제 2 교시

수학 영역

만든 놈: crazy_hansuckwon
수면희, 오르비 : 한석원의눈물

5지선다형

간단한 지수계산

1. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

㉠ $3\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$

미분계수의 정의

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=2x-2$ 이고,

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$ 이므로

㉠ $f'(3)=\boxed{4}$

시그마 분리~

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$

$\therefore$ ㉠ $\sum_{k=1}^{10}a_k=\boxed{15}$

연속의 정의. 간단!

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)$: 연속 $\to \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\therefore f(1)=4-f(1)$ 이므로 ㉠ $f(1)=\boxed{2}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

곱의 미분법 아니?

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$ 에서

㉠ $g'(1)=3f(1)+2f'(1)$

$=6+6$

$=\boxed{12}$

sin과 cos 동시에 등장 ⇒ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이용가치 ↑↑

6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ 이므로

$-\sin\theta=\frac{1}{7}\cos\theta \xrightarrow{\text{양변제곱}} \sin^2\theta=\frac{1}{49}\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하면

$\sin^2\theta=\frac{1}{49}(1-\sin^2\theta)$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{50}$ 에서 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{10}$

이때, $\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta$ 인데 $\cos\theta<0$ 이므로

㉠ $\sin\theta=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{10}}$

좌표대입. ⊕ 거리는 절댓값! 그래프를 안그리면 A가 위인지 B가 위인지 분간안됨 ⇒ 절댓값!

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4$일 때, a의 값은? [3점]

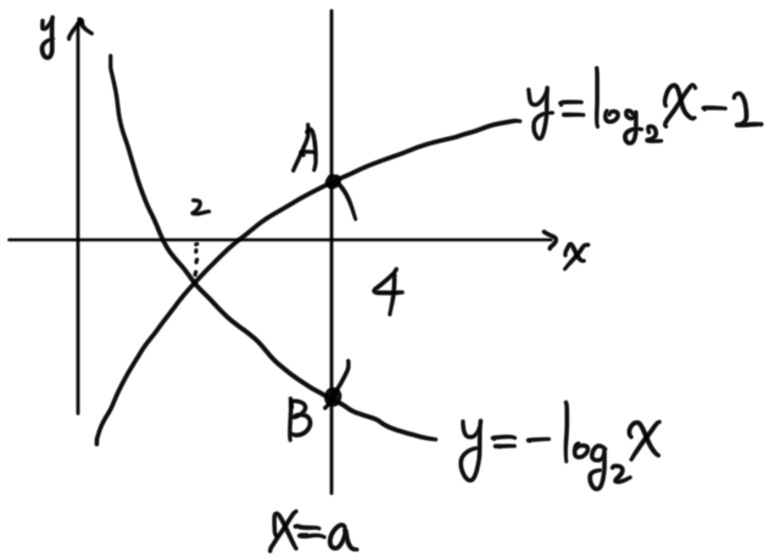
① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$y=\log_2(x-a)$의 점근선: $x=a$

$y=\log_2\frac{x}{4}=\log_2 x-2$

$y=\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$

이므로 그래프를 그려보면



곧 $\overline{AB}=(\log_2 a-2)-(-\log_2 a)=4$

$\therefore \log_2 a=3$ 이므로 $a=\boxed{8}$

이젠 익숙해져야 함. 차이 함수!

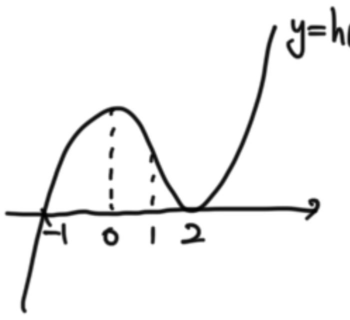
8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

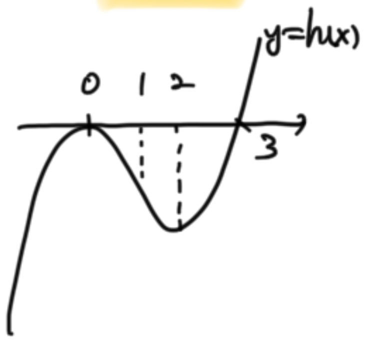
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x): 2x^2-1$, $g(x): x^3-x^2+k$ 로 두고 $h(x)=g(x)-f(x)$로 두면

$h(x)=x^3-3x^2+k+1$

$\to h'(x)=3x^2-6x$
$=3x(x-2)$ 에서 $y=h(x)$와 x축이 두 점에서 만나야 함

i) 

ii) 

$\to h(-1)=h(2)=0$ 이므로 $k=3$

$\to h(0)=h(3)=0$ 이므로 $k=-1$

구 양수 $k=\boxed{3}$

등차수열의 합 ⊕ 부분분수

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

상수항이 0인 이차식: 등차수열의 합

$\to \frac{1}{(2k-1)a_k}$ 는 등차수열이고, 이차식의 이차항 계수가 1이므로 등차수열의 공차 $=2$이다.

