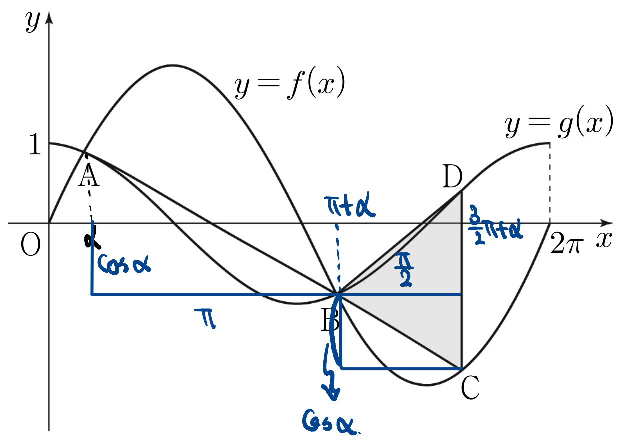
{공통. 21.22.
{미적. 28.29.

13. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$　② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$　③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$. $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. V

$C\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha.\ k\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha)\right)$　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$k\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-k\cos\alpha$.

$=-2\cos\alpha$　$k=2$.

A: $2\sin\alpha=\cos\alpha$　$\therefore \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ ($\triangle BCD$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left|k\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha)-\cos(\frac{3}{2}\pi+\alpha)\right|$

$=\frac{\pi}{4}\left|2\cos\alpha+\sin\alpha\right|$

$=\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi.$

14. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

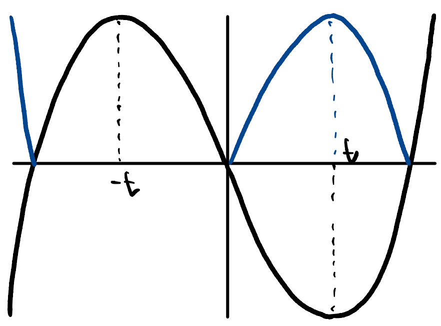
〈보 기〉

ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

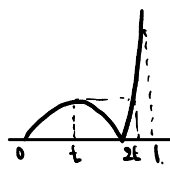
ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

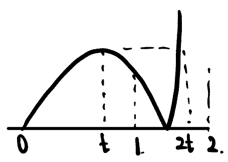


$|f|$.
$x=-t$에서 극대 $2t^3$. $=f(2t)$.
$x=t$에서 극대 $2t^3$. $=|f(t)|$ $|f(2t)|$. $|f(-2t)|$
$|f(x)|$ 양축 대칭.

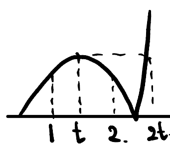
$M_1(t)=\begin{cases} f(1)=1-3t^2. & (0<t<\frac{1}{2}) \\ f(-t)=2t^3. & (\frac{1}{2}\le t<2) \\ f(-2)=6t^2-8. & (t\ge 2) \end{cases}$ 　, $M_2(t)$ = $[0.2]$에서 $|f(x)|$ 최대. 그래프..!



$0<t<1$. 최대 $=|f(2)|=|6t^2-8|$ $=8-6t^2$.



$\frac{1}{2}\le t<1$. 최대 $=|f(2)|=8-6t^2$.



$t\ge 1$. $0<|f(1)|.|f(2)|.\le|f(t)|$ 최대. $2t^3$.

$\therefore M_2(t)=\begin{cases} |8-6t^2| & (0<t<1) \\ 2t^3 & (t\ge 1) \end{cases}$

M_1. M_2 연속.

$g(t)=\begin{cases} (1-3t^2)+\cancel{|8-6t^2|}=9(1-t^2). & (0<t<\frac{1}{2}) ✓ \\ 2t^3+|8-6t^2| & (\frac{1}{2}\le t<1) ✓ \\ 2t^3+2t^3=4t^3. & (1\le t<2)\quad g(2)=32 \\ 6t^2-8+2t^3. & (t\ge 2) \end{cases}$　연속..

