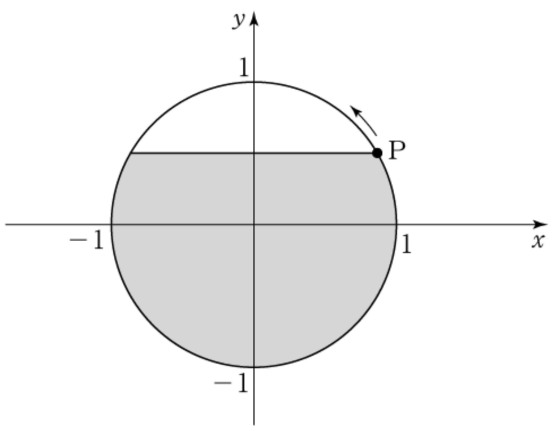


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

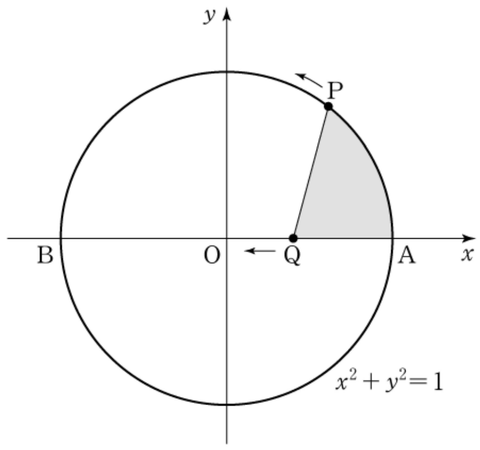
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

17. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P가 점 $(1, 0)$에서 출발하여 원점을 중심으로 매초 $\frac{1}{40}$(라디안)의 일정한 속력으로 원 위를 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그을 때, 원과 직선으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 점 P가 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 서로소인 자연수이다.)



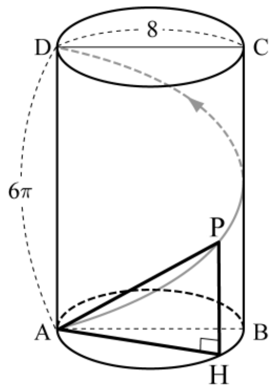
18. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P는 점 A$(1, 0)$에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 Q는 점 A에서 출발하여 점 B$(-1, 0)$을 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 x축 위를 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 점 A에서 출발하여 t초가 되는 순간, 선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 출발한 지 1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은?



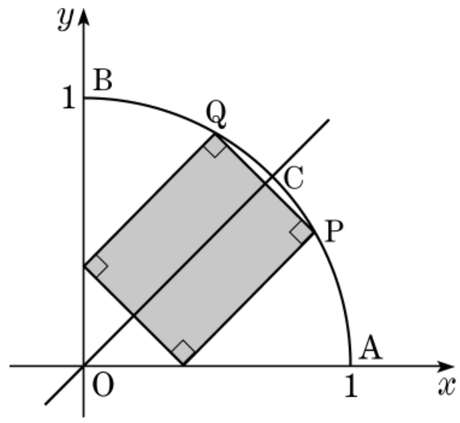
① $\frac{\pi}{4}-1$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}+1$

19. 밑면의 지름의 길이가 8이고 높이가 6π인 원기둥이 있다. 그림과 같이 평행한 두 선분 AB와 DC는 서로 다른 두 밑면의 지름이고, 두 선분 DA와 AB는 수직이다. 점 P가 매초 π의 일정한 속력으로 원기둥의 옆면을 따라 점 A에서 출발하여 선분 CB 위의 점을 지나 점 D까지 최단거리로 움직인다. 점 P에서 선분 AB를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형 PAH의 넓이를 S라 하자. 점 P가 점 A에서 출발한 지 5초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