이때 초항을 구하기 위해 양변에 1을 대입하면 $\frac{1}{a_1}=S_1=3$ 이다.

곧 $\left\{\frac{1}{(2k-1)a_k}\right\}$ 는 $2k+1$ $(k\geq 1)$ 이고,

$a_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 이다.

구 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$

$=\boxed{\frac{10}{21}}$

넓이와 정적분 사이의 관계

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

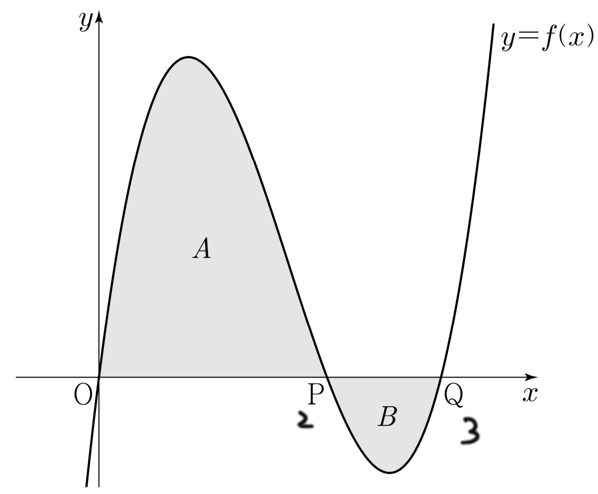
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{OP}<\overline{OQ})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



A의 "넓이" = A의 정적분
B의 "넓이" = B의 정적분 × (−1)

곧 A의 넓이 − B의 넓이
= A의 정적분 + B의 정적분 = 3

$\to \int_0^3 f(x)dx=3$

$\therefore k\int_0^3 x(x-2)(x-3)dx$

$=k\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)dx$

$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=3$ 이므로 이를 계산하면

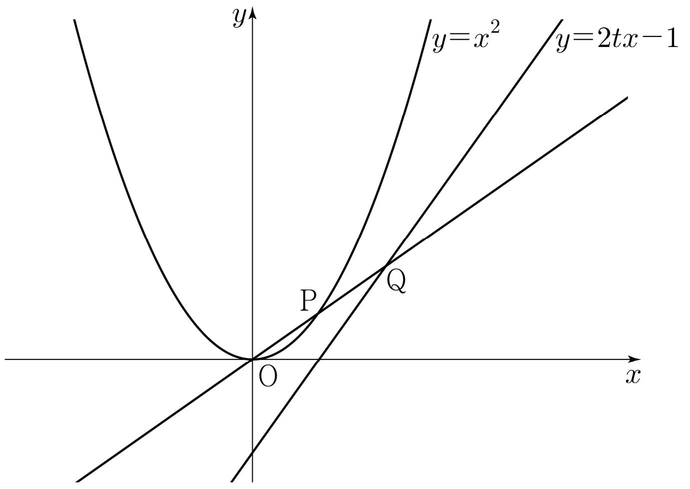
구 $k=\boxed{\frac{4}{3}}$

만든 놈 : ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

점 P만 찾고나면 그 이후로는 일사천리. 마지막 극한 계산 실수 ㄴㄴ

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때,

$\lim\limits_{t\to 1-}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

직선과의 거리가 최소인 지점 : 점 P에서의 접선의 기울기가 직선의 기울기와 동일한 지점

⇒ $y=2tx-1$ 의 기울기 : $2t$ 이므로 $P(t, t^2)$

($\because$ $y=x^2$ 에서의 접선의 기울기 $2t$인 지점이 P)

곧 $\overline{OP}$는 기울기가 t인 직선이므로 $y=tx$ 이고, 이 직선과 $y=2tx-1$ 사이의 교점 $Q(\frac{1}{t}, 1)$이다.

