빠른 정답 [공통+미적분]

1	①	2	⑤	3	④	4	①	5	①
6	③	7	③	8	②	9	④	10	③
11	①	12	③	13	③	14	⑤	15	③
16	5	17	8	18	6	19	15	20	14
21	23	22	30	23	④	24	③	25	⑤
26	①	27	④	28	④	29	4	30	327

1. [문항코드]

$3^{-2} \times \sqrt[3]{27}$ 의 값은?

[2점]

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 3 ④ 9 ⑤ 27

$\frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$

2. [문항코드]

함수 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

[2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$f'(x) = 4x^3 + 6x$

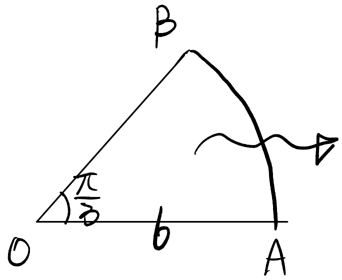
$f'(1) = 4 + 6 = 10$

3. [문항코드]

중심이 O인 부채꼴 AOB에서 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 이고 반지름의 길이가 6일 때, 부채꼴 AOB의 넓이는?

[3점]

① $\frac{9}{2}\pi$ ② 5π ③ $\frac{11}{2}\pi$ ④ 6π ⑤ $\frac{13}{2}\pi$



$$S = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\pi}{3}$$
$$= 6\pi.$$

4. [문항코드]
다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}=1$$

일 때, $f(2)$의 최솟값은?

[3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

① $f(x)$의 최고차항 x^2

② 〃 상수항 0, 일차항 $\pm x$

$\therefore f(x)=x^2\pm x$

$\therefore f(2)=6$ or 2.

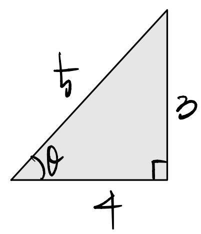
5. [문항코드]

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sqrt{\tan^2\theta + 1} = \frac{5}{4}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은?

[3점]

① $-\frac{7}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

$\tan^2\theta = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{3}{4}$



$\sin\theta = -\frac{3}{5}$

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{7}{5}$

6. [문항코드]

곡선 $y=x^3+ax^2+1$의 극댓값과 극솟값의 차가 4가 되도록 하는 양수 a의 값은?

[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y' = 3x^2+2ax$

$= x(3x+2a)$: $x=0, -\frac{2}{3}a$.

극값: 1, $\boxed{-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+1}$

$= \frac{4}{27}a^3+1$

$\frac{4}{27}a^3 = 4 \Leftrightarrow a=3.$

7.

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 - 1 & (a_n < 0) \\ 2 & (a_n = 0) \\ -a_n & (a_n > 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

[3점]

① 55 ② 59 ③ 63 ④ 67 ⑤ 71

$a_1 = 1$

$a_2 = -a_1 = -1$

$a_3 = a_2^2 - 1 = 0$

0

$a_4 = 2$

$a_5 = -a_4 = -2$

0

$a_6 = a_5^2 - 1 = 3$

$a_7 = -a_6 = -3$

0

$a_8 = a_7^2 - 1 = 8$

$a_9 = -a_8 = -8$

0

$a_{10} = a_9^2 - 1 = 63$

$\therefore \sum_{1}^{10} a_k = 63.$

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

8. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-kx$가 구간 $[0,3]$에서 감소하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

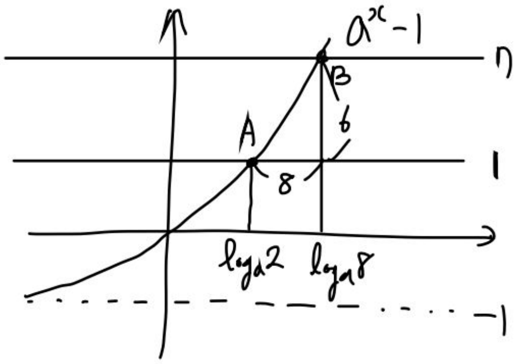
$3x^2-6x-k$

$27-18-k\le 0$

$9\le k$

9. 1보다 큰 실수 a와 함수 $f(x)=a^x-1$가 있다. 좌표평면 위의 그래프 $y=f(x)$와 $y=1$이 만나는 점을 A, $y=f(x)$와 $y=7$이 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=10$일 때, a^2의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$



