24학년도 9월 모의고사 - 수학

구성

번호) 단원 - 주제 이름 - 수학1 / 수학2 / 미적분 의 전 문항이 수록되어있습니다.
풀이가 얇은 글씨로 써 있습니다. 풀이의 특징은 다음 페이지에 쓰여있습니다.

첨언할 내용을 왼쪽에 적었습니다.

참고 : 풀이에 사용된 발상이나 중요한 팁

참고할 내용이 (필요할 경우) 수록되어 있습니다. '이건 알고 넘어가자' 싶은 것이나 '이건 내가 원래 쓰는건데 잘 모를까봐 말해주자면~' 싶은 것들입니다.

(주관적인) 총평

1. 쉽…긴 했던 시험지였다.
2. 여기저기 난이도가 조정된 부분이 보여 조금 덜 정교하다고 느꼈다. 1번에서 살짝 당황시키고 들어가는 것과, 특히 15번에 $\{f(x)+1\}$은 뭘 위한 건지 모르겠다. 그렇게 불평하던 와중 하나씩 좋은 문항들이 나와서 감탄하면서 풀었던 시험지였다.
3. 전체적으로 '기존에 알고 있던 킬러 주제'의 난이도를 약화(그래서 쉬워진 것 같아 보이도록)하고(12, 15, 20, 22, 29, 30) '기존에는 무난하게 넘어가던 주제'의 난이도를 억지로 강화(13, 14)했다고 느꼈다.
4. 특히나 20번(코사인법칙 사용한 도형 문제가 없어지고 코사인법칙 사용한 증명 문제가 출제됨)을 보고 평가원이 난이도 하향을 위해 노력했다고 느꼈다.
5. 킬러(사실 킬러의 정의조차 애매하게 다뤄지고 있는 것이 현실이지만 '완전 어려운 문제'라고 가정했을 때)는 정말 없어진 게 맞고, 준킬러가 많…아지지 않은 것 같다.
6. 결과적으로 최근 1~2년간 평가원 기출문제 중 가장 쉬웠던 느낌?
7. 그래도 배울 문항이 아예 없는 건 아니다. 9, 10, 12, 14, 22(틀렸다면), 28(미), 29(미)(틀렸다면), 30(미)번은 체크해볼만한 내용이 하나 이상 있으므로 한 번만 더 되짚어보자.

문항별 한마디(해설을 읽기 전 읽고 다시 고민해보아요)

9. x좌표와 길이를 연상시킴은 항상 중요하다.
10. 식을 예쁘게 쓰고, 미분을 예쁘게 했다면 편하다.
11. '거리가 4'라고만 했지 어떤 점이 더 앞에 있는지는 말한 적이 없다.
12. 기본적인 수열 추론 문제이다.
13. 감소/증가를 다루고 있으니까 도함수를 다루는 게 편하겠다.
14. 제시된 집합의 원소 중 하나의 정수가 뭔지는 보인다. 나머지 하나는 무엇일까?
15. $g(x)$가 $x=3$에서 불연속이니까 $f(3)=0$을 쓰고 시작하는 게 맞다.
20. 22수능 15번처럼 증명 문제가 나왔는데, 기본이자 해설의 모든 것은 '한 문장 한 문장 왜 나왔나 고민하는 것'이다.
21. 시그마로 더하고자 하는 수열의 일반항을 구할 수 있다면, 구해보는 것도 방법이다.
22. 정적분값(부정적분의 차)에는 상수항이 필요없다는 것을 잘 생각하면 오히려 쉽다.
28미. 0부터 1씩 '얼만큼 올라갔다'가, 얼마나 내려가냐를 잘 따져보자. 삼각함수의 확대/축소 버전의 적분도 잘 알아놨어야 했다.
29미. 이렇게 해도 안되고, 이렇게 해도 모순이네? 그러면 '이래야 된다는 것' 아닐까?
30미. 복잡해진다 싶으면 시크하게 음함수의 미분법을 써보는 것도 좋다.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

시작에 앞서 - 본 해설지의 특징

1. 친절함으로 행간을 메우다

마치 선배가 하나하나 알려주듯, 과외 선생님이 친절하게 설명해주듯 '말해준 것을 그대로 적는 느낌'의 글입니다. 읽기만 해도 마치 하나의 인강을 듣듯이 내용이 이해되어 도움이 될 것입니다.
그러다보니 '이게 이렇게 되니까~' '이걸 식으로 표현하면~' 식의 표현이 많은데, 지시어가 많은 해설지를 그 지시 대상에 있어서 오해가 발생하기 쉽습니다. 따라서 지시어의 지시 대상을 명확히 하기 위해 다른 방법을 고안했습니다.

2. 색깔 칠하기를 통한 같은 표현 지시

'~ 하면 $f(x) = x^2 - x$가 된다. 이게 6이 되는 순간을 찾아야 하므로 $x^2 - x = 6$이라고 방정식을 세우면 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0,\ x = 3, -2$를 얻을 수 있다.' 처럼 같은 것을 같은 색으로 쓰면 지시어가 많아도 이해에 해를 끼치지 않습니다. 뿐만 아니라 같은 의미를 가지는 것들끼리도 같은 색으로 표시하여 이해를 도울 수 있을 것입니다. 글을 읽으면서 지속적으로 돌아보도록 하여 천천히 꼭꼭 씹으며 읽는 습관을 기를 수 있기를 바랍니다.

3. DGP : 덮어쓰며 계산 빠르게

다양한 색이 등장하는 해설지의 가장 큰 장점은 색깔에 순서를 배정할 수 있다는 것입니다. 따라서 문제를 캡처한 사진 위에 필자가 직접 손으로 풀이하고, 각각의 필기를 어떤 이유로 하게 되었는지 설명해 주는 식으로 해설하는 〈덮어쓰며 계산 빠르게 = DGP〉가 있습니다.
수능 수학을 잘 하는 사람은 그 풀이에서 품격이 드러난다고 생각합니다. 잘 하면 잘 할수록 문제풀이 과정이 더욱 간결하고 필기에 군더더기가 없으며, 적절한 생략(암산)을 통해 시간을 획기적으로 줄입니다. 이런 '최상위권만의 노하우'를 DGP를 통해 얻어갈 수 있기를 바랍니다.
무슨 소리인지 잘 모르겠다고요? 읽어보시면 아실 겁니다!

24학년도 9월 모의고사 - 수학

<공통>

1) 수학1 - 지수법칙

원래대로라면 $\left(3^{1-\sqrt{5}}\right)^{1+\sqrt{5}}$로 구해야 하는 문제가 나왔겠지만 왠지 이번엔 아니므로 속지 말자. 그냥 같은 밑을 가진 두 수의 곱이므로 지수의 덧셈으로 해결하자.
$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}} = 3^{1-\cancel{\sqrt{5}}+1+\cancel{\sqrt{5}}} = 3^2 = 9$이다. 정답은 5번.

2) 수학2 - 미분계수의 정의

다항함수는 무한 번 미분가능하므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1} = f'(1)$이라고 자신있게 적을 수 있다. $f'(x) = 4x - 1$이므로 $f'(1) = 4 - 1 = 3$이다. 정답은 3번. 참고로 이 1은 정답에 아무런 관계가 없다. 함수의 식이 이미 미지수 없이 제시되어 있으므로 $f(1) = 1$이라고 식을 세울 필요가 없다(소용없기 때문이다).

3) 수학1 - 삼각함수의 부호

$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$이므로 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 사용해 사인 먼저 구해보자.
$\sin^2\theta = 1 - \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$이므로 $\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$인데, 아직 부호를 모르므로 부호를 알아내보자. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$이므로 θ는 제4사분면의 각이다. 따라서 $\sin\theta < 0, \tan\theta < 0$이고, $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$이 되므로 답은
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/\sqrt{3}}{\sqrt{6}/3} = -\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$가 된다. 정답은 2번.

4) 수학2 - 극한의 정의

사실 별로 해설할 거리가 없다. $x = -2$에서의 우극한은 -2이고, $x = 1$에서의 좌극한은 0이다. 따라서 답은 -2+0=-2이고, 정답은 1번.

5) 수학1 - 등비수열

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3 \cancel{a_8}^{\,r^2}}{\cancel{a_6}} = 12, \quad a_5 + a_7 = 36$$

$a_5 =$ 24 $r^2 = 2.$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 4 \\ \hline 96 \end{array}$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

<DGP - 계산 과정에 유의하자>

1. 세 항에 관련된 식이므로 한 항에 관련된 식으로 줄여볼 수 있다면 줄여보자. $a_8 = a_6 \times r^2$(r은 공비)이므로 $\dfrac{a_8}{a_6} = r^2$이다. 따라서 그림과 같이 약분할 수 있고, r^2을 a_3와 곱해 a_5를 얻었다.
2. 그러면 자연스럽게 $a_5 = 12$가 나오는데, 이것이랑 a_7을 더해서 36이므로 $a_7 = 24$가 된다.
3. a_5에 비해 a_7이 2배(다른 말로 r^2배) 되었으므로 $r^2 = 2$이다. 이는즉 이 수열은 두 칸 갈 때마다 항의 값이 2배가 됨을 의미한다.
4. 따라서 a_{11}의 값은 a_7에서 두 칸+두 칸 가 $a_7 \times 2 \times 2 = 24 \times 4 = 96$이다. 정답은 5번.

사소한 문제라고 무시하지 말자. 언제나 더 빠르고 편리하며 그럼에도 본질을 잃지 않는 풀이는 있다.