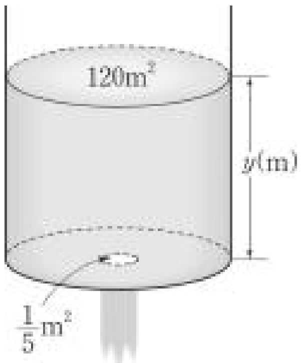
20. 그림과 같이 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 사분원 OAB에 대하여 각 AOB를 이등분하는 직선이 사분원과 만나는 점을 C라 하자. 두 점 P, Q는 점 C에서 동시에 출발하여 사분원의 둘레를 따라 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{36}$의 일정한 속력으로 움직인다. 두 점 P, Q가 점 C에서 출발하여 t초 $(0<t<9)$가 되는 순간, 선분 PQ를 한 변으로 하고 사분원 OAB에 내접하는 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하자. 출발한 지 6초가 되는 순간, 넓이 $S(t)$의 시간(초)에 대한 변화율은?



① $\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$ ② $\frac{1-\sqrt{3}}{72}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}-1}{72}\pi$

④ $\frac{\sqrt{3}-1}{36}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$

21. 단면의 넓이가 120 (m^2)로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 5 (m)까지 차 있다. 이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}$ (m^2)인 구멍으로 물이 빠지고 있다. 물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 y (m)일 때, 빠져나가는 물의 속력 v (m/초)는 $v=\sqrt{20y}$ 로 주어진다고 하자. 다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 5 (m)에서 $\frac{5}{4}$ (m)로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 계산한 것이다.



> v와 y가 시간에 따라 변하므로 v와 y의 관계식 $v=\sqrt{20y}$ 를 t에 관하여 미분하여 v와 y의 시간에 따른 변화율 사이의 관계식을 구하면
>
> $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{10}{\sqrt{20y}}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{10}{v}\dfrac{dy}{dt}$ …… ①
>
> 한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간변화율은 그 순간 빠져나가는 물의 양과 부호만 다르므로
>
> $\boxed{\text{(가)}}$ …… ②
>
> ②식에서 얻은 $\dfrac{dy}{dt}$ 를 ①식에 대입하여 정리하면
>
> $\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{60}$
>
> 따라서 구하는 시간은 $\boxed{\text{(나)}}$ (초)이다.

위의 풀이에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

	(가)	(나)
①	$120\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v}{5}$	240
②	$120\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v}{5}$	300
③	$120\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v}{10}$	180
④	$120\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v}{10}$	240
⑤	$120\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v}{10}$	300

변화율(빠른 정답)

작업공간 2023.09.08

1. [정답] 10
2. [정답] ④
3. [정답] ⑤
4. [정답] 251
5. [정답] 6

6. [정답] 8
7. [정답] 70
8. [정답] 503
9. [정답] 25
10. [정답] 10

11. [정답] ①
12. [정답] ③
13. [정답] 10
14. [정답] ④
15. [정답] ⑤

16. [정답] ④
17. [정답] 83
18. [정답] ④
19. [정답] 17
20. [정답] ①

21. [정답] ②

변화율(해설)

작업공간 2023.09.08

1) [정답] 10

[해설]

$\frac{dx}{dt}=2$ 이고 $10x=\sqrt{x}$ 에서 $x=\frac{1}{100}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt}$

$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{x=\frac{1}{100}}=10$

2) [정답] ④

[해설]

t초 후에 선분 OP와 y축이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 점 P의 좌표는 $(10\sin\theta,\ 10\cos\theta)$이므로 속력 v는

$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\ \frac{d\theta}{dt}$

$=\sqrt{(10\cos\theta)^2+(-10\sin\theta)^2}\,\frac{d\theta}{dt}=10\frac{d\theta}{dt}=2$

$\therefore\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{5}$

따라서 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=-10\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=-2\sin\theta$이므로

$\angle\mathrm{AOP}=30^\circ$ 인 순간의 점 P의 y좌표의 시간에 대한 변화율은 $-2\sin 30^\circ=-1$

3) [정답] ⑤

[해설]