$\log_a 4=8$

$a^8=4$

$a^4=2$

$a^2=\sqrt{2}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $y=f(x)$에 접하는 기울기가 3인 직선은 오직 $y=3x+1$뿐이다. (나) 그래프 $y=f(x)$는 오직 두 개의 사분면을 지난다.

$f(3)$의 값은? [4점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

(가): $f(x)-(3x+1)=(x-p)^3$

(나): $f(0)=0$

$\therefore p=1$

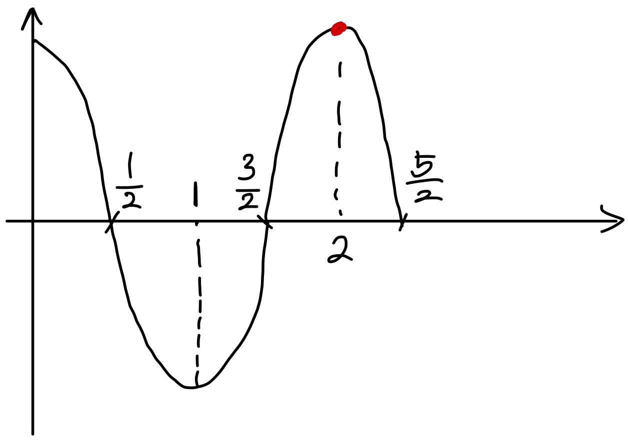
$f(3)=10+8=18$

11. 양수 t에 대하여 닫힌 구간 $\left[\frac{t}{6}, \frac{t}{3}\right]$에서 함수 $\cos\pi x$의 최댓값을 $f(t)$, 최솟값을 $g(t)$라 하자.

$$f(n)=1,\ g(n)+1>0$$

을 만족시키는 모든 자연수 n의 합은? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35



주기가 2 → $\frac{t}{3}-\frac{t}{6}=\frac{t}{6}$
(구간의 범위)

$2>\frac{t}{6}$

$\therefore n\le 11$

$2m-1<\frac{n}{6}\le 2m\le\frac{n}{3}<2m+1$

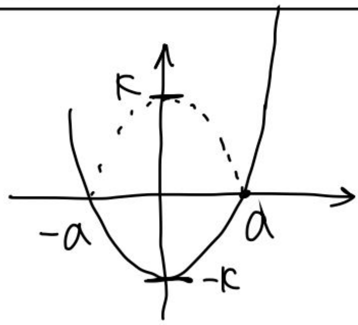
$12m-6<n\le 12m$
$6m\le n<6m+3$

$m=1$ 이라면
$6<n\le 12$
$6\le n<9$
$\to n=7, 8$ $\boxed{15}$

$m=2$ 라면
$18<n\le 24$
$12\le n\le 15$
→ out

12. 함수 $f(x)=3x^2-\int_0^1 |f(t)|\,dt$에 대하여 $\int_1^2 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{29}{4}$



$\int_0^1 |f(t)|dt = 3a^2$

$f(1)<0$ 이라면

$\int_0^1 |f(t)|dt < 3a^2$

→ out.