6) 수학2 - 극대와 극소의 정의

$f(-1)$의 값을 구해달라고 했으므로 a, b를 구하면 되겠다. $f(x)$가 $x = 3, -1$에서 극값을 가지므로 $f'(x)$은 $(x+1)(x-3)$을 인수로 가진다. $f'(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $f'(x) = 3(x+1)(x-3) = 3x^2 - 6x - 9$이다. 이제 이 식을 적분하여 $f(x)$를 구해보자. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$(적분상수는 1이라고 제시되어 있다)이므로 답은 $f(-1) = \cancel{-1} - 3 + 9 \cancel{+1} = 6$이다. 정답은 3번.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

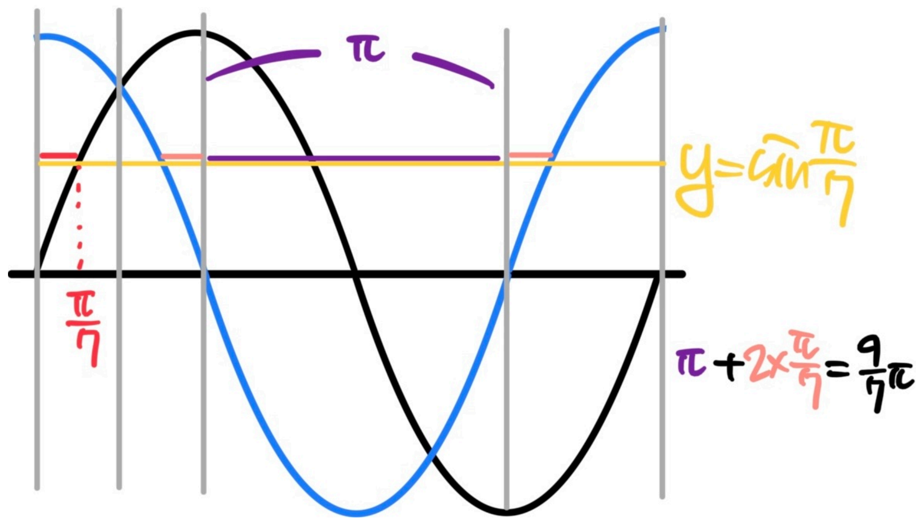
7) 수학1 - 로그의 계산

우리는 $3a+2b$의 값은 알고 있으나 각각의 역수의 합 $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}$의 값은 알고 있는 바가 없다. 분모가 다른 두 분수를 보았을 때 하기 좋은 행동인 '통분'을 해보자.
$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}=\frac{3a+2b}{6ab}$인데, 우리는 이것과 이것을 알고 있으므로 대입해 계산해주면 되겠다.
대입하면
$\frac{\log_3 32}{6\log_9 2}=\frac{1}{6}\times\log_3 32\times\log_2 9=\frac{1}{6}\times\left(5\cancel{\log_3 2}\right)\left(2\cancel{\log_2 3}\right)=\frac{1}{\cancel{6}^{3}}\times 5\times\cancel{2}$
$=\frac{5}{3}$이 된다. '로그의 역수는 밑과 진수를 바꿈'을 잘 기억했길 바란다. 정답은 4번.

8) 수학2 - 부정적분과 방정식

도함수는 원래 함수와 깊은 연관이 있으므로 도함수 식에 있는 미지수 $f(1)$만 잘 구해내면 좋겠다. 근데 $f(1)$을 도함수의 차원에서는 구해낼 방법이 없으므로 $f'(x)=6x^2-2f(1)x$의 양변을 적분해보자. $f(0)=4$이므로 적분상수 C가 4임을 알고 있고, $f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$을 구할 수 있다($f(1)$은 상수임을 꼭꼭 조심하자). 이제 이 식으로부터 어떻게 $f(1)$을 구해낼 수 있을지 고민해보자. x에 다른 수를 대입하면 얻는 정보가 없으므로(예를 들어 $x=a$를 대입한다고 한다면 다른 미지수 $f(a)$가 생겨버린다) $x=1$을 대입해보자. $f(1)=2-f(1)+4$, $2f(1)=6$, $f(1)=3$이므로 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이 되고, $f(2)=16-12+4=8$이 된다. 정답은 4번.

9) 수학1 - 삼각함수의 그래프



$\sin\dfrac{\pi}{7}$에 대해서는 알고 있는 바가 없으므로 이를 식의 관점에서 푸는 것은 무리이다. 그래프를 활용해서 부등식을 해석해보자. $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 그래프를 그리면 $\cos x \le \sin\dfrac{\pi}{7}$인 부분은 직선 $y=\sin\dfrac{\pi}{7}$보다 코사인함수의 함숫값이 더 낮은 부분이 된다. 두 그래프의 교점의 좌표가 $(\alpha, \dfrac{\pi}{7}), (\beta, \dfrac{\pi}{7})$이므로 두 점 사이의 거리를 구해주면 $\beta-\alpha$을 구할 수 있겠다.

여기서 중요한 점은 이 선분을 크게 세 부분으로 나눌 수 있다는 점이다. 그림에 표현된 빨간색 선분의 길이가 $\dfrac{\pi}{7}$과 같은데, 사인/코사인의 대칭성에 의해 분홍색 선분의 길이와도 같기 때문이다. 가운데 부분은 주기의 절반인 π와 같으므로 구하고자 하는 선분의 길이는 $\pi+2\times\dfrac{\pi}{7}=\dfrac{9}{7}\pi$이다. 정답은 3번.

참고로, $\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos x=\cos(2\pi-x)$을 사용하는 방법이 있다.

$\sin\dfrac{\pi}{7}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{7}\right)=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{7}\right)$이므로

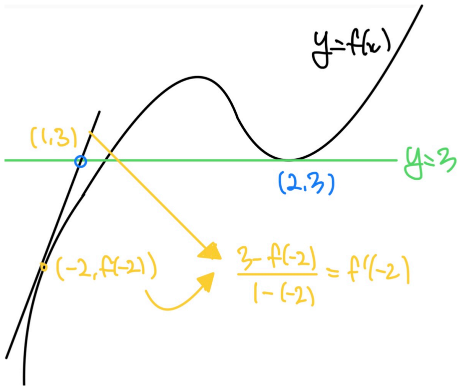
$\beta-\alpha=2\pi-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{7}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{7}\right)=\pi+\dfrac{2}{7}\pi=\dfrac{9}{7}\pi$로 구할 수 있다. 이 방법은 삼각함수의 대칭성을 활용한 풀이와 본질적으로 동등하다.

$\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos x=\cos(2\pi-x)$의 두 식 모두 삼각함수의 대칭성을 의미하고, 삼각함수의 대칭성에 의해 설명될 수 있기 때문이다. 한 번 그래프의 관점에서 부등식을 해결하자고 마음먹었으므로 계속해서 도형의 관점에서 문제를 풀이하는 게 자연스러워서 본 해설과 같이 풀이하였다.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

10) 수학2 - 접선의 정의

한 눈에는 이해되는 바가 별로 없으므로 우선 그림을 그려보자.



점 $(2,3)$에서의 접선이 점 $(1,3)$을 지난다는 것은 이 직선의 기울기가 0이라는 의미이다. 따라서 $f'(2) = 0$을 얻을 수 있다. 또한 두 점 $(1,3), (-2, f(-2))$를 잇는 직선의 기울기가 $f'(-2)$(점 $(-2, f(-2))$를 지나는 접선의 기울기)와 같으므로 $\frac{3-f(-2))}{1-(-2)} = f'(-2)$라고 식을 세울 수 있겠다.

이제 식을 써서 세운 식들이 의미하는 바가 무엇인지 확인해보자. $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 방정식 $f(x) = 3$가 $x = 2$을 중근으로 가지므로 $f(x) = (x-2)^2(x-p)+3$이라고 식을 세울 수 있다. 이제 이 식을 통해 p를 구해보자. 곱의 미분법을 사용하면

$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-2)(x-p)$이므로

$f(-2) = -16(p+2)+3,\ f'(-2) = 16+8(p+2)$에서

$\frac{\cancel{16}^{2}(p+2)}{3} = \cancel{16}^{2} + \cancel{8}(p+2),\ 2p+4 = 6+3p+6$(양변에 3을 곱함),

$p = -8$($2p$,12를 각각 이항함)을 구할 수 있다.

따라서 $f(x) = (x-2)^2(x+8)+3$이 되고, $f(0) = 4 \times 8 + 3 = 35$이다. 정답은 3번.

참고로, 미분한 식이 꼭 예쁘게 모두 전개되어있거나 인수분해되어있을 필요는 없다. $f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-2)(x-p)$와 같이 식을 써도 값이 달라지지 않으므로 편한 계산을 위해 이대로 계산할 수 있다.

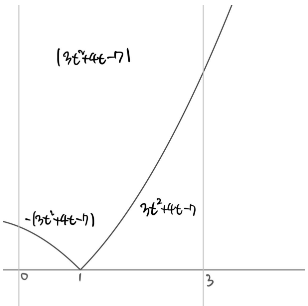
또한, '평균변화율과 순간변화율(미분계수)이 같음'을 활용한 문제는 많이 출제되므로 이 식을 작성하지 못했다면 반성하고 앞으로는 써낼 수 있도록 연습하자.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

11) 수학2 - 위치와 속도

사실 $\left| \int_0^a \left(v_1(t) - v_2(t)\right) dt - 7 \right|$ $= 4$의 방정식을 풀어도 되지만 다른 문제에 비해 이 문제는 '두 점의 시작점이 모두 원점이 아니' 라는 특징이 있어 위치함수를 먼저 구했었다. 그러다보니 본 해설의 풀이가 조금 더 자연스러웠다.