$\mathrm{P}(\mathrm{x},\ \mathrm{x}^{\frac{3}{2}})$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=l=\sqrt{x^2+x^3}$

$\frac{dl}{dt}=\frac{1}{2}(x^2+x^3)^{-\frac{1}{2}}(2x+3x^2)\frac{dx}{dt}$

$x=3$일 때, $\frac{dl}{dt}=11$이므로 $\therefore\ \frac{dx}{dt}=4$

4) [정답] 251

[해설]

분침의 속력 : $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$

시침의 속력 : $\frac{\frac{\pi}{6}}{60}=\frac{\pi}{360}$

3시 정각에서 t(분) 후 분침과 시침이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 4시 정각 근처에서

$\theta=\frac{\pi}{30}t-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{360}t\right)=\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{360}t$

$\angle\mathrm{POQ}=2\pi-\theta$ 이므로

$S=\frac{1}{2}\times2\times3\sin(2\pi-\theta)=3\cos\frac{11\pi}{360}\mathrm{t}$

$\frac{dS}{dt}=-3\times\frac{11\pi}{360}\times\sin\frac{11\pi}{360}t$

$t=60$일 때, $\frac{dS}{dt}=\frac{11}{240}\pi\therefore p+q=251$

5) [정답] 6

[해설]

t초 후에 $\mathrm{P}(10t+\mathrm{cos}t,\ \mathrm{sin}t)$이고, 직선의 방정식은

$y=\frac{\mathrm{sin}t}{\mathrm{cos}t}(x-10t)$이므로 점 Q의 x 좌표는

$x=10t+2\cot t$

$\therefore\ \frac{dx}{dt}=10-2\csc^2 t\ \therefore\ \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=\frac{3}{4}\pi}=6$

6) [정답] 8

[해설]

점 P는 호 AB 위의 점이고 시각 t일 때

$\angle\mathrm{POA}=t\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$이므로 점 P의 좌표는

$(\cos t,\ \sin t)$이다.

점 $\mathrm{Q}(x,0)$의 시각 t에서의 위치는

$x=\cos t+\sqrt{5-\sin^2 t},\ y=0$

점 Q의 x좌표의 시간에 대한 변화율

$\frac{dx}{dt}=-\sin t-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{5-\sin^2 t}}$

$\therefore\angle\mathrm{POA}=\frac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 x좌표의

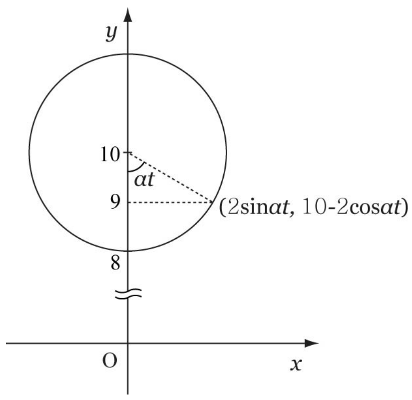
시간에 대한 변화율

$r=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5-\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

따라서 $9r^2=8$

7) [정답] 70

[해설]



날개의 끝을 점 $(x,\ y)$라 하면

$x^2+(y-10)^2=4\cdots$㉠

$y=9$일 때, $\dfrac{dy}{dt}=4\pi(m/s)$

시간에 따른 각의 변화율을 α라 하면

$x=2\sin\alpha t,\ y=10-2\cos\alpha t$

$y=9$를 ㉠에 대입하면 $x=\sqrt{3}$

따라서 $\sin\alpha t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y=10-2\cos\alpha t$를 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dy}{dt}=2\alpha\sin\alpha t(m/s)\therefore\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\pi$

따라서 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은

$k=\dfrac{2\pi}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore k^2=\dfrac{3}{4}$

$\therefore 10(p+q)=70$

8) [정답] 503

[해설]