$\therefore$ $\overline{PQ}=\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}$ 이므로

㉠ $\lim\limits_{t\to 1-}\dfrac{\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}}{1-t}=\lim\limits_{t\to 1-}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{t^2}(t^2-1)^2+(t^2-1)^2}}{1-t}$

$=\lim\limits_{t\to 1-}\dfrac{\sqrt{(t^2-1)^2(\frac{1}{t^2}+1)}}{1-t}=\lim\limits_{t\to 1-}\sqrt{(t+1)^2(\frac{1}{t^2}+1)}$

$\therefore \sqrt{4\times 2}$

$=\boxed{2\sqrt{2}}$

b_n이 등차수열임을 찾는게 우선. $n(A\cap B)=3$ 인 조건의 의미 파악이 제일 중요!!

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n\ge 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},\quad B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30　② 34　③ 38　④ 42　⑤ 46

등차수열은 일정한 개수 & 간격으로 묶어낸 수열 역시 등차수열

⇒ $b_n=a_n+a_{n+1}$도 등차수열

이 때 a_n의 공차 $=d$로 두면 b_n의 공차 $=2d$이다.

($a_n=dn+c$ 이면 $a_{n+1}=d(n+1)+c$ 이고 $b_n=\underbrace{2d}_{\text{공차}}n+2c+d$)

결국 이를 직선으로 생각하게 되면

a_n은 기울기 d인 직선 위의 점, b_n은 기울기 $2d$인 직선 위의 점이다.

이 말의 의미가 중요한데, a_n의 두 항 차이 $=b_n$의 한 항 차이라는 것이다.

곧, 만약 $\{A\cap B\}$의 원소에 a_1이 없다면

$a_2=b_1$ 이더라도 $a_4=b_2$ 으로 $n(A\cap B)$은 최대 2개이다.

$\therefore$ $\{A\cap B\}$에는 a_1이 무조건 포함되어야 하고, 남은 원소들은 두 항씩 떨어진 a_3, a_5 이어야 한다.

i) $a_1=b_1$ 인 경우 $a_1=a_1+a_2$ 이므로 $a_2=0$ 에서 모순

ii) $a_1=b_2$ 인 경우 $a_1=a_2+a_3$ 이므로 $a_3-a_1=4$ 에서

$d=2$

$\therefore a_{20}=a_2+18d=-4+36$

$=32$

iii) $a_1=b_3$인 경우 $a_1=a_3+a_4$ 이므로 $-a_3=a_4-a_1$에서

$-(-4+d)=3d$　$\therefore d=1$

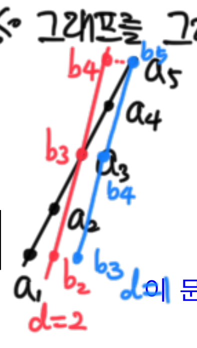
$\therefore a_{20}=a_2+18d=14$

iv) $a_1=b_4$인 경우 $a_3=b_5$ 뿐이라 $n(A\cap B)=2$: 모순

v) $a_1=b_5$도 마찬가지로 $n(A\cap B)=1$: 모순

㉠ a_{20}의 합 : $\boxed{46}$

※ 그래프를 그려보면 (공차 양수로 가정, 음수도 동일함)



과 같다.

$d=2$일 때 $a_1=b_2$, $a_3=b_3$, $a_5=b_4$

$d=1$일 때 $a_1=b_3$, $a_3=b_4$, $a_5=b_5$

관희 원의 지름에서 직각 이용하려고 하다가 헤맴. 굳이 기하적 성질 이용할 필요가 없는 문제

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

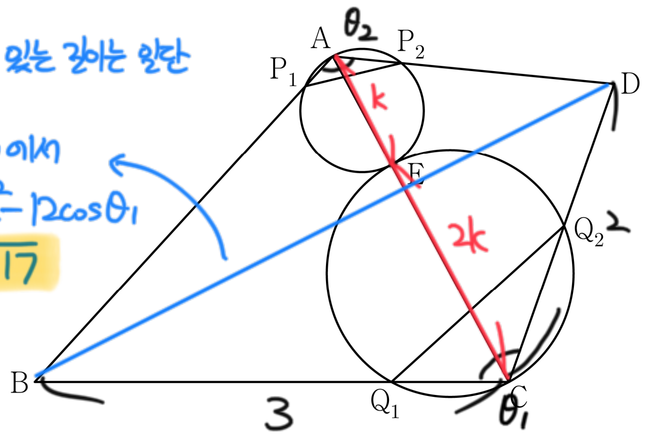
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]

표기할 수 있는 길이는 일단 다 표기!

Cos Law에서

$\overline{BD}^2=3^2+2^2-12\cos\theta_1$

∴ $\overline{BD}=\sqrt{17}$



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

Sin Law 적용.

① $\overline{EC}$를 지름으로 하는 원에서 $\dfrac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\theta_1}=2k$

이 때 $\cos\theta_1=-\frac{1}{3}$이므로 $\sin\theta_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고, ($\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)

곧 $\overline{Q_1Q_2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}k$이다.

② $\overline{AE}$를 지름으로 하는 원에서 $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\sin\theta_2}=k$

∴ $\overline{P_1P_2}=k\sin\theta_2$이다.

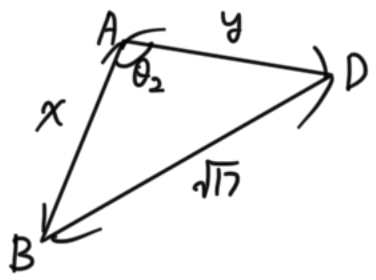
조건에서

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이므로 $k\sin\theta_2:\frac{4\sqrt{2}}{3}k=3:5\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4\sqrt{2}k=5\sqrt{2}k\sin\theta_2$ ∴ $\sin\theta_2=\frac{4}{5}$, $\cos\theta_2=-\frac{3}{5}$ 주의!

($\frac{\pi}{2}<\theta_2<\pi$)

이제야 우리는 △ABD=2 조건을 써먹을 수 있다.



에서 $2=\frac{1}{2}xy\sin\theta_2$ 이므로

$xy=5$

또한, △ABD에서 Cos Law를 적용하면

$17=x^2+y^2-2xy\cos\theta_2$이고, $xy=5$, $\cos\theta_2=-\frac{3}{5}$이므로

$17=(x+y)^2-10+6$ ㉠ $x+y=\boxed{\sqrt{21}}$ $(x+y>0)$

계산 억지여서 14번임?

14. 실수 $a\,(a\ge 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

운동방향 변동 ⇒ 속도 그래프 부호변동점!

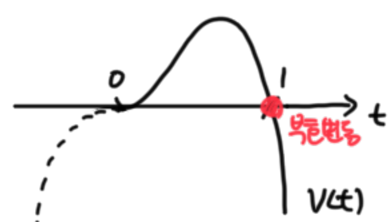
곧

과 같은 꼴은 불가능. 부호변동점 1개여야 함

⇒ t축과 V(t)가 접하는 지점이 존재해야 함!

i) $a=0$일 때

$V(t)=-t^3(t-1)$



위치의 변화량: $\int_0^2 -t^3(t-1)\,dt$

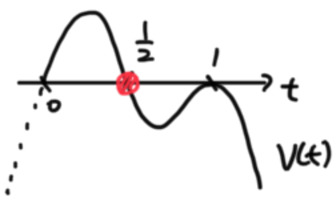
$=\int_0^2(-t^4+t^3)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$

$=-\frac{12}{5}$

ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

$V(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$



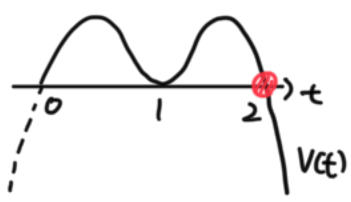
위치의 변화량: $\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2\,dt$

⇒ 계산생략...

⇒ $-\frac{11}{15}$

iii) $a=1$일 때

$V(t)=-t(t-1)^2(t-2)$



위치의 변화량: $\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)\,dt$

⇒ 계산생략...

⇒ $\frac{4}{15}$

㉠ 위치 변화량의 최댓값: $\boxed{\frac{4}{15}}$

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

case 분류 좀 귀찮긴 한데 순차적으로 a_1부터 쓰면 되니까 어렵지는 않음

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

: a_3 조건
: a_4 조건
: a_5 조건

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

"자연수" k이므로 $a_1 = k > 0$

$\Rightarrow a_2 = a_1 - 2 - k$
$= k - 2 - k = -2$

$\therefore a_2 = -2$ (고정)

$a_2 < 0$ 이므로

$\Rightarrow a_3 = a_2 + 4 - k$
$= -2 + 4 - k = 2