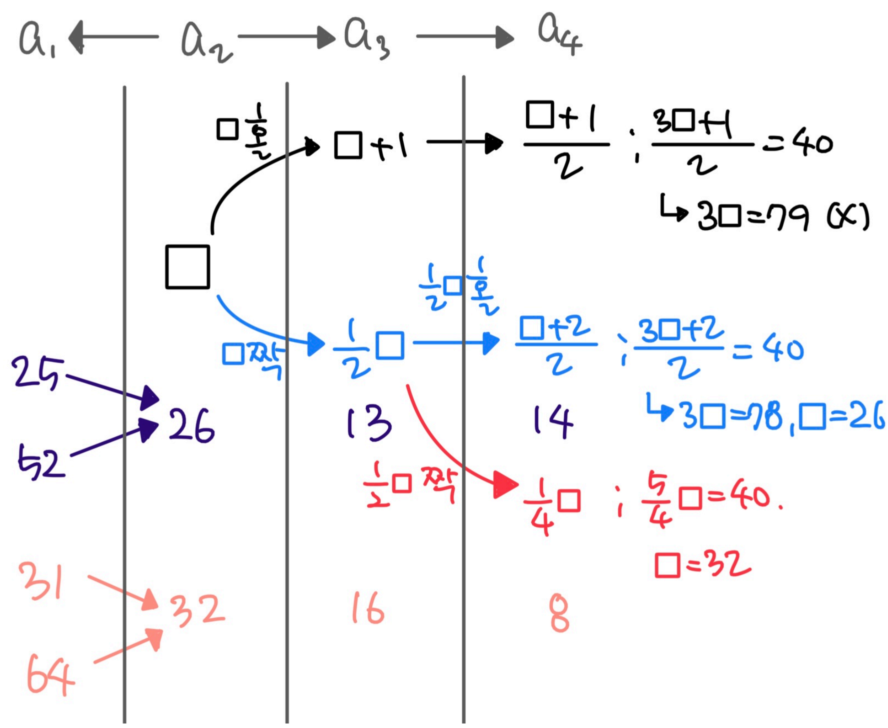
두 점의 시작점이 다르고 속도가 제시되어 있으므로 두 점의 위치 함수를 우선 작성해보자. 위치 함수는 속도 함수의 부정적분이므로 $x_1(t) = t^3 + 2t^2 - 7t + 1$, $x_2(t) = t^2 + 4t + 8$($x(t)$는 위치함수)로 쓸 수 있다. 이제 두 점의 위치의 차 $x_1(t) - x_2(t) = t^3 + t^2 - 11t - 7$의 절댓값이 4가 되도록 방정식을 작성해보면 언제 두 점 사이의 거리가 처음으로 4가 될지도 알 수 있겠다.
$t^3 + t^2 - 11t - 7 = 4, -4$의 두 방정식을 풀어보자. 이때를 먼저 풀어보면
$t^3 + t^2 - 11t - 11 = (t+1)(t^2 - 11) = 0$이므로 양수가 되는 근은 $t = \sqrt{11}$뿐이다. 어차피 마지막 계산은 P가 움직인 거리 $\int_0^? |v_1(t)|dt$가 되어야 할 텐데,
$\int_0^{\sqrt{11}} |v_1(t)|dt$은 계산이 너무 귀찮으므로 다른 방정식도 마저 풀어보자.
$t^3 + t^2 - 11t - 3 = (t-3)(t^2 + 4t + 1) = 0$이므로 양수가 되는 근은 3뿐이다.
$3 < \sqrt{11}$이므로 두 점 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때의 시각은 $t = 3$이 된다.
이제 $\int_0^3 |v_1(t)|dt = \int_0^3 |3t^2 + 4t - 7|dt$의 값을 계산해보자.



$3t^2 + 4t - 7 = (t-1)(3t+7)$이므로 함수 $|3t^2 + 4t - 7|$의 그래프는 왼쪽과 같고, 구해야 하는 적분값은 $\int_0^1 (-v_1(t))dt + \int_1^3 v_1(t)dt$이 된다. $v_1(t)$의 부정적분이 $t^3 + 2t^2 - 7t$이므로 구하고자 하는 적분값은 $\left[t^3 + 2t - 7t\right]_{1\ 1}^{3\ 0}$(두 번 쓰기 귀찮아서 저렇게 쓰곤 한다. 인수분해에 용이해서 생각보다 편하지만 공식적인 표현이 아니라는 단점이 있다) $= 27 + \cancel{18 - 21}^{\,-3} - 2(1 + 2 - 7) = 24 - 2(-4) = 32$(어떻게 저렇게 계산한 건지 고민해보길 바란다)이다. 정답은 5번.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

12) 수학1 - 수열의 귀납적 정의



기본적으로 수열의 귀납적 정의를 사용한 문제는 하나의 항의 값을 미지수로 설정(혹은 주어진 값을 시작으로) 다른 항의 값들을 미지수를 사용하여 표현하는 것이 정석이다. 또한 귀납적으로 정의된 수열은 작은 항→큰 항의 논리 구조를 가지고 있으므로 이에 맞춰 항을 적어나가자. 편의상 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$에서 이쪽을 '위쪽 루트', 이쪽을 '아래쪽 루트'라고 표현하겠다.

〈DGP - 경우를 나눠가며 수형도를 그리자〉

1. $a_2 = \square$로 잡으면 $\square$이 홀수냐, 짝수냐에 따라 어떤 경로로 뒤 항들이 결정될 지가 결정된다. 따라서 우선 '$\square$이 홀수인 경우'를 가정해보자. $a_2 = \square$이면 $a_3 = \square + 1$이 되고, a_3은 자연히 짝수가 된다. a_4는 아래쪽 루트를 사용해서 $\frac{1}{2}(\square + 1)$로 구할 수 있다.
2. $a_2 + a_4 = 40$이므로 $\frac{3\square + 1}{2} = 40$인데, 이 경우 $3\square = 79$이므로 $\square$은 자연수조차 아니다. 따라서 모순이 발생한다.
3. $\square$이 홀수인 경우는 있을 수 없으므로 $\square$은 짝수이고, a_3은 아래쪽 루트를 통해 구해져야 한다. 그런데 이때 또다시 갈림길이 발생한다. $a_3 = \frac{1}{2}\square$가 홀수냐, 짝수냐에 따라 a_4가 어떤 루트를 통해 정해질 지가 결정된다. 우선은 a_3이 홀수인 경우를 먼저 가정해보자. 그러면 a_4는 위쪽 루트를 통해 결정되고, $a_4 = \frac{\square + 2}{2}$가 된다. $a_2 + a_4 = 40$이므로 $\frac{3\square + 2}{2} = 40$에서 $\square = 26$이 된다.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

4. $a_2 = 26$을 통해 $a_3 = 13,\ a_4 = 14$를 구할 수 있고, $26 + 14 = 40$으로 깨알 검산을 해보았다. 이제는 a_1의 값을 구해보자. 어떤 루트를 통해 a_1이 결정될 지에 따라 a_1의 값이 다르게 결정되겠다.
5. $a_1 \to a_2$가 위쪽 루트를 통해 결정된다면 $a_1 + 1 = 26$에서 $a_1 = 25$이다. 25는 홀수이므로 a_1이 홀수라는 전제에 모순이 없다. $a_1 \to a_2$가 아래쪽 루트를 통해 결정된다면 $\frac{1}{2}a_1 = 26$에서 $a_1 = 52$이다. 52는 짝수이므로 a_1이 짝수라는 전제에 모순이 없다.
6. 이렇게 $a_3 = \frac{1}{2}\square$가 홀수일 경우의 모든 a_1값을 구해보았다. 이번에는 a_3이 짝수일 경우를 탐색해보자. a_3이 짝수라면 a_4는 아래쪽 루트를 통해서 결정되고, $a_4 = \frac{1}{4}\square$가 된다. $a_2 + a_4 = 40$을 통해 식 $\frac{5}{4}\square = 40,\ \square = 32$를 구할 수 있다.
7. $a_2 = 32$을 통해 $a_3 = 16,\ a_4 = 8$를 구할 수 있고, $32 + 8 = 40$으로 깨알 검산을 해보았다. 이제는 a_1의 값을 구해보자. 어떤 루트를 통해 a_1이 결정될 지에 따라 a_1의 값이 다르게 결정되겠다.
8. $a_1 \to a_2$가 위쪽 루트를 통해 결정된다면 $a_1 + 1 = 32$에서 $a_1 = 31$이다. 31는 홀수이므로 a_1이 홀수라는 전제에 모순이 없다. $a_1 \to a_2$가 아래쪽 루트를 통해 결정된다면 $\frac{1}{2}a_1 = 32$에서 $a_1 = 64$이다. 64는 짝수이므로 a_1이 짝수라는 전제에 모순이 없다.
9. 따라서 모든 a_1의 값은 $25, 52, 31, 64$이고 이 수들의 합은 172이다. 참고로, 여러 개의 큰 수를 더할 때는 십의 자리끼리, 일의 자리끼리 더하는 것이 팁이다. '십이 $\cancel{2+5+3}^{=10} + 6 = 16$개, 일이 $\cancel{5} + 2 + \cancel{1+4}^{=10} = 12$개이므로 $160 + 12 = 172$'로 구하면 꽤 편하다.

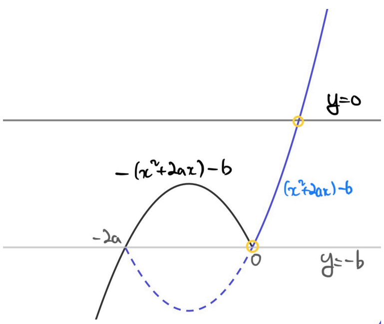
24학년도 9월 모의고사 - 수학

13) 수학2 - 극대/극소를 활용한 변수의 값 설정

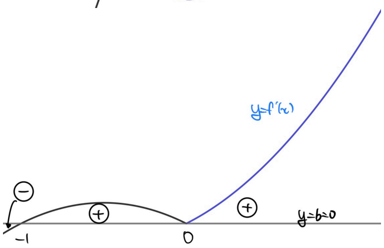
어쩌다보니 $f'(x)$가 연속함수가 되었다.

함수의 증가와 감소를 다루고 있으므로 도함수를 구하는 것이 좋겠다. 위/아래의 구간별로 도함수를 구해보면 $f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - b & (x < 0) \\ x^2 + 2ax - b & (x \geq 0) \end{cases}$의 부호가 '$x < -1$이면 음수, $x > -1$이면 양수'여야 한다고 조건을 해석할 수 있다. 이는즉 $f'(-1) = 0$을 의미하므로($f'(x)$는 연속함수이기 때문이다) $-1 + 2a - b = 0$, $2a - b = 1$을 얻을 수 있다.