$-x^3+3a^2x\Big|_0^a + (x^3-3a^2x)\Big|_a^1$

$= 4a^3+1-3a^2 = 3a^2$

$4a^3-6a^2+1=0$

$a=\frac{1}{2}$

$f(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}$

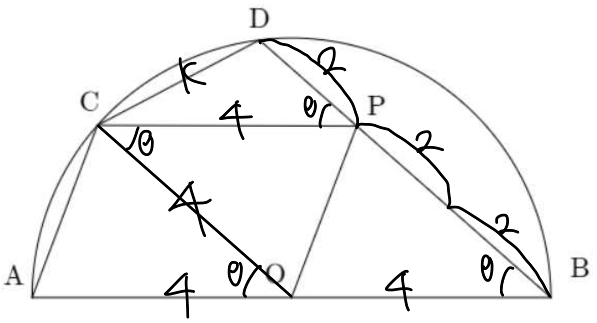
$x^3-\frac{3}{4}x\Big|_1^2 = \left(8-\frac{3}{2}\right)-\left(1-\frac{3}{4}\right)$

$= 7-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}$

$= \frac{25}{4}$

13. 그림과 같이 $\overline{AB}=8$인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원 위에 두 점 C, D이 있다. 선분 $\overline{BD}$를 $2:1$로 내분하는 점 P에 대하여 사각형 AOPC는 평행사변형일 때, 선분 CD의 길이를 k, 사각형 ACDB의 넓이를 S라 하자. k^2+S^2의 값은? [4점]

① 345　② 348　③ 351　④ 354　⑤ 357



$\cos\theta=\frac{3}{4}$　$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$k=\sqrt{16+4-12}$
$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\triangle CDP=4\sin\theta$

$\triangle CAO=\triangle COP=\triangle OPB$
$=8\sin\theta$

$S=28\sin\theta=7\sqrt{7}$

$8+343=351$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+2)=2|f(x)|+x$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $|x|<1$에서 $f(x)-x$의 값이 양수 k로 일정할 때, $f(k+2)=40$이다.

ㄴ. $\int_{-1}^{3} f(x)dx > 0$

ㄷ. $\int_{0}^{4} f(x)dx$의 값이 최소가 되도록 하는 $f(x)$에 대하여 $f(-4)+f(7)$의 최솟값은 $\frac{27}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x)=x+k \ (-1\le x\le 1)$

$f(-1)=k-1$

$f(1)=k+1$

$f(1)=2|f(-1)|-1$

$k+2=2|k-1|$

$k=4$

$f(0)=4 \quad f(2)=8 \quad f(4)=18$

$f(6)=40$

ㄴ. $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)+2|f(x)|+x\,dx$

$= \int_{-1}^{1} f(x)+2|f(x)|\,dx$

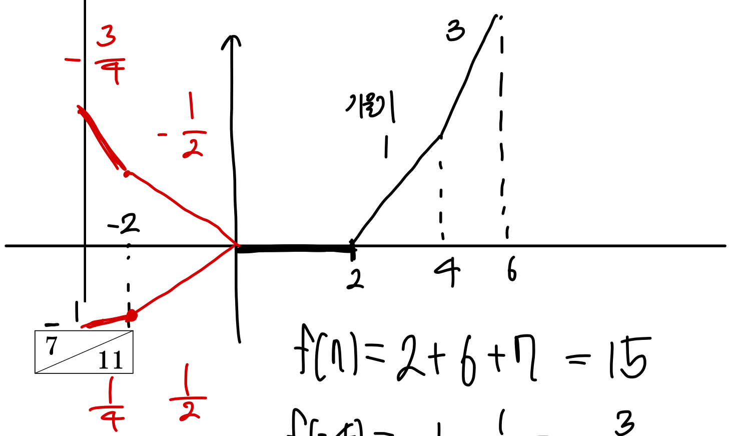
$f(x)+2|f(x)|>0$

($f(x)$가 구간에서 전부 0이면 불연속.)

ㄷ. $\int_{0}^{2} f(x)+2|f(x)|+x\,dx$ 가 최소이려면

$$f(x)+2|f(x)| = \begin{cases} 3f(x) & (f(x)\ge 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

구간 $(0,2)$ 에서 $f(x)=0$.