점프대를 출발한지 t초 후의 탄력줄의 길이를 $l(\geqq 20)$, 반지름의 길이를 r라 하면 탄력줄의 부피 V는 $V=\pi r^2 l$(일정)이고 l과 r는 모두 t의 함수이다. 이 식을 시각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dV}{dt}=\pi\left(r^2\dfrac{dl}{dt}+2rl\dfrac{dr}{dt}\right)=0,\ r^2\dfrac{dl}{dt}+2rl\dfrac{dr}{dt}=0$

A 지점을 지나는 순간 $l=25(\mathrm{m}),r=\dfrac{3}{100}(\mathrm{m})$,

$\dfrac{dl}{dt}=10(\mathrm{m}/\text{초})$ 이므로

$\left(\dfrac{3}{100}\right)^2\times10+2\times\dfrac{3}{100}\times25\dfrac{dr}{dt}=0$ 에서

$\dfrac{dr}{dt}=-\dfrac{3}{500}\ (\mathrm{m}/\text{초})$

$\therefore a+b=500+3=503$

9) [정답] 25

[해설]

$\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=10\sin\theta,\ \overline{\mathrm{AQ}}=10\cos2\theta$

$\dfrac{d}{dt}\overline{\mathrm{BP}}=10\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{20\cos\theta}$

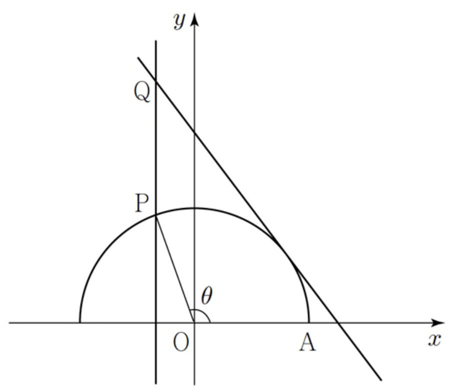
$\dfrac{d}{dt}\overline{\mathrm{AQ}}=-20\sin2\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}=-40\sin\theta\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}=-2\sin\theta$

$t=5$일 때, $10\sin\theta=\dfrac{5}{2}$이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$이다.

$p=-2\cdot\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{2}$이므로 $100p^2=25$이다.

10) [정답] 10

[해설]



$\angle\mathrm{AOP}=\theta$라 하면 호의 길이 $l=10\theta$

점 $\mathrm{P}(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$가 매초 5의 일정한 속력으로 이동하므로 양변을 시각 t에 대해 미분하면

$\dfrac{dl}{dt}=10\dfrac{d\theta}{dt}=5,\ \dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=L=20-10\sqrt{3}\cos\theta-10\sin\theta$

따라서 L을 시각 t에 대해 미분하면

$\dfrac{dL}{dt}=\left(10\sqrt{3}\sin\theta-10\cos\theta\right)\dfrac{d\theta}{dt}=10\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

따라서 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$일 때, 최댓값은 10

11) [정답] ①

[해설]

$\overline{\mathrm{BQ}}=x,\ \overline{\mathrm{AQ}}=y$라 하면 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=20\cdots\cdots$㉠

㉠의 양변을 시간 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+9}}\cdot\dfrac{dy}{dt}=0$

$y=4$일 때 $x=6\sqrt{6}$이고, $\dfrac{dy}{dt}=1$이므로

$\dfrac{6\sqrt{6}}{15}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{4}{5}=0$에서 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 구하는 변화율은 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

12) [정답] ③

[해설]
문제의 그림에서 t초 후의 갑의 위치를 S', 을의 위치를 N'라 하고 $\overline{OS'}=x$, $\overline{ON'}=y$라 두면 $\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=4$이다.

$\angle N'S'E'=\theta$이므로 $\tan\theta=\dfrac{x+y}{40}$이다.

양변을 t에 관해 미분하면

$\sec^2\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{40}\left(\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}\right)\cdots$ ①

$t=20$이므로 $x=60$, $y=40$, $\tan\theta=\dfrac{5}{2}$가 된다.