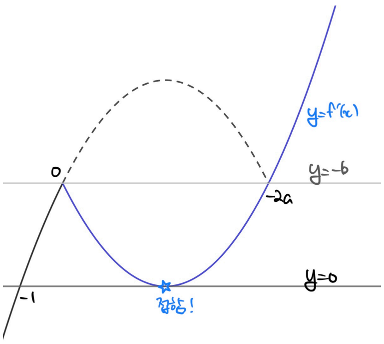
$f'(x)$의 두 식을 유심히 보면 공통점과 차이점이 있음을 알 수 있는데, '이차함수 $x^2 + 2ax = x(x + 2a)$를 빼고/더한 함수 전체를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동'했다고 식을 해석할 수 있다. 따라서 우선 (가장 일반적인) $a > 0$, $b > 0$인 경우를 가정해서 그래프를 그려보자.



$y = f'(x)$의 그래프를 그려보았는데, $a > 0$, $b > 0$인 경우에는 조건을 만족할 수 없음이 보인다. 여기부터 여기까지는 a의값에 상관없이 그 부호가 음수이기 때문이다. 따라서 b는 양수이거나 0이어야 한다. 이로써 우리는 b의 부호에 따라서 조건을 만족하는 $a + b$의 최대/최소를 구해보기로 한다.



우선 $b = 0$인 경우부터 살펴보자. 이미 $2a - b = 1$을 알고 있으므로 $a = \frac{1}{2}$가 된다. 그래프를 그려서 확인해보면 왼쪽과 같은데, '$f'(x)$의 부호가 $x < -1$이면 음수, $x > -1$이면 양수'라는 조건을 만족함을 확인할 수 있다.



이번에는 $b < 0$인 경우를 살펴보자. 왼쪽과 같은 상황을 생각해볼 수 있는데, 우선은 $-2a > -1$, $a < \frac{1}{2}$을 알아낼 수 있겠다. $2a - b = 1$이므로 $b = 2a - 1$, $a + b = 3a - 1$이 되어 a가 커질수록 $a + b = 3a - 1$의 값이 커짐을 알 수 있다. 따라서 $b < 0$, 즉 $a < \frac{1}{2}$인 경우에는 절대로 $b = 0$인 경우보다 큰 $a + b$값을 가질 수 없다. 따라서 $a + b$의 최댓값은 $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$이다.

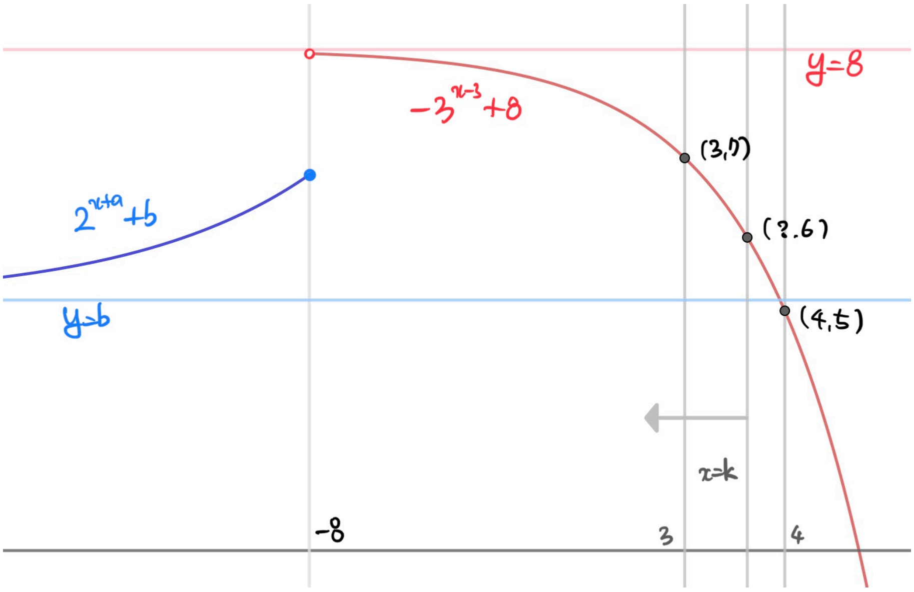
$a + b$의 최댓값을 구했으므로 이번에는 최솟값을 구해보자. 이제는 목표가 'a가 어디까지 작아질 수 있는지'이므로 a가 음수인 경우를 생각해보자. $x < 0$인 상황에는 주요한 순간이 없으므로 $x > 0$일 때만 생각하면 $x^2 + 2ax - b > 0$이 성립해야 한다. 따라서 식 $x^2 + 2ax - b$의 판별식이 0 혹은 음수여야 하고, $D/4 = a^2 + b \leq 0$을 얻을 수 있다. $2a - b = 1$을 대입해서 정리해보면 $a^2 + 2a - 1 \leq 0$, $a^2 + 2a + 1 \leq 2$, $-\sqrt{2} \leq a + 1 \leq \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2} - 1$가 된다. 따라서 a의 최솟값은 $-1 - \sqrt{2}$가 되고, $a + b$의 최솟값은 $3a + 1 = -4 - 3\sqrt{2}$이다.

$M = \frac{1}{2}$, $m = -4 - 3\sqrt{2}$이므로 $M - m = \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}$이다. 정답은 3번.

24학년도 9월 모의고사 – 수학

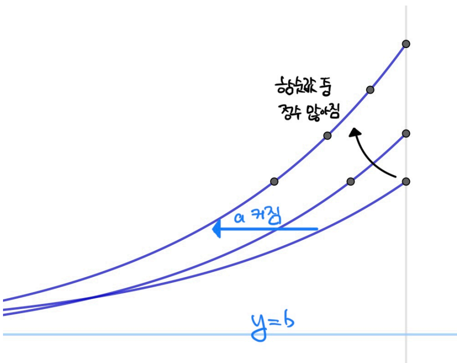
14) 수학1 – 지수함수의 그래프

함수 식을 보니… 느껴지는 게 없다. 일단 $-3^{x-3}+8$의 그래프는 그릴 수 있으니 그려보자.



대략 이렇게 그려볼 수 있겠는데, $x>-8$인 부분은 정확하게 그릴 수 있으나 $x\le-8$인 부분은 그릴 수 없다. 확실한 것은 우선 '$(-8, f(-8))$에서 시작해서 왼쪽 아래로 그려진다' 정도..?

이제 상자의 내용을 읽어보니 '$x\le k$인 부분들의 함숫값들의 집합 중 정수가 2개이려면 $3\le k<4$ 여야 함'이라고 하는데, $2^{x+a}+b$가 어떻게 그려져야 조건을 만족할 수 있을지 고민해보자.



a, b가 각각 어떤 역할을 하는지 다시 되짚어보자. a는 지수함수의 x축 방향으로의 평행이동을 결정하며, 이 문제의 상황에서는 $x\le-8$일 때의 함숫값 중 정수가 몇 개가 들어갈 지를 결정해준다. 왼쪽의 그림에서 알 수 있듯 a의 값이 커지면 커질수록 $x\le-8$일 때의 함숫값 중 정수가 많아진다. b는 지수함수의 높낮이를 결정하며, 이 문제의 상황에서는 a가 결정해준 '함숫값 중 정수'가 얼마나 큰지를 결정해준다. b가 커질수록 함숫값(과 함숫값 중 정수인 것들)이 커진다.

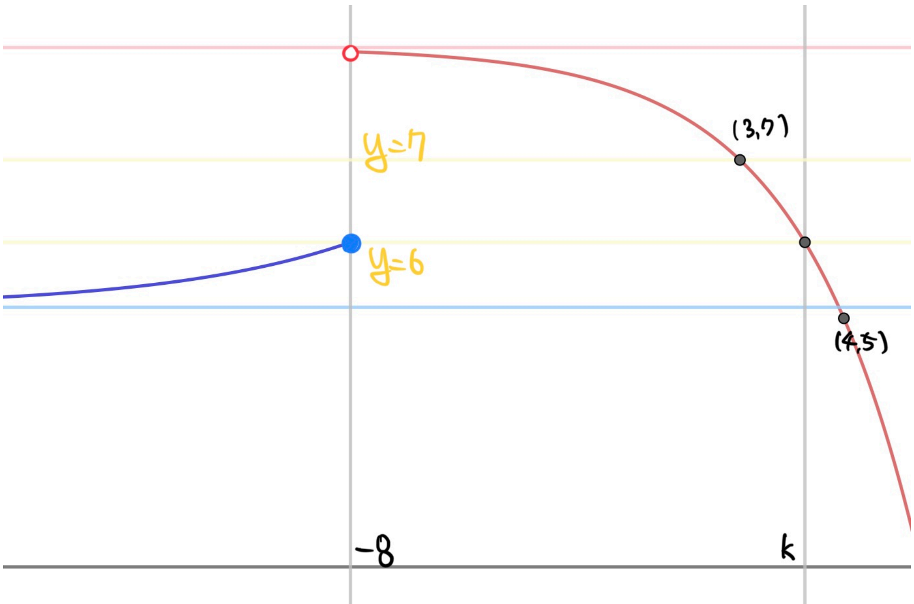
이렇게 문제의 상황과 a, b의 역할에 대해서 고민해보았다. 사실 a, b의 역할은 기본 개념을 문제 상황에 적용한 것에 불과하니 너무 어렵게 생각하지 말자. 시험장에서까지 이렇게 논리정연하게 알아낼 필요는 없고, 대략적인 '느낌적인 느낌'만 알아도 충분하다. 그러나 '해설'의 관점에서는 꼭 필요한 서술이어서 적어보았다.

이제 a, b가 얼마가 되어야 하는지 추론해보자. $f(3)=7,\ f(4)=5$를 계산할 수 있는데, 이를 통해서 조건의 '함숫값 중 정수인 것들'이 7과 6이어야 한다는 점을 알아낼 수 있다. k가 4 직전까지 괜찮다는 것은 함숫값이 5까지 떨어지기 직전까지 조건(함숫값 중 정수가 두 개)를 만족한다는 의미이기 때문이다.

이로써 'a가 너무 커서 $x \le -8$일 때의 함숫값 중 정수가 3개 이상이 되면 안 된다'는 사실을 알아낼 수 있다. 그리고 하나 더 알아낼 수 있는데, 바로 'a가 너무 작아서 $x \le -8$일 때의 함숫값 중 정수가 0개이면 안 된다'는 점이다. 그렇게 되면 $k = 3$일 때 $x \le k$인 부분들의 함숫값 중 정수인 것이 7뿐이기 때문이다.