$f(7)=2+6+7=15$

$f(-4)=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> $\{n \mid a_{n+2} \neq 2a_{n+1} - a_n\} = \{8, 13\}$

$a_2 = 1,\ a_{16} = 14$일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은? [4점]

① 141 ② 145 ③ 149 ④ 153 ⑤ 157

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \ (n \neq 8, 13)$

n:	1	2	3	4	$\cdots$	9
a_n:	1	1	1	1	$\cdots$	1

n:	10	11	12	13	14	15	16
a_n:	a	$2a-1$	$3a-2$	$4a-3$	$2b-14$	b	14

$8a-6-3a+2$
$= 2b-14$

(a, b는 자연수, $b > 7$)

$5a = 2b - 10$

$\downarrow$

$a = 2,\ b = 10$

$\sum_{k=1}^{16} a_k = 9 + 10a - 6 + 3b$
$= 53$

n:	15	16	17	18	19	20
a_n:	10	14	18	22	26	30

$\sum_{k=17}^{20} a_k = 96$

16. [문항코드]

$2^{p} = \log_{2} q$, $4^{p-1} = \log_{4} q$ 일 때 $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 양의 실수이다.)

5

[3점]

$\frac{1}{2} 2^{p} = \frac{1}{2} \log_{2} q = \log_{4} q = 4^{p-1}$.

$\therefore 2^{p-1} = 4^{p-1} \Leftrightarrow p = 1$.

$1 = \log_{4} q \Leftrightarrow q = 4$

$\therefore p + q = 5$.

17. [문항코드]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2 - 4x$ 이고 $f(1) = 0$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. 8 [3점]

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + C$

$f(1) = 2 - 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$

$\therefore f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 0 = 8$

18. [문항코드]
첫째항이 -3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때

$$2a_5 = S_8$$

을 만족시킨다. 이때 a_{11}의 값을 구하시오. 6 [3점]

$a_n = -3+(n-1)d.$

$S_n = \frac{(-6+(n-1)d)}{2} \cdot n.$

$\therefore \cancel{2} \cdot (-3+4d) = \cancel{4}^{2}(-6+7d)$

$9 = 10d \Leftrightarrow d = \frac{9}{10}$

$\therefore a_{11} = -3+10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) = 6.$

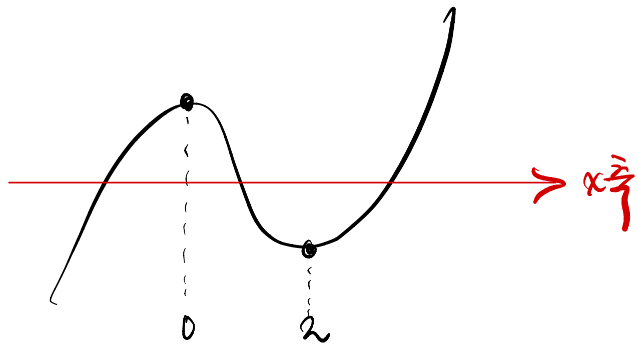
19. [문항코드]

방정식 $4x^3-12x^2+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. 15 [3점]

$y=4x^3-12x^2+k$

$y'=12x^2-24x=12x(x-2)$

$x=0,2$ 에서 극값.



by 사잇값 정리

$k\cdot(4\cdot2^3-12\cdot2^2+k)$

$=k\cdot(k-16)<0$

$\therefore\ 0<k<16 \Rightarrow 15$개

단답형

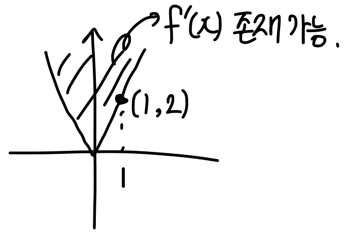
20. $f(0)=f'(1)=2$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

> $x_2 > x_1$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_1)+x_2|x_2| < f(x_2)+x_1|x_1|$이다.