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{25}{4}=\dfrac{29}{4}$

①에서 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{40}\left(\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}\right)\cdot\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{1}{40}(3+4)\cdot\dfrac{4}{29}=\dfrac{7}{290}$

13) [정답] 10

[해설]
t초가 되는 순간 점 P의 좌표는 $(2t, 0)$

$\angle QOP=\theta$라 하면, $\angle AOQ=\dfrac{\pi}{3}-\theta$

부채꼴 OQA의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times10^2\times\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=50\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

삼각형 OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times10\times2t\times\sin\theta=10t\sin\theta$

$S=50\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)+10t\sin\theta$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dS}{dt}=-50\dfrac{d\theta}{dt}+10\sin\theta+10t\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\cdots\cdots$ ㉠

점 $P(2t, 0)$을 지나고 직선 $y=\sqrt{3}x$에 평행한 직선을 l이라 하면

직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}(x-2t)$이고

직선 l과 원이 만나는 점 Q의 좌표는 $Q(10\cos\theta, 10\sin\theta)$이므로 직선 l에 대입하면

$10\sin\theta=\sqrt{3}(10\cos\theta-2t)\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$10\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}=\sqrt{3}\left(-10\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}-2\right)\cdots\cdots$ ㉢

점 Q의 y좌표가 5이므로

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고

㉡에서 $t=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$이고

㉢에서 $\dfrac{d\theta}{dt}=-\dfrac{1}{5}$이다.

㉠에 의하여 $\dfrac{dS}{dt}=10$

14) [정답] ④

[해설]
네 점 A, B, C, D의 좌표는
$A(\log_4 a,\ a)$, $B(\log_2 a,\ a)$, $C(\log_2 a,\ a^2)$, $D(2\log_2 a,\ a^2)$이다.

$\overline{CD}=\log_2 a$, $\overline{BC}=a^2-a$이므로 삼각형 ADC의 넓이를 $S(a)$라 하면 $S(a)=\dfrac{1}{2}(a^2-a)\cdot log_2 a$

$\therefore\ S'(a)=\dfrac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\dfrac{1}{2}(a^2-a)\dfrac{1}{a\ln2}$

$=\dfrac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\dfrac{1}{2\ln2}(a-1)$ $\therefore\ S'(4)=7+\dfrac{3}{2\ln2}$

이때 $\dfrac{dS}{dt}=S'(a)\dfrac{da}{dt}$이고 $\dfrac{da}{dt}=1$이므로 구하는 순간변화율은

$\left(7+\dfrac{3}{2\ln2}\right)\times1=7+\dfrac{3}{2\ln2}$

<다른 풀이>
점 P가 점 $(0, 2)$를 출발한 지 t초 후의 점 P의 좌표는 $(0, 2+t)$이므로 삼각형 ADC의 넓이는

$S(t)=\dfrac{1}{2}(t^2+3t+2)\cdot log_2(t+2)$

$\therefore\ S'(t)=\dfrac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)+\dfrac{1}{2}(t^2+3t+2)\dfrac{1}{(t+2)\ln2}$

$=\dfrac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)+\dfrac{1}{2\ln2}(t+1)$

점 P가 점 $(0,4)$를 지나는 순간은 $t=2$일 때이므로 구하는 순간변화율은

$\therefore\ S'(2)=\dfrac{1}{2}(2\times2+3)\log_2(2+2)+\dfrac{1}{2\ln2}(2+1)=7+\dfrac{3}{2\ln2}$

15) [정답] ⑤

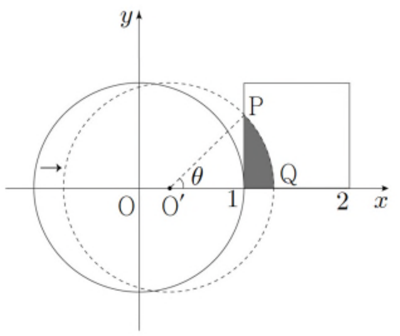
[해설]
$S=\pi(\sin x)^2$ 에서 $\dfrac{dS}{dt}=2\pi\sin x\cos x\times\dfrac{dx}{dt}$

$x=\dfrac{t^2}{\pi}$ 로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{\pi}$ 이고 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 이다.