그러면 $x \le -8$일 때의 함숫값 중 정수가 1개이면 어떨까? $k = 3$일 때 $-8 < x \le k$인 부분들의 함숫값 중 정수인 것이 7뿐이어서 조건을 만족하지 못했다면 $x \le -8$일 때의 함숫값 중에서 7이 아닌 나머지 하나를 보강해주면 될 것이다. 그렇다면 그 나머지 하나는 얼마여야 할까? $3 < k < 4$일 때도 조건을 만족시키려면 이 정수는 6이어야 할 것이다. 그렇지 않으면 $-8 < x \le k$일 때 함숫값 중 정수가 7, 6으로 두 개가 될 때 전체($x \le k$인 부분) 함숫값 중 정수가 세 개가 될 것이기 때문이다.

정답의 그림이다.



앞의 상황에서 a, b의 값을 구해보자. $x \le -8$일 때의 함숫값 중 정수가 1개이므로 그 값은 $b+1$(이자 6)이어야 하므로 $b+1 = 6$, $b = 5$이다. $2^{x+a} + 5 = 6$인 상황은 $x = -a$일 때 발생하므로 $-a = -8$, $a = 8$이 된다. a가 8보다 커지면 $x \le -8$일 때 함숫값 중 정수의 개수가 2개 이상이 된다. 예를 들어 $a = 9$인 경우 $f(-9) = 6$, $f(-8) = 7$이 된다. 따라서 $a + b = 8 + 5 = 13$이고, 정답은 2번.

참고로 $x \le -8$일 때 함숫값 중 정수의 개수가 2개여도 안 된다. $k < 3$(즉 $-8 < x \le k$일 때 함숫값 중 정수가 없음)일 때는 조건을 만족하면 안 되기 때문이다.

a, b의 값을 조금씩 조정해가며 조건을 만족시키는 정답의 개형을 찾아나가는 추론 과정을 잘 이해했다면 좋겠다.

15) 수학2 - 삼차함수의 식과 극한

문제를 쭉 읽어보고 가장 중요해 보였던 점은 $\lim_{x\to3} g(x) \neq g(3)$이라는 점이었다. $g(x)$는 삼차함수를 가지고 만들어진 함수이기에 웬만하면 연속일텐데, 불연속이라는 의미이기 때문이다. $\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$는 $f(x) \neq 0$일 때 항상 연속(연속함수를 연속함수로 나누면 연속이다)이므로 $g(x)$가 $x=3$에서 불연속이라는 말을 가지고서 $f(3)=0$을 알아낼 수 있겠다. $g(3)$는 $\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$의 식이 아닌 $g(x)=3\ (f(x)=0)$에서 결정된다는 의미이기 때문이다. 그렇다면 $g(3)=3$역시 알아낼 수 있겠다.

이제 $\lim_{x\to3} g(x) = g(3)-1$을 다시 해석해보자. $f(3)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x^2+\cdots)$의 꼴로 쓸 수 있다. 또한 $g(3)=3$이므로 $\lim_{x\to3} g(x)=2$을 구할 수 있다. $\lim_{x\to3} g(x)$가 수렴해야 하는데 $\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$의 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 하지만, $f(x)+1$은 $0+1$로 수렴하므로 $f(x+3)$이 0으로 수렴해줘야 극한값이 존재할 수 있다. 따라서 $\lim_{x\to3} f(x+3)=f(6)=0$이 되고, $f(x)=(x-3)(x-6)(x-p)$로 $f(x)$ 식을 다시 작성할 수 있다(이제 목표가 p를 구하는 것으로 바뀐 것이다).

$\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$을 다시 써보면

$$\lim_{x\to3}\frac{x\cancel{(x-3)}(x+3-p)\{\to 1\text{로 수렴할 운명}\}}{\cancel{(x-3)}(x-6)(x-p)} = \frac{\cancel{3}(6-p)}{\cancel{(-3)}^{-1}(3-p)} = \frac{6-p}{p-3} = 2$$

이므로 $6-p=2p-6,\ p=4$를 구할 수 있다. 따라서 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$이고, $f(5)\neq0$이므로 $g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$

$$= \frac{(5\cdot4\cdot\cancel{2})(\cancel{-1})}{\{\cancel{2}\cdot1\cdot(\cancel{-1})\}} = 5\times4=20$$이다. 정답은 4번.

참고로 이 부분을 먼저 계산하고 이 부분은 1만 더해서 특별한 계산 없이 끝낸 것이다.

16) 수학1 - 로그의 방정식

$\log_4(13+2x)=\frac{1}{2}\log_2(13+2x)$임을 활용하여 양변에 2를 곱하면 $\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$이므로 양변의 진수가 같음에서 $x^2-2x+1=13+2x$을 얻을 수 있다. 정리하면 $x^2-4x-12=0,\ (x-6)(x+2)=0$이 되므로 $x=6,-2$인데, 이 중 진수가 양수가 되도록 하는 x값은 $x=6$뿐이다. 따라서 정답은 6.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

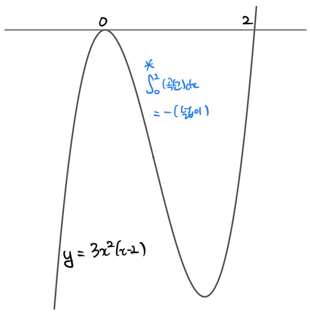
17) 수학1 - 시그마의 계산

$\sum_{k=1}^{10} a_k$, $\sum_{k=1}^{10} b_k$를 각각 구하려고 하면 안 된다. 물론 되긴 하나 (미묘하게나마) 돌아간다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 바로 $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 34 - 10 = 24$를 얻을 수 있다. 정답은 24.

18) 수학2 - 곱의 미분법

사실… $x^2 + 1$은 그냥 $x = 1$을 대입하든 미분해서 $x = 1$을 대입하든 똑같이 2이다. 따라서 필자는 $(x^2 + ax + 3)' = 2x + a$를 활용해 $2(1 + a + 3 + 2 + a) = 32$, $2a + 6 = 16$, $a = 5$를 구했다. 그러나 정석으로 다시 한 번 구해보자면 $f'(x) = 2x(x^2 + ax + 3) + (x^2 + 1)(2x + a)$이므로 $f'(1) = 2(4 + a) + 2(2 + a) = 2(2a + 6)$(공통인수 2로 인수분해, 인수분해는 틈틈히 하길 바란다) $= 32$, $2a + 6 = 16$, $2a = 10$, $a = 5$을 구할 수 있다.

19) 수학2 - 그래프 사이의 넓이

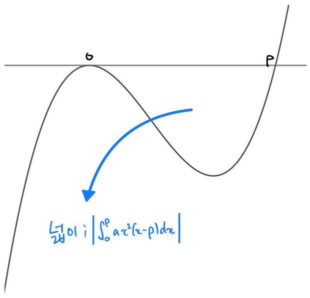


두 그래프의 식을 빼보면 $3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x - 2)$가 되는데, 이는 두 곡선 사이의 넓이가 왼쪽의 그래프와 x축이 만드는 도형의 넓이와 동일하다는 의미가 된다. 따라서 $\int_0^2 (3x^3 - 6x^2)dx$를 계산하면 $\left[\frac{3}{4}x^4 - 2x^3\right]_0^2 = 12 - 16 = -4$이므로 정답은 4이다.

사실 삼차함수의 넓이 공식을 알고 있다면 적분 계산 없이 바로 정답이 $\cancel{3} \times \frac{2^4}{\cancel{12}\,4} = 4$임을 구할 수 있긴 하다. 그러나 모르는 사람들을 위해 적분해보았다.

참고 : 삼차함수의 넓이 공식

점점 중요해지고 있는 공식이라 소개해보겠다. 최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 중근을 가지고, $x=\beta$에서 근을 가질 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이는 $|a|\dfrac{(\beta-\alpha)^4}{12}$와 같다. 증명을 위해서 조금 더 간소화한 버전을 소개하겠다. 이것만 외워보자.



'최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $f(x)$가 한 점에서 중근, 다른 한 점에서 근을 가질 때 두 실근의 차이를 $p\,(p>0)$라고 하면 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이는 $|a|\dfrac{p^4}{12}$이다.'

증명을 위해 한 근이 0이고 다른 한 근이 p인 경우 : $f(x)=ax^2(x-p)$인 경우를 생각한다면 이 곡선과 x축 사이의 넓이는 $\left|\int_0^p ax^2(x-p)dx\right|$와 같다. 절댓값 안을 계산하면 $a\int_0^p (x^3-px^2)dx = a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^p = -\frac{ap^4}{12}$가 되므로 (넓이)=
$\left|\int_0^p ax^2(x-p)dx\right| = \left|-\frac{ap^4}{12}\right| = |a|\frac{p^4}{12}$가 된다.

20) 수학1 - 사인/코사인법칙

증명 빈칸 채우기 문제의 기본은 '왜 어떤 문장을 작성했는지 이해하며 넘어가는 것'이다. 천천히 읽어보며 해결해보자.

우선 $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$라는 말은 사인법칙에서 나온 것인데, $2R_1=\frac{\overline{BD}}{1/\sqrt{2}}$에서 비롯된 것이다. 같은 이치로 $R_2=$ (가) $\times\overline{BD}$를 사인법칙을 통해 해석해보자.

$2R_2=\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{\overline{BD}}{\sqrt{3}/2}$이므로(참고로 이 계산은 생략해서 암산을 추천한다)

$R_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}$가 된다.

계속해서 코사인법칙을 사용하면 $\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$에서

$2\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{2}{3}\pi=-2$이므로 $\overline{BD}^2=4+1-(-2)=7$이다.

이 두 식을 변변 곱하고 $\overline{BD}^2=7$을 대입하면 $R_1R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times7=\frac{7}{\sqrt{6}}$을 얻을 수 있다.