ㄴ 방정식 $g(t)=4t^3$. $\begin{cases} 0<t<\frac{1}{2}\ \&\ \frac{1}{2}\le t<1\ \times. \\ 1\le t<2.\ 전체 \\ t\ge 2.\ 2t^3=6t^2-8. \\ \quad t^3-3t^2+4=(t+1)(t-2)^2=0.\ t=2. \end{cases}$

$\therefore 1\le t\le 2$. 합 3.

ㄷ. $t=\frac{1}{2}$에서 (g 우미분계수) - (g 좌미분계수)

$=6t^2\Big|_{t=\frac{1}{2}}-(-6t)\Big|_{t=\frac{1}{2}}$

$=\frac{9}{2}$

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases} \quad a_{n+1} \geq 0.$$
> 이다.
> (나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

$a_n \geq 0.$

$0 \leq a_5 < 1 \Rightarrow a_6 = 8.$ X.
$a_5 > 1 \Rightarrow a_6 = \log_2 a_5 > 0.$ X.
$\therefore a_5 = 1.$

$a_5 = 1 \to$ X.
$a_5 = 1 \to a_4 = 2$
$a_4 = 2 \to a_3 < 1 \to$ X.
$a_3 < 1 \to a_2 = 2^{a_3} \geq 1 \to$ X.
$a_2 = 2^{a_3} \geq 1 \to a_1 = 2^{2^{a_3}} \geq 2^1 = 2.$
$a_4 = 2 \to a_3 = 4 \to$ X.
$a_3 = 4 \to a_2 = 2^4 \to$ X.
$a_2 = 2^4 \to a_1 = 2^{2^4} = 2^{16}.$

$\therefore m = 2^1. \quad M = 2^{16}.$

$\log_2 \frac{m}{M} = 15.$

단답형

16. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $y = 4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점] 30.

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다. ∵ $a_8=0$.
(나) $\lvert S_m\rvert=\lvert S_{2m}\rvert=162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다.

$S_n=an(n-15).$ $a>0.$ $a_n=2an-16a.$

$|S_m|=|S_{2m}|.$ $|\cancel{m}(m-15)|=|2\cancel{m}(2m-15)|.$

$|m-15|=|4m-30|=4m-30.>0.$

$m-15=4m-30.$ $m=5.$ X.

$15-m=4m-30.$ $m=9.$

$\therefore |S_9|=|a\cdot 9\cdot(-6)|=54a=162.$ $a=3.$

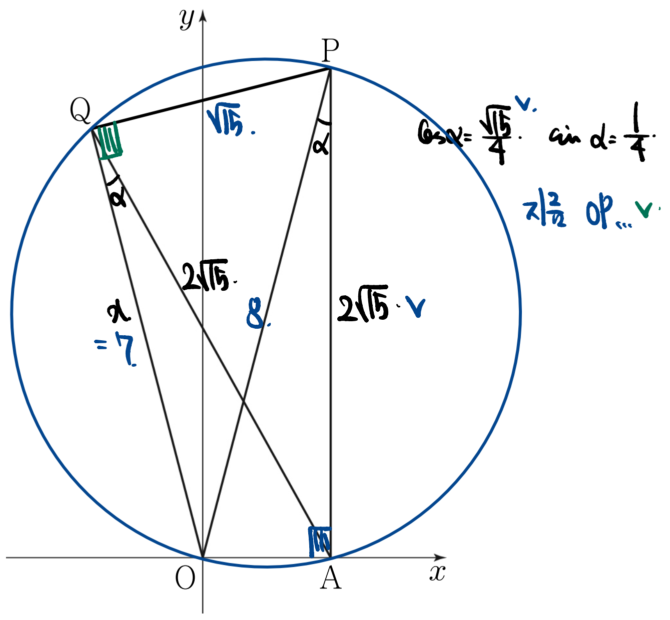
$\therefore a_{13}=a_{13}-a_8$

$=2a\cdot 5=30.$

21. 좌표평면 위의 두 점 O$(0, 0)$, A$(2, 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{AP}=\overline{AQ}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{OP}>\overline{OQ}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle OPA)=\cos(\angle OQA)=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 22.