$\therefore\ \left[\dfrac{dS}{dt}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}=2\pi\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times1=\pi$

16) [정답] ④

[해설]



그림과 같이 원 O의 t초 후의 중심을 O′, 원과 정사각형 ABCD의 교점을 P, Q라 하고,

$\angle \mathrm{PO'Q} = \theta$라 하면

$\cos\theta = 1-t$ 에서 $-\sin\theta \dfrac{d\theta}{dt} = -1$이다.

원과 정사각형 ABCD가 겹치는 부분의 넓이

$$S = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}(1-t)\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\frac{1}{\sin\theta}$$

원 O의 중심이 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$을 지나는 순간은 $t = \dfrac{1}{2}$이다.

$t = \dfrac{1}{2}$일 때, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$이다.

∴ 원 O의 중심이 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$을 지나는 순간 넓이 S의

시간(초)에 대한 변화율은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17) [정답] 83

[해설]

선분 OP가 x축과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$S =$ (반원의 넓이)+ (2개의 부채꼴의 넓이)

+ (이등변삼각형의 넓이)

$$= \frac{1}{2}\pi + 2\times\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta + \frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi - 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{t}{40} + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{20} \quad \left(\because\ \theta = \frac{t}{40}\right)$$

$$\therefore\ \frac{dS}{dt} = \frac{1}{40} + \frac{1}{40}\cos\frac{t}{20}$$

따라서 점 P의 좌표가 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$일 때

$\theta = \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{t}{40}$ 에서 $\dfrac{t}{20} = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{40}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{40}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{80}$$

$\therefore\ a+b = 83$

[다른 풀이]

$S = 2\displaystyle\int_{-1}^{y}\sqrt{1-y^2}\,dy$이므로 $\dfrac{dS}{dy} = 2\sqrt{1-y^2} = 2x$ (단, $x>0$)

한편, 선분 OP가 x축과 이루는 각의 크기를 $\theta = \dfrac{1}{40}t$라 하면

$y = \sin\theta = \sin\dfrac{t}{40}$이므로 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{40}\cos\dfrac{t}{40}$ 이다.

$$\therefore\ \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = 2x\cdot\frac{1}{40}\cos\frac{t}{40}$$

그런데, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$일 때

$\theta = \dfrac{t}{40} = \dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$$\frac{dS}{dt} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{40}\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{80}$$

$\therefore\ a+b = 83$

18) [정답] ④

[해설]

어두운 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

(i) $0 \leqq t \leqq 1$일 때

(호AP의 길이)$= \dfrac{\pi}{2}t$, $\angle \mathrm{AOP} = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{t}$, $\overline{\mathrm{OQ}} = 1-\mathrm{t}$

이므로 $S(t) = \dfrac{\pi}{4}t - \dfrac{1}{2}(1-t)\sin\dfrac{\pi}{2}t$

$$\lim_{h\to -0}\frac{S(1+h)-S(1)}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{\frac{\pi}{4}(1+h) + \frac{1}{2}h\cos\frac{\pi}{2}h - \frac{\pi}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to -0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

(ii) $1 < t \leqq 2$일 때

(호AP의길이)$= \dfrac{\pi}{2}t$, $\angle \mathrm{AOP} = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{t}$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \mathrm{t}-1$이므로

$$S(t) = \frac{\pi}{4}t + \frac{1}{2}(t-1)\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{S(1+h)-S(1)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{\frac{\pi}{4}(1+h) + \frac{1}{2}h\cos\frac{\pi}{2}h - \frac{\pi}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to -0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

(i),(ii)에서 $S'(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$

19) [정답] 17

[해설]

점 P가 1초에 π씩 움직이므로 점 H는 1초에 $\frac{4}{5}\pi$ 씩

움직인다. 따라서 점 H가 t초 동안 움직인 거리는 $\frac{4}{5}\pi t$이다.