$p=\frac{1}{\sqrt{3}},\ q=-2,\ r=\frac{7}{\sqrt{6}}$이므로 정답은

$9(pqr)^2=9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times(-2)\times\frac{7}{\sqrt{6}}\right)^2=9\left(\frac{7\sqrt{2}}{3}\right)^2=\cancel{9}\times\frac{2\times49}{\cancel{9}}=98$이다.

21) 수학1 - 시그마의 계산

수열의 합 공식을 일반적인 시그마의 합으로 승화시킨 문제라고 할 수 있다. 국룰(?)답게 $a_n = a + d(n-1)$로 두면 우선 $a + 6d$가 13의 배수임을 얻을 수 있고 $S_n = an + d\dfrac{n(n-1)}{2}$을 얻을 수 있다. 이 식을 또다른 하나의 수열의 일반항으로 간주해 더할 것이므로 n에 대해 내림차순으로 정리하면 $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a - \dfrac{d}{2}\right)n$이 되겠다.

이제 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} S_k$의 값을 구해보자. 사실 그냥 꾹 참고 계산해 보는 것이 최선이다.

$$\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n\right\} = \frac{d}{\cancel{2}} \times \frac{7 \cdot \cancel{8}^{2} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{6}^{\cancel{3}}} + \left(a - \frac{d}{2}\right) \times \frac{7 \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}}$$

$= 70d + 28a - 14d = 28a - 56d = 644$가 된다. 644가 28로 나누어떨어지리란 믿음을 가지고 양변을 28로 나누면 $a + 2d = 23$이 된다.

따라서 이 말은 곧 '$23 + 4d$가 13의 배수'라는 말이 되는데, 이때 d의 값은 무엇일까? 안타깝지만 현실적인 방법은 '찍기'라고 생각한다. 사실 23보다 큰 13의 배수를 떠올려 보면… 작은 수부터 26, 39, 52 등등이 떠오를텐데, $23 + 4d$는 홀수이므로 39부터 떠오르게 되고, $23 + 4d = 39,\ 4d = 16,\ d = 4$가 마침 딱 들어맞는다. 따라서 $a = 15,\ a_2 = a + d = 19$가 된다. 정답은 19.

참고로, '모든 항이 자연수'라는 데에서 힌트를 찾아서 엄밀하게 풀 수도 있다. $23 + 4d$가 13의 배수이므로 $d = 4 + 13k$(k는 0 이상의 정수)꼴이어야 하는데, 그렇게 되면 $a = 23 - 2d = 15 - 26k$가 자연수가 되기 위해서 $k = 0$ 이어야 한다. $k \geq 1$이면 $a < 0$이 되기 때문이다.

22) 수학2 - 정적분으로 정의된 함수와 곱의 미분법

위에서부터 읽어가며 조건을 해석해보자. (가) 조건에 정적분으로 정의된 함수가 하나 등장했다. 다른 생각을 거치지 않고 하기로 했던 두 가지 습관을 실천해보자. 첫 번째는 '위끝-아래끝 맞추기'이다. $x = 1$을 양변에 대입하면 $0 = f(1) - 3$, $f(1) = 3$을 얻을 수 있다. 두 번째는 '양변 미분해보기'이다. 양변을 미분하면
$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) - 4x$, $f'(x) = 4$가 되므로 $f(1) = 3$을 고려하면
$f(x) = 4x - 1$이 된다. (가) 조건만 읽었는데 $f(x)$의 식을 얻었다니 기분이 좋다.

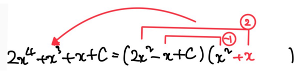
이번엔 (나) 조건을 읽어보자. 좌변이 '원래 함수×적분한 함수' 꼴이므로 곱의 미분법이 떠오른다. 그러고보니 좌변이 $(F(x)G(x))'$임을 알아낼 수 있고, 양변을 적분하여 $F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C$을 얻어낼 수 있다. 그러고보니 문제에서 물어보는 $\int_1^3 g(x)dx$도 $G(3) - G(1)$의 값과 같으므로 앞으로 우리가 다뤄야 할 함수가 f, g의 차원이 아닌 F, G의 부정적분의 차원이 아닐까 하고 예상해볼 수 있겠다.

따라서 $f(x) = 4x - 1$도 양변을 적분하여 $F(x) = 2x^2 - x + C'$(다른 적분상수를 사용했다는 의미에서 C'을 사용했다. 미분했다는 뜻이 아니다)라고 쓸 수 있고,
$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C$을 활용하여
$2x^4 + x^3 + x + C = (2x^2 - x + C')G(x)$(로 인수분해할 수 있음)을 얻어낼 수 있다. 무작정 $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$로 둬서 방정식을 풀기 전에 잘 생각해보자. 사차식이 이차식과 (?)차식의 곱으로 이루어져 있다고 한다면, (?)는 이차식이 되어야만 한다. 그리고 최고차항의 계수를 맞추려면 $G(x)$의 최고차항의 계수가 1이 되어야 함도 알 수 있다. 따라서 $2x^4 + x^3 + x + C = (2x^2 - x + C')(x^2 + ax + b)$처럼 쓸 수 있는데, 위 식은 항등식이므로 삼차항을 비교해보면 $1 = -1 + 2a$, $a = 1$을 얻을 수 있다. 이번에는 이차항을 비교해보면 $0 = C' - 1 + 2b$, $C' + 2b = 1$을 얻을 수 있다. 일차항을 비교해보면 $C' - b = 1$, $C' = b + 1$이 되는데, 이를 여기에 대입하면 $3b + 1 = 1$, $b = 0$을 구할 수 있다. 다시 대입해보면 $C' = 1$, $C = 1 \times 0 = 0$이다. 따라서 $F(x) = 2x^2 - x + 1$, $G(x) = x^2 + x$이고, $\int_1^3 g(x)dx$
$= G(3) - G(1) = 12 - 2 = 10$이다. 정답은 10.

뒤 페이지에 중요한 참고사항이 있으니 놓치지 말자.

참고 : 다항식 곱할 때 빈칸 채워나가기

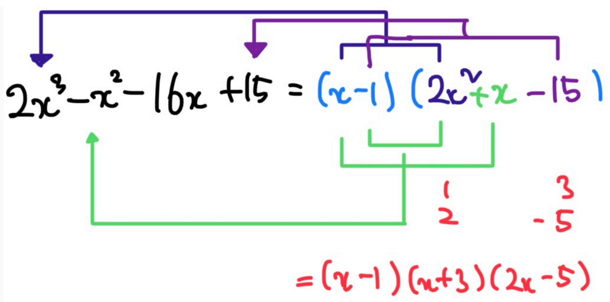
필자는 $2x^4+x^3+x+C=(2x^2-x+C')G(x)$의 식을 구한 순간에 이 방법을 사용하여 $G(x)=x^2+x+$(상수항은 상관없음)을 구해냈는데, 그 방법을 잘 이해해보고 활용해보자. 분명 획기적으로 시간과 노력이 줄어들 것이다.



왼쪽 그림처럼 식이 쓰여져 있는 상태에서 인수분해를 할 때 우선 차수부터 파악했다. 본 풀이에서 사용했듯 이차식과 이차식이 곱해야 사차식이므로 $G(x)$는 이차식이 된다. 또한 최고차항의 계수가 1이어야 한다. 곱한 함수의 최고차항은 각각의 최고차항의 곱과 같기 때문이다. 그리고 계수를 하나씩 비교해 나가면서 빈칸을 채우는 전략(미지수를 도입하는 것이 아니다)을 사용했다. 삼차항을 비교하면 $F(x)$의 일차식과 $G(x)$의 이차식을 곱해서 이미 $-x^3$이 곱해져 있는데, 다른 삼차식 하나를 더해서 x^3이 되려면 $F(x)$의 이차식$(2x^2)$과 $G(x)$의 일차식을 곱한 것이 $2x^3$이 되어야 한다. 따라서 $G(x)$의 일차항은 x가 된다.

또한 정적분을 구할 때는 부정적분의 상수항이 필요없으므로 굳이 b를 구할 필요가 없고, 바로 $\int_1^3 g(x)dx=\left[x^2+x+?\right]_1^3=12-2=10$을 구할 수 있다. $G(x)$의 식을 구하는 데에서 수학(상)의 지식이 활용되었고, 정적분을 구할 때 상수항을 무시하는 과정에서는 수학2의 적분에 관련한 지식이 필요했다.

이 내용이 잘 이해되지 않을까봐 다른 인수분해 문제를 가져왔다. 다항식 $2x^3-x^2-16x+15$을 인수분해해보자.



1.어떤 다항식 $f(x)$가 $f(a)=0$을 만족한다는 말은 $f(x)$에 $x=a$를 대입하면 그 값이 0이 된다는 말이다. 또한 $f(1)=0$이라는 말은 '모든 계수(+상수항)의 합이 0이라는 말이 된다'는 말이 된다. $f(1)=0$이 되나 확인해 보니… $2-1-16+15=0$으로 이 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어져야 한다!

2.따라서 그림과 같이 식을 쓸 수 있다(조립제법을 활용하지 않았다는 것이 아주 큰 장점이다. 본 풀이가 찍기 같아 보일 수 있으나 조립제법 또한 근본적으로 찍기이다). 이제 비어있는 괄호의 빈칸을 채워보자. 최고차항의 계수가 2인 삼차식은 일차식$(x-1)$에 최고차항의 계수가 2인 삼차식을 곱해야 하므로 맨 앞 자리에 $2x^2$을 적었다. 또한 두 다항식의 상수항끼리 곱하면 곱한 식의 상수항이 나오므로 $15=(-1)\times ?$에서 $?=-15$가 된다. 빈칸의 세 항 중 벌써 두 항을 채운 것이다.

3. 이제 양변의 이차식(일차식을 비교해도 결과는 같다)을 비교하면 이렇게 곱해서 $-2x^2$, 이렇게 곱해서 $?x^2$이므로 $?-2=-1,\ ?=1$($?-2$를 읽을 때 '어떤 수에어 2를 뺐더니 -1이 나왔습니다'로 읽어야 한다)가 된다.