$\overline{OA}^2=x^2+60-2\cdot 2\sqrt{15}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$=x^2-15x+60=4$.

$x^2-15x+56=0$. $x=7, \cancel{8}$.

$\therefore S=\triangle OAP+\triangle OPQ$.

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{15}+\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\sqrt{15}$.

$=\frac{11}{2}\sqrt{15}$. $pq=22$.

22. 두 상수 a, $b(b\neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^x(-t+a)dt$이고
>
> $|x|\geq 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점] 32

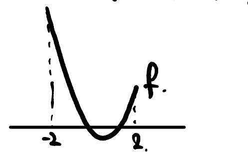
$g(0)=0$. 1. $=|x-1|$.

$|g'(x)|=\begin{cases}|-x+a| & (|x|<2) \\ f(x) & (|x|\geq 2)\end{cases}$ ≥ 0. 연속

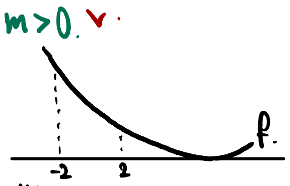
g가 $x=1$에서 극값. $\therefore a=1$.

$f(2)=1$. $f(-2)=3$.

$f(x)=m(x+2)(x-2)-\frac{1}{2}x+2$. $m>0$.



g가 $x=1$에서만 극값. X.



접할 때까지... $0<m\leq\frac{2-\sqrt{3}}{8}$

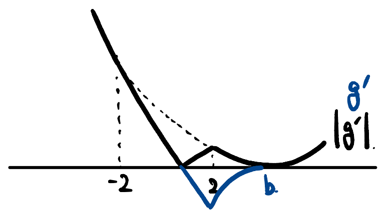
$mx^2-\frac{1}{2}x-4m+2=0$.

$D=\frac{1}{4}-4m(-4m+2)=0$.

$16m^2-8m+\frac{1}{4}=0$. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{8}$.

$1<(y$절편$)<3$, $\therefore m=\frac{2-\sqrt{3}}{8}$.

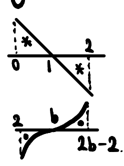
$x=b$ $(b\neq 1)$에서 g 극값. $\therefore g'(b)=0$. $m=\frac{2-\sqrt{3}}{8}$



$k=0, 2, 6+4\sqrt{3}$.

$p\times q=32$.

$g(0)=0$.



$g(2)=0$.

$g(2b-2)=0$.

$f(x)=mx^2-\frac{1}{2}x-4m+2$ 에서

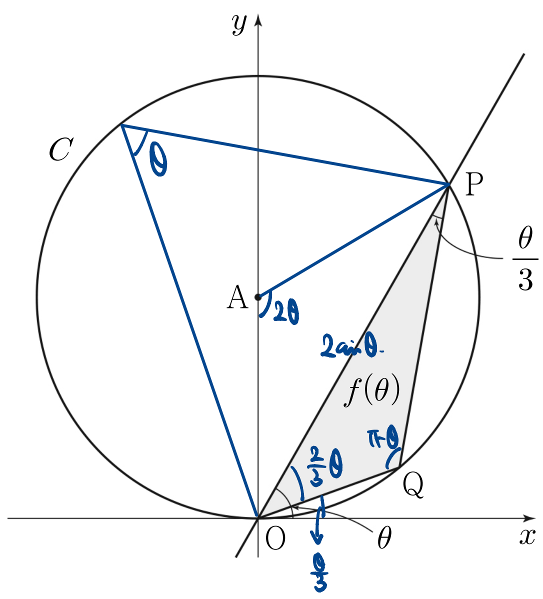
$b=\frac{(두 근의 합)}{2}=\frac{1}{4m}$

$2b-2=\frac{1}{2m}-2$.