$$f(x_1) - x_1|x_1| < f(x_2) - x_2|x_2|$$

$h(x) = f(x) - x|x|$ 는 증가함수

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) - 2x & (x>0) \\ f'(x) + 2x & (x<0) \end{cases}$$



$$f'(x) = (x-1)(x+1)+2$$
$$= x^2+1$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$$

$$f(3) = 9+3+2 = 14$$

$$\boxed{14}$$

21. 두 상수 a, b에 대하여 열린 구간 $(-\pi, 4\pi)$에서 방정식

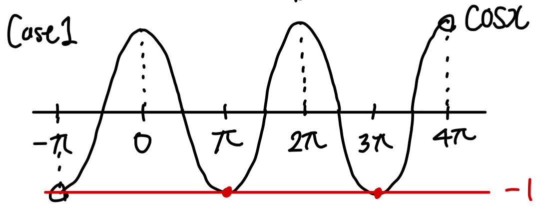
$$a\sin^2 x = b + \cos x$$

의 서로 다른 실근을 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_7$이라 하자. $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = \frac{14}{3}\pi$일 때, $3a + b + \frac{6\alpha_7}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]

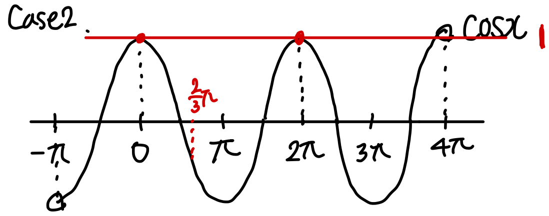
$a - a\cos^2 x = b + \cos x$

$a\cos^2 x + \cos x + b - a = 0$

Case1

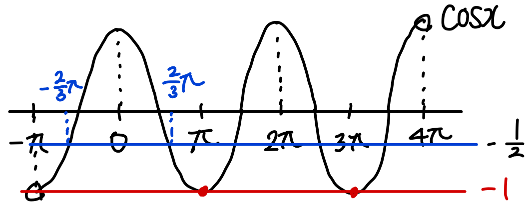


Case2.



$\alpha_4 + \alpha_6 = 4\pi$

$\therefore \alpha_2 = \frac{2}{3}\pi \rightarrow$ case 1 correct



$\cos x = t$ 라고 두면

$at^2 + t + b - a = 0$ 의 해는 $-\frac{1}{2}, -1$

$b = 1$

$\frac{1-a}{a} = \frac{1}{2}$

$2 - 2a = a$

$\therefore a = \frac{2}{3}$

$\alpha_7 = 4\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$

$2 + 1 + 20 = \boxed{23}$

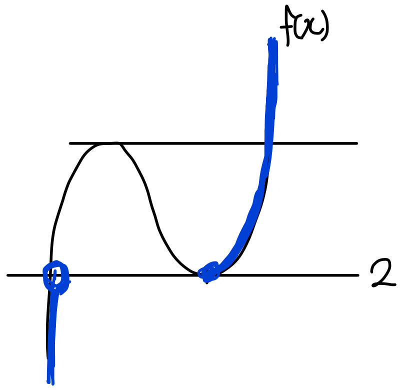
22. 최고차항의 계수가 양수이고 극솟값이 2인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식

$$f(f(x)) = t$$

의 가장 큰 실근을 $g(t)$라 할 때, 어떤 실수 α가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=\alpha+4$에서만 불연속이고,
>
> $$\lim_{t\to\alpha+} g(t) - \lim_{t\to\alpha-} g(t) = 3$$이다.
>
> (나) $f(\alpha+5)=2$

$f(10)$의 값을 구하시오. [4점]



$f(x) = t$ 의 가장 큰 실근을 $h(t)$라 하고

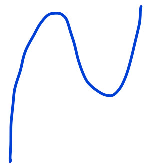
$f(x) = \underline{h(t)}$ 의 가장큰실근

→ $t=2$ 일 때 불연속　　$h(t)=2$ 일 때 불연속

$\alpha=2$ 라면

$t=2$, $t=6$ 에서 불연속

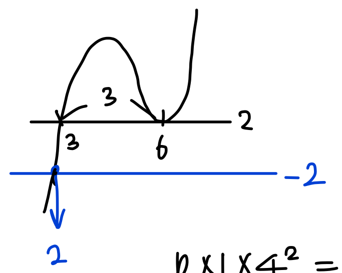
→ $h(6)=2$



$\alpha=-2$ 라면

$t=-2$, $t=2$ 에서 불연속, $f(3)=2$.

$h(-2)=2$



$p\times1\times4^2=4$　$p=\frac{1}{4}$　$2+\frac{1}{4}\times4^2\times7$

$=\boxed{30}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

23. [문항코드]

$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\sin x}$ 의 값은?

[2점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{(e^x-1)+(1-\cos x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} + 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = 0.$$

24. [문항코드]

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan 2x\, dx$의 값은?

[3점]

① $2\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{1}{2}\ln 2$ ④ $-\frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $-\ln 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} dx$$

$$(\cos 2x = t, \quad -2\sin 2x\, dx = dt)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln t \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

25. [문항코드]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x = 2\ln(t+1),\ y = 3t^2 - t - 2$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 속력은? [3점]

① $\sqrt{22}$ ② $\sqrt{23}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ 5 ⑤ $\sqrt{26}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t+1}$, $\frac{dy}{dt} = 6t-1$

$v(1) = \sqrt{\left(\frac{2}{1+1}\right)^2 + (6-1)^2}$

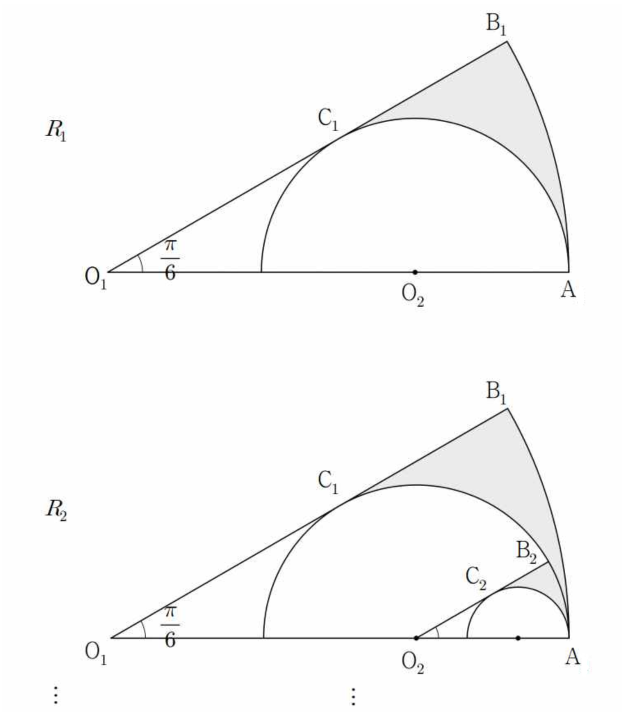
$= \sqrt{26}$.

26. [문항코드]

그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴 OAB_1이 있다. 선분 O_1A위의 한 점 O_2에 대하여 중심이 O_2, 반지름이 $\overline{O_2A}$이고 선분 O_1B_1과 점 C_1에서 접하는 반원을 그린다. 이때 선분 O_1B_1, 호 AB_1, 호 AC_1로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 O_2A위의 한 점 O_3에 대하여 중심이 O_3, 반지름이 $\overline{O_3A}$이고 선분 O_2B_2과 점 C_2에서 접하는 반원을 그린다. 이때 선분 O_2B_2, 호 AB_2, 호 AC_2로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

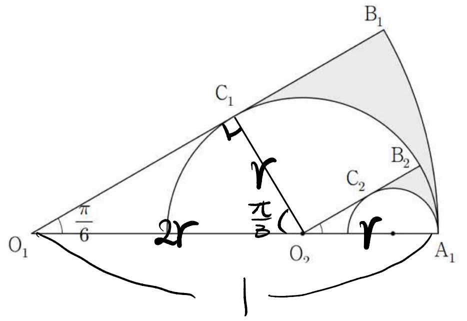
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



[3점]

① $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{96}$ ② $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{84}$ ③ $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{72}$

④ $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{60}$ ⑤ $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{48}$



$r=\frac{1}{3} \longrightarrow S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)$

$=\frac{\pi}{12}-\left(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{\pi}{27}\right)=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{108}$

공비: $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{108}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{96}$

27. [문항코드]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n+1}^{4n}\frac{k(-\ln n+\ln 2k)}{n^2}$ 의 값은?

[3점]

① $10\ln 2-3$ ② $10\ln 2-4$ ③ $10\ln 2-5$

④ $20\ln 2-3$ ⑤ $20\ln 2-5$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n+1}^{4n}\frac{k}{n}\cdot\ln\frac{2k}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_2^4 x\ln 2x\,dx$$

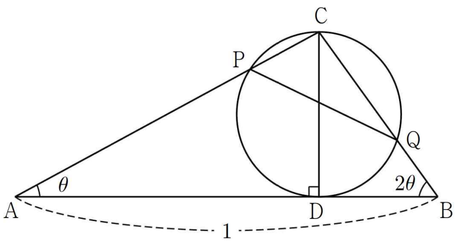
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\cdot\ln 2x\right]_2^4-\int_2^4\frac{1}{2}\cancel{x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$=(8\ln 8-2\ln 4)-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^4$$

$$=20\ln 2-3$$

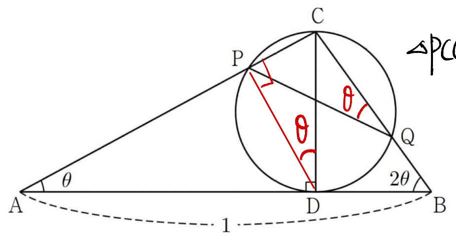
28. [문항코드]

그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 점 D라 할 때, 선분 CD를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점을 점 P, 선분 BC와 만나는 점을 점 Q라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은?



[4점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ 3



$\triangle PCQ \backsim \triangle BCA$

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 2\theta}=\dfrac{1}{\sin(\pi-3\theta)} \rightarrow \overline{AC}=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}, \ \overline{BC}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\overline{CD}=\dfrac{\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}, \quad \overline{PC}=\dfrac{\sin^2\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

$\overline{BC}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{PQ}, \quad \overline{PQ}=\sin\theta\sin 2\theta$

$\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{PQ}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta\cdot\sin 2\theta}{\theta^2}=2$

29. [문항코드]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=e^{(x-1)^2}$와 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $g(x)$가

$$g(x)\cos^2 x=\int_0^{\tan x} f(t)\,dt$$

을 만족시킬 때 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx=ae-b$이다. 이때 $\frac{1}{ab}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

4

[4점]

$\int_0^x f(t)dt=F(x)$, $g(x)=F(\tan x)\cdot\sec^2 x$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} F(\tan x)\times\sec^2 x\,dx$

$=\int_0^1 F(p)dp$

$=pF(p)\Big]_0^1-\int_0^1 pf(p)dp$

$=\left(\int_0^1 e^{(x-1)^2}dx\right)-0-\int_0^1 xe^{(x-1)^2}dx$

$=-\frac{1}{2}\times\int_0^1 2(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

$=-\frac{1}{2}\left[e^{(x-1)^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$

$\therefore \frac{1}{ab}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=4$

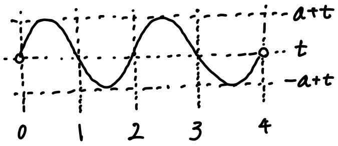
30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f(x) 와 양의 상수 a가 있다. 실수 t에 대하여 구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(t+a\sin\pi x)$가 극대 또는 극소가 되도록 하는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 3}\{g(t)-g(3)\}=k$ (단, $k>1$)
>
> (나) $\lim_{t\to k} g(t) > g(k)$

$f(a+k)=7$일 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점] 327

$h(x) = a\sin\pi x + t$ 라 하자.

$(0,4)$에서 $h(x)$의 그래프를 대략적으로 그려보자



$f(h(x)) = p(x)$라 하자.

$p'(x) = f'(h(x)) \times h'(x)$ 이므로, $p'(x)$가 극값을 가지는 위치는 다음과 같다

① $h'(t)=0$ 인 t → $h(x)$가 극값을 가지는 x좌표 t

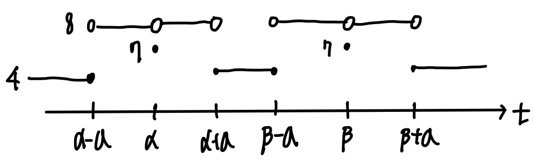
② $f'(h(t))=0$인 t → $f(x)$가 극값을 가지는 x좌표 S에 대하여, $h(t)=S$ 인 t ($g(t)$의 불연속점이 생기는 이유)

$f'(x)=0$의 근이 없는 개형이라면, $g(t)$의 불연속점은 발생하지 않을 것이다. → $f'(x)$의 근이 존재하는 개형

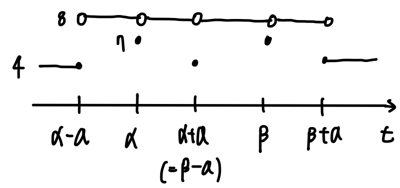
$f'(x)=0$의 근이 1개일 때도, $g(t)$의 불연속점은 발생하지 않을 것이다. → $f'(x)$는 서로 다른 두 근을 가짐

$f'(x)$가 서로 다른 두 근 α, β $(\alpha<\beta)$을 가질 때 $g(t)$를 그려보자.

i) $\beta-\alpha > 2a$ → (가) 조건을 만족시키는 k 존재 안 함



ii) $\beta-\alpha = 2a$ → 가능



이 경우 $\boxed{\alpha+a=\beta-a=3}$, $\boxed{k=4}$ 이다.

(나) 조건을 만족시키려면 $\boxed{k=\beta}$여야 한다.

∴ $\alpha=2, \beta=4, a=1, k=4$

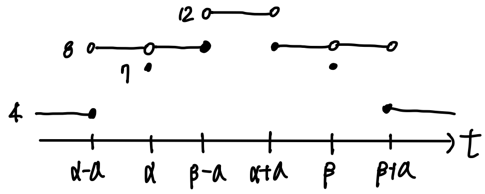
$f'(x) = 3(x-2)(x-4)$, $f(5)=7$ 이므로

$f(x) = x^3-9x^2+24x-13$ 이다.

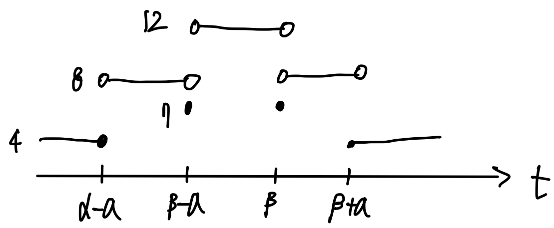
∴ $f(10) = 327$

답은 구했지만 다른 상황들도 살펴보자.

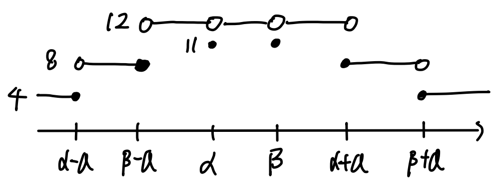
iii) $a < \beta-\alpha < 2a$ → (가) 조건을 만족시키는 k 존재 안 함



iv) $\beta-\alpha = a$ → (가) 조건을 만족시키는 k 존재 안 함



v) $0 < \beta-\alpha < a$ → (가) 조건을 만족시키는 k 존재 안 함



∴ 가능한 상황은 ii) $\beta-\alpha=2a$ 인 상황밖에 없다. 미리 구해놨듯이 $f(10)=327$ 이다.