4. 이제 이차식 $2x^2+x-15$를 인수분해해보자. 일명 'X자 방법'을 통하여 $2x^2+x-15=(2x-5)(x+3)$을 인수분해할 수 있고, 답은 $(x-1)(x+3)(2x-5)$가 된다.

조립제법이나 여타 화려한 방법을 사용하지 않고 다항식의 전개만을 활용하여 간단하게 암산할 수 있는 사고 과정이므로 꼭 기억하자. 조립제법은 최후의 수단으로 미뤄두는 것도 방법이다.

24학년도 9월 모의고사 - 수학

<미적분>

23) 미적분 - 초월함수의 극한

분모와 분자가 1로 수렴하도록 각각 곱해주면 $\lim_{x \to 0} \dfrac{(e^{7x}-1)/7x}{(e^{2x}-1)/2x} \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2}$이다. 정답은 4번.

24) 미적분 - 매개변수로 나타내어진 곡선의 기울기

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$를 이용하여 x, y를 각각 t에 대해 미분하면

$\dfrac{dx}{dt} = 1 - 2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 2\sin t \cos t$이다. $t = \dfrac{\pi}{4}$일 때

$\dfrac{dx}{dt} = 1 - 2\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$, $\dfrac{dy}{dt} = 2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4} = 1$이므로 답은 $\dfrac{1}{-1} = -1$이다. 정답은 2번.

25) 미적분 - 치환적분

그냥 전개해서 각각 적분해도 문제없어 보이지만 $f'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \dfrac{1}{x}$을 활용하면 구하고자 하는 적분은 $\displaystyle\int_1^e f'(x)f(x)dx = \left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$

$= \dfrac{1}{2}\{(e+1)^2 - 1^2\} = \dfrac{1}{2}e(e+2)$(합차공식) $= \dfrac{e^2+2e}{2} = \dfrac{e^2}{2} + e$이다. 정답은 2번.

참고로 그냥 전개해서 적분하면 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x+\ln x) = x + \ln x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$이므로 구하고자 하는 적분은 $\left[\dfrac{x^2}{2} + (x\ln x \cancel{-x})\cancel{+x} + \dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \dfrac{e^2}{2} + e$로 (당연히) 같다.

26) 미적분 - 다양한 수열의 급수

수열 $\{a_n\}$은 1부터 시작하는 등차수열이므로 일반항을 $a_n = 1 + d(n-1)$로 적을 수 있겠고, 수열 $\{b_n\}$은 $\{a_n\}$와 처음 항은 같고 두 번째 항은 역수 관계인 등비숭ㄹ이다. $a_2 = 1 + d$이므로 $b_2 = \dfrac{1}{d+1}$이 되고, 수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\dfrac{1}{d+1}$가 된다.

이제 문제에서 제시한 시그마를 읽어보면 크게 교대급수($\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$)와 등비급수($\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$)으로 나눌 수 있다. 미지수가 d 하나뿐이므로 d를 사용해서 두 급수를 모두 표현해보자. 교대급수는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$을 활용해서 $\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1} - \cancel{\dfrac{1}{a_2}} + \cancel{\dfrac{1}{a_2}} - \cancel{\dfrac{1}{a_3}} + \cdots\right) = \dfrac{1}{d}$($a_1 = 1$이기 때문이다)로 구할 수 있고, 등비급수는 첫 항이 $b_1 = 1$, 공비가 $\dfrac{1}{d+1}$이므로 $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{d+1}} = \dfrac{1}{\frac{d}{d+1}} = \dfrac{d+1}{d}$로 계산할 수 있다. 따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = \frac{1}{d} + \frac{d+1}{d} = \frac{d+2}{d}$인데, $\dfrac{d+2}{d} = 2$이므로 $d = 2$이다. 참고로 식 $\dfrac{d+2}{d} = 2$을 'd에 2를 더했더니 2배가 됨 : 2가 d의 1배(2배에서 원래를 뺀 것)인거임 : $d = 2$'로 해석하는 것이 팁이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$이다. 정답은 5번.

다음 페이지에 참고사항이 있으니 놓치지 말자.

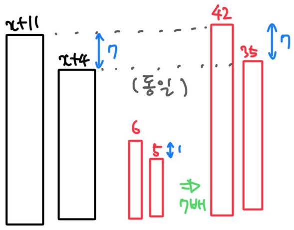
24학년도 9월 모의고사 - 수학

참고 : 비율로 분수 해석하기

필자는 이 내용을 '대성마이맥 김준 선생님'으로부터 배웠다. 지금은 무료강좌에 포함되어있는 내용이다. 선생님께 존경을 표한다.

화학 인강을 들으며 배운 계산 방법인데, 수학에서도 활용하기 용이해서 소개해 본다. 예를 들어 $\dfrac{x+10}{x}=3$일 때 x의 값은 얼마일까? 이때 식을 '(분모)에서 (분자에서 분모를 뺀 것 = 변화량)을 더했더니 (우변)배가 되었어요'로 해석하는 것이다. 생각해보면, 원래 x만큼 있던 것에 10을 더했더니 3배가 되려면, 더해준 10이 원래 x의 2배여야 한다. 따라서 $x=5$로 구할 수 있다. 지금은 그냥 양변에 x를 곱하는 방법이 편해 보일지 모르겠으나, 다른 조금 더 복잡한 경우를 보면 말이 달라진다.

$\dfrac{x+11}{x+4}=\dfrac{6}{5}$를 풀어보자. '원래 $x+4$에서 7($=(x+11)-(x+4)$)을 더했더니 $6/5=1.2$배가 되었어요'로 해석하면 7이 $x+4$의 0.2배(즉 1/5)가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 7의 5배(=35)가 $x+4$이고, $x=31$이다. 이번에는 확실히 X자 모양으로 곱하는 방식보다 편해 보인다.



이 그림이 설명이 되었다면 좋겠다.

다른 방식으로 이 풀이 방법을 설명해보자면, 예를 들어 $\dfrac{x+11}{x+4}=\dfrac{6}{5}$를 풀 때 $6:5$의 비를 가지며 그 차가 $(x+11)-(x+4)=7$인 두 수를 떠올리는 것이다. $6:5$의 비를 가지는 두 수는 무수히 많지만 그중에서 차이가 7인 두 수는 오직 한 경우뿐이다. 이때 6과 5의 차이인 1이 7배 되면 7이 됨을 활용하여 $6:5$의 비를 가지며 그 차가 7인 두 수를 $(6\times 7,\ 5\times 7)=(42{,}35)$라고 구하는 것이다. 따라서 $x+4=35$이고, $x=31$이 된다.

27) 미적분 - 곡선의 길이

절댓값을 볼 때 중요한 습관은 절댓값 내부의 부호를 구분하는 것이다. $x>0$일 때 $e^x-1>0$이므로 곡선의 방정식이 $\dfrac{1}{2}\left(e^x-1-e^x+1\right)=0$이 되는데, 이는 $x>0$에서 이 곡선은 x축과 동일한 직선이 된다는 의미이다. 따라서 $x=0$에서 $x=1$까지의 곡선의 길이는 두 점 $(0{,}0)$, $(1{,}0)$을 잇는 선분의 길이와 같으므로 1이다.

이번에는 $x<0$일 때를 분석해보자. $x<0$일 때 $e^x-1<0$이므로 곡선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}\left(1-e^x-e^{-x}+1\right)=1-\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$이 된다. 이제 곡선의 길이를 구하는 식 $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$을 사용하면 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$이므로

$1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\dfrac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)=\dfrac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)$가 되어

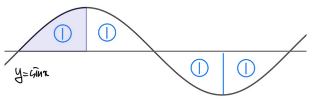
$$\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{-\ln 4}^{0}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx=\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_{-\ln 4}^{0}$$

$=\dfrac{1}{2}(\cancel{1-1})-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-4\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{4}=\dfrac{15}{8}$이 된다. $x=0$에서 $x=1$까지의 곡선(사실 직선)의 길이 1을 더한 $\dfrac{15}{8}+1=\dfrac{23}{8}$이 답이다. 정답은 1번.

28) 미적분 - 삼각함수의 적분

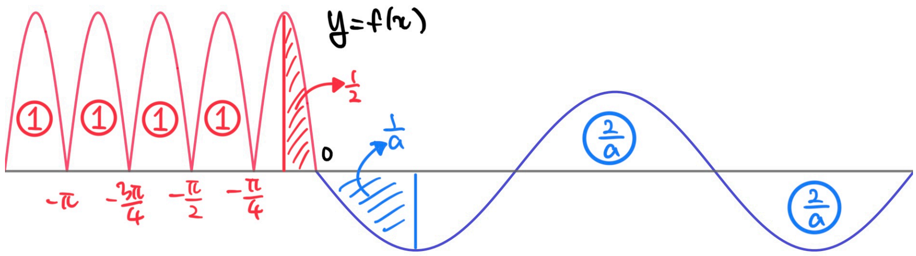
이번 문제는 참고사항을 알고 있으면 풀이와 해설의 난이도가 급격하게 감소하므로 참고사항을 먼저 언급하겠다.

참고 : 이건 외우자 - 삼각함수의 한 칸($\frac{\pi}{2}$) 적분

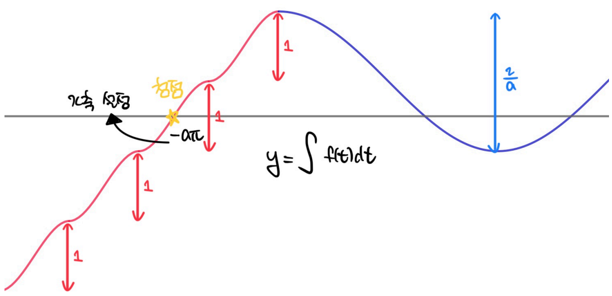


$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$**임은 외우자. 그래프를 그리면 동일한 모양의 네 그래프의 적분값이 각각 1이라는 점에서 외우기도 쉽다.**

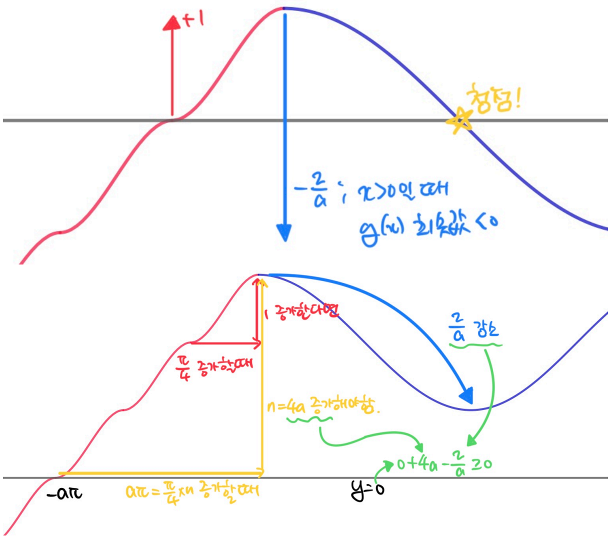
또한 삼각함수의 주기가 $\frac{1}{a}$배 (즉, $\sin x$에서 $\sin ax$가 됨) 되면 한 칸의 적분값은 $\frac{1}{a}$배 된다. $\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \sin ax dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} \sin t dt = \frac{1}{a}$(치환적분)으로 증명할 수 있다.