$=\frac{4}{2-\sqrt{3}}-2=4(2+\sqrt{3})-2=6+4\sqrt{3}$.

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

27. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $A(0,\ 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle OPQ = \frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.) [3점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

△OPQ

$\frac{OQ}{\sin\frac{\theta}{3}} = \frac{PQ}{\sin\frac{2}{3}\theta} = \frac{OP}{\sin(\pi-\theta)} = 2R = 2.$

$\therefore OQ = 2\sin\frac{\theta}{3}$. $PQ = 2\sin\frac{2}{3}\theta$.

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{3}\cdot 2\sin\theta\cdot\sin\frac{2}{3}\theta.$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3} = \frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{3}\cdot2\cdot1\cdot\frac{2}{3}$

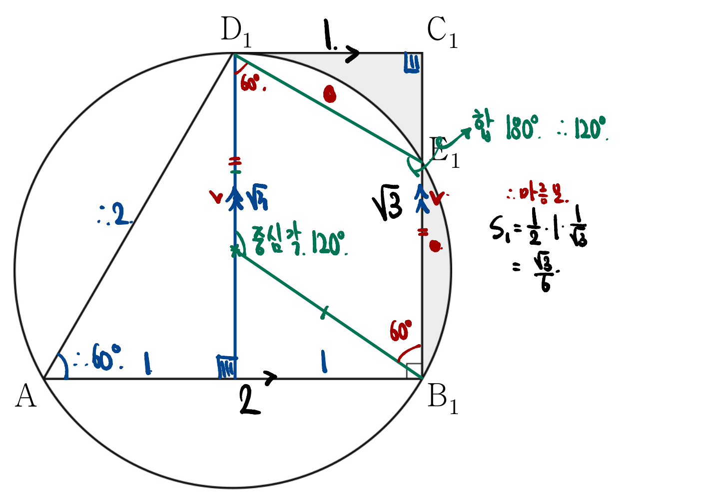
$= \frac{4}{9}$

28. 그림과 같이 $\overline{AB_1} = 2$, $\overline{B_1C_1} = \sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1} = 1$이고 $\angle C_1B_1A = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_1C_1D_1$이 있다. 세 점 A, B_1, D_1을 지나는 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 B_1이 아닌 점을 E_1이라 할 때, 두 선분 C_1D_1, C_1E_1과 호 E_1D_1로 둘러싸인 부분과 선분 B_1E_1과 호 B_1E_1로 둘러싸인 부분인 ◥ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

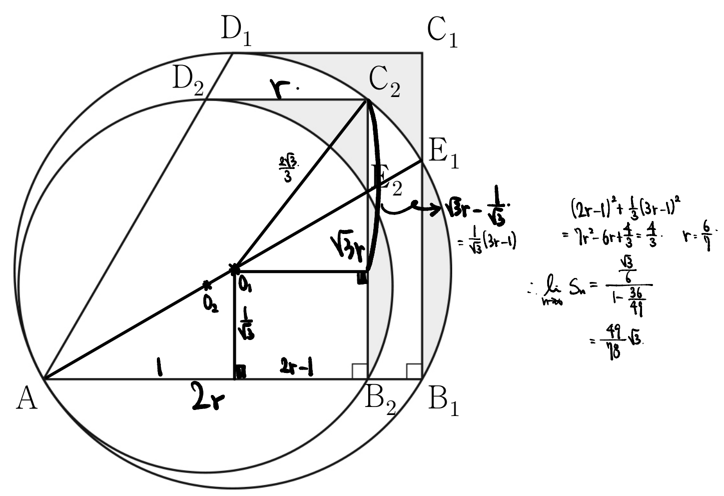
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 호 E_1D_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{B_2C_2} : \overline{C_2D_2} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle C_2B_2A = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 E_2를 잡고, 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$에 ◥ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