좌표공간에서 선분 AB의 중점을 원점 O라 하고 점 $A(4, 0, 0)$, t초 후의 점 H, P를

$H\left(4\cos\frac{\pi t}{5},\ 4\sin\frac{\pi t}{5},\ 0\right)$, $P\left(4\cos\frac{\pi t}{5},\ 4\sin\frac{\pi t}{5},\ \frac{3\pi t}{5}\right)$

$\overline{HA} = \sqrt{\left(4\cos\frac{\pi t}{5} - 4\right)^2 + \left(4\sin\frac{\pi t}{5}\right)^2} = 8\sin\frac{\pi t}{10}$

$S = \frac{1}{2}\overline{HA}\cdot\overline{PH} = 4\sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5}$

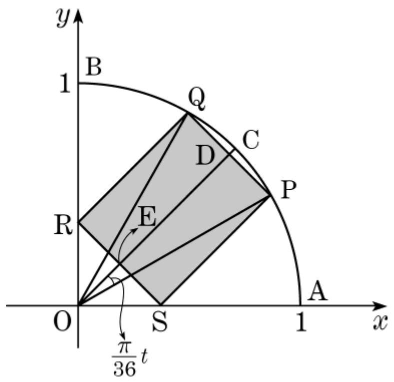
$\frac{dS}{dt} = 4\left(\cos\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{\pi}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5} + \sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi}{5}\right)$

따라서 $t=5$일 때 $\frac{dS}{dt} = \frac{12}{5}\pi = \frac{q}{p}\pi \qquad \therefore p+q = 17$

20) [정답] ①

[해설]

내접하는 사각형의 x축, y축 위의 두 꼭짓점을 각각 S, R라 하고 선분 OC와 선분 PQ, 선분 RS의 교점을 각각 D, E라 하자.



삼각형 DOP에서

$\overline{DP} = \overline{OP}\sin\frac{\pi}{36}t = \sin\frac{\pi}{36}\mathrm{t}$

$\overline{OD} = \overline{OP}\cos\frac{\pi}{36}t = \cos\frac{\pi}{36}t$

$\angle EOS = \frac{\pi}{4}$이므로 $\overline{OE} = \overline{ES}\ (=\overline{DP})$

이다. 그러므로 □PQRS의 넓이 $S(t)$는

$S(t) = \overline{PQ}\cdot\overline{PS} = 2\overline{DP}\cdot\left(\overline{OD} - \overline{OE}\right)$

$= 2\sin\frac{\pi}{36}t\left(\cos\frac{\pi}{36}t - \sin\frac{\pi}{36}t\right)$

$= 2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t - 2\sin^2\frac{\pi}{36}t = \sin\frac{\pi}{18}t - 2\sin^2\frac{\pi}{36}t$

$S'(t) = \frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t - 2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t\right)$

$= \frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t - \sin\frac{\pi}{18}t\right)$

$S'(6) = \frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$

21) [정답] ②

[해설]

$v = \sqrt{20y}$ 를 t에 관하여 미분하면

$\frac{dv}{dt} = \frac{10}{\sqrt{20y}}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{10}{v}\cdot\frac{dy}{dt}$ .... (1)

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간 변화율은 $120\frac{dy}{dt}$이고,

빠져나가는 순간의 물의 양은 $\frac{1}{5}\times v$이다.

이 때, 두 물의 양은 부호만 다르므로

$\boxed{120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{5}}$ .... (2)

(2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$를 (1)식에 대입하여 정리하면

$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{60}$

이 때, $y=5$일 때 $v=10$, $y=\frac{5}{4}$일 때, $v=5$이므로

$5 = 10 + \int_0^t -\frac{1}{60}dt \Leftrightarrow -5 = -\frac{1}{60}t \quad \therefore t = 300$

따라서, 구하는 시간은 300 (초)이다.