풀이를 위해 우선 $y = f(x)$의 그래프부터 그려보자. $x < 0$일 때 삼각함수의 한 칸(너비가 $\frac{\pi}{8}$인 부분)의 넓이가 $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$이므로 위와 같이 두 칸마다 넓이 1을 표시할 수 있다. $x > 0$일 때는 삼각함수의 한 칸의 넓이가 $\frac{1}{a}$이므로 마찬가지로 두 칸마다 넓이를 표시할 수 있다.



이제 $g(x) = \left| \int_{-a\pi}^{x} f(t) dt \right|$을 분석해보자면 이 함수는 $f(x)$의 부정적분에 $x = -a\pi$일 때의 함숫값을 0으로 설정(점 $(-a\pi, 0)$을 지나도록 x축을 그음)한 다음 절댓값을 씌운 함수이다. 이제 어디에 $-a\pi$가 존재해 x축이 그려져야 하는지 추론해보자. 현재 왼쪽의 그림에서처럼 x축이 $x < 0$일 때의 미분계수가 0이 되는 점을 지나지 않는다면 절댓값을 씌웠을 때 첨점이 반드시 발생하게 된다. 따라서 $-a\pi = -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, \cdots$등이 될 수 있다. 쉽게 말해 $a = \frac{1}{4} \times$(자연수)꼴인 것이다.



$x < 0$일 때에는 $g(x)$가 미분가능하게 됨을 확인했으므로 $x > 0$일 때의 미분가능성을 논해보자. 만약 $x > 0$일 때 $g(x)$의 최솟값이 0보다 작다면 위의 그림처럼 절댓값을 씌웠을 때 첨점이 발생하게 된다. 따라서 $g(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$g(x)$의 최솟값을 a를 사용해서 표현하기 위해 $x = -a\pi$일 때부터 $x = \frac{\pi}{a}$($x > 0$일 때 처음으로 극소가 발생하는 순간)까지의 함숫값의 변화를 측정해 보면 $x = -a\pi$일 때부터 $x = 0$까지는 $4a$만큼($a = \frac{n}{4}$로 두면 함숫값이 $n = 4a$ 증가)하게 되고, $x = 0$일 때부터 $x = \frac{\pi}{a}$까지는 $\frac{2}{a}$ 감소하게 되므로 $4a - \frac{2}{a} \geq 0,\ a \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$를 얻을 수 있다.

따라서 $a \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$을 만족하며 $a = \frac{n}{4}$(n은 자연수) 꼴을 만족시키는 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다. $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}$이기 때문이다(양변에 4를 곱해 제곱하면 증명할 수 있다). 정답은 2번.

29) 미적분 - 수열의 극한

왼쪽 극한식부터 차근차근 보는 것이 맞아보인다. 다양한 밑의 지수 식이 결합된 식의 극한은 밑의 절댓값이 가장 큰 지수가 수렴 값을 결정한다.

만약 $3 > a$라면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n} = \dfrac{1}{3} = a$가 된다. 그런데 이는 $a > 1$이라는 조건에 모순이므로 $3 \le a$이다.

그렇다고 $a = 3$일 수도 없는게, $a = 3$이면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n + 3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n} = 1 \neq 3$가 되어 모순이다. 따라서 $a > 3$이다.

이제 두 번째 극한식을 보자.

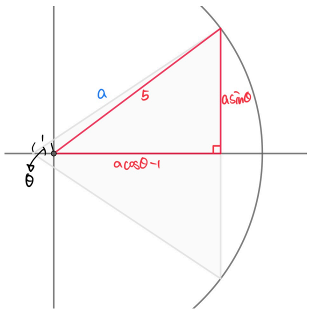
만약 $a > b$라면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \dfrac{1}{a}$가 되는데, $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{9}{a}$는 서로 같을 수 없어 모순이다. 따라서 $a \le b$이다.

$a < b$인 경우에는 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}+1} = b$가 되고, $b = \dfrac{9}{a}$에서 $ab = 9$를 얻을 수 있다. 그런데 우리는 이미 $a > 3$를 알고 있으므로 $3 < a < b$인데 $ab = 9$라는 말이 조금 이상하다. 3보다 큰 두 실수를 곱해서 3의 제곱이 나온다고 말하고 있으므로 이런 경우는 없다.

따라서 $a = b$일 수밖에 없고, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n} = 1 = \dfrac{9}{a}$에서 $a = 9 = b$를 얻을 수 있다. 따라서 정답은 $9+9 = 18$.

수들 사이의 대소관계를 가정하고, 계산하고, 추론(모순을 발견함)하면서 모든 극한을 만족하며 조건을 만족하는 상황을 찾는 것이 핵심인 문제였다. 실전에서는 $a < b$도 $a > b$도 될 수 없음을 발견한 순간 당황할 수 있었으나, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}$를 계산할 때 $a = 3$인 경우($\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n + 3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$로 계산)의 경험을 되살려 '혹시 $a = b$라는 말 아닐까?' 하고 추측할 수 있었다.

30) 미적분 - 라이프니츠 미분법(합성함수의 미분법)



우선 문제를 보자마자 점 P와 원의 중심을 잇는 습관이 들어있었으면 좋겠다. 그 후에는 왼쪽처럼 그림을 그릴 수 있는데, 삼각형 PCQ는 $\overline{AB}$에 대하여 대칭이므로 선분 $\overline{AB}$을 기준으로 위쪽 절반의 넓이를 구해 두 배를 해 주면 $S(\theta)$가 나올 것임을 알 수 있다. 미지수를 도입하지 않고는 더이상 다른 변들의 길이를 작성할 수 없기 때문에 $\overline{CP} = a$로 설정하여 다음과 같이 변들의 길이를 a, θ를 사용해 나타낼 수 있었다. 또한 위쪽 절반의 넓이가 $\dfrac{1}{2}a^2 \sin\theta \cos\theta$인 점을 활용해 $S(\theta) = a^2 \sin\theta \cos\theta$도 구해낼 수 있다. 이제 a만 θ를 사용해 나타내주면 미분해서 정답을 구해낼 수 있겠다.

빨간색으로 표시한 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 적용해 보자.
$25 = a^2\cos^2\theta - 2a\cos\theta + 1 + a^2\sin^2\theta$,
$a^2 - 2a\cos\theta = 24$, $a^2 - 2a\cos\theta + \cos^2\theta = 24 + \cos\theta$,
$a - \cos\theta = \pm\sqrt{24+\cos^2\theta}$, $a = \cos\theta \pm \sqrt{24+\cos^2\theta}$을 구해낼 수 있다. 그런데 문제는 이걸 여기에 대입해서 제곱하기가 너무 두렵다는 것이다. 식이 너무 복잡해져서 계산하는 데에만 하루 종일 걸릴 것 같다. 따라서 필자는 이 식을 일종의 음함수로 간주해 라이프니츠 미분법을 사용하기로 한다.

이 식의 양변을 θ에 대해 미분하면
$S'(\theta) = 2a\dfrac{da}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$가 되므로 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$일 때의 $a, \dfrac{da}{d\theta}$의 값만 알아낸다면 대입해서 $S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값을 구할 수 있겠다.

이 식이 그나마 간단하므로 이 식에 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$를 대입해보면
$a^2 - \sqrt{2}a = 24$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm \dfrac{7}{\sqrt{2}}$인데, 그림에서 $a > 5$이므로(삼각부등식을 알고 있다면 더 자신있게 주장할 수 있겠다) $a = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$이다.

이번에는 $\dfrac{da}{d\theta}$를 구하기 위해 이 식의 양변을 θ에 대해 미분하면
$2a\dfrac{da}{d\theta} + 2a\sin\theta - 2\dfrac{da}{d\theta}\cos\theta = 0$이 되고, 여기에 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$(그리고 $a = 4\sqrt{2}$)을 대입하면 $8\sqrt{2}\dfrac{da}{d\theta} + 8 - \sqrt{2}\dfrac{da}{d\theta} = 0$, $\dfrac{da}{d\theta} = -\dfrac{8}{7\sqrt{2}} = -\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$가 된다.

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$일 때의 $a, \dfrac{da}{d\theta}$의 값을 알아냈으므로 대입해서 계산해보자.
$S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \times 4\cancel{\sqrt{2}} \times \left(-\dfrac{4\cancel{\sqrt{2}}}{7}\right) \times \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \times \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} + \cancel{32\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)} = -\dfrac{32}{7}$이므로 정답은 $(-7) \times \left(-\dfrac{32}{7}\right) = 32$이다.

무작정 대입해서 무진장 많은 계산으로도 어찌저찌 풀 수는 있겠지만, 그 방법은 너무 복잡하므로 재치를 부려 그나마 편하게 풀어보는 방법을 고안해보았다. 라이프니츠 미분법의 장점은 어떤 관계식에 어떤 변수가 있어도 우선 미분하고 볼 수 있다는 점이므로, 너무 복잡한 미분을 해야 한다면 이렇게 우회해보는 것은 어떨까?