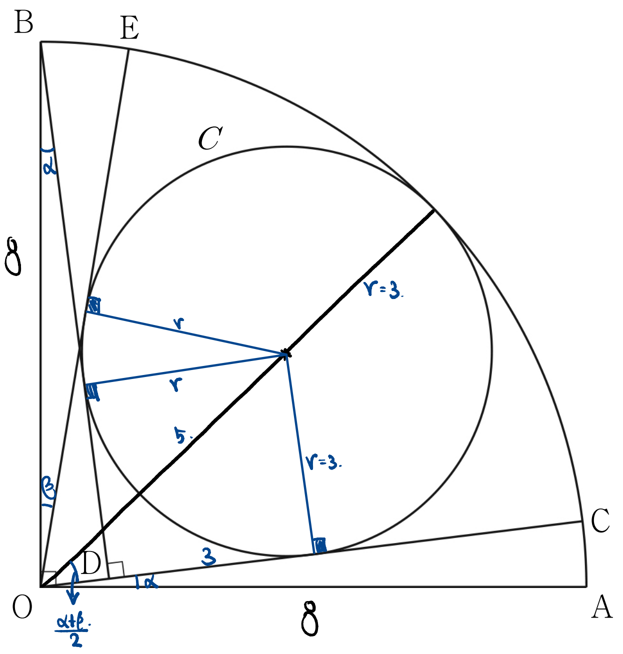
⋮ ⋮

① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$

④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

단답형

29. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle\mathrm{COE})=\frac{7}{25}$이다. $\sin(\angle\mathrm{AOE})=p+q\sqrt{7}$일 때, $200\times(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점] 79



$\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$. $\sin(\alpha+\beta)=\frac{24}{25}$.

$=2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-1$. $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{4}{5}$. $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{3}{5}$.

$\overline{OD}=8\sin\alpha=1$. $\therefore \sin\alpha=\frac{1}{8}$. $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

$\sin(\angle AOE)$

$=\sin((\alpha+\beta)+\alpha)$

$=\frac{24}{25}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{7}{25}\cdot\frac{1}{8}$

$=\frac{7+72\sqrt{7}}{200}$. $7+72=79$.

30. $x\geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0\leq x\leq 1) \\ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x\leq 2)\end{cases}$
>
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

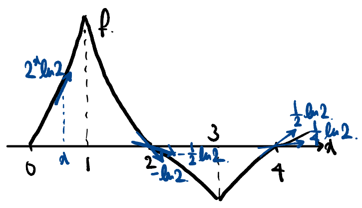
$x>0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점] 107



$g(x)=f'(x+)+f'(x-)=\begin{cases} 2f'(x) & (x\neq \text{음이 아닌 정수}) \\ 0 & (x=2n-1) \\ \left(-\frac{3}{2}\ln 2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (x=2n)\end{cases}$

홀수 ; $\lim_{t\to 0+}\{g(2n-1+t)-g(2n-1-t)\}+2g(2n-1)$

$=\lim_{t\to 0+}2g(2n-1+t)$ 첫항 $2f'(1+)=-4\ln 2$. 공비 $-\frac{1}{2}$

$=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(-4\ln 2)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$

$n=28$. $2n-1=55$.

짝수 ; $\lim_{t\to 0+}\{g(2n+t)-g(2n-t)\}+2g(2n)$

$=(-\ln 2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-(-2\ln 2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(-3\ln 2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 첫항 각각 $\begin{cases} 2f'(2+)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=-\ln 2 \\ 2f'(2-)=-2\ln 2 \\ 2g(2)=-3\ln 2\end{cases}$

$=(-2\ln 2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\ln 2}{2^{24}}$

$n=26$. $2n=52$.

$\therefore n=55, 52$

$55+52=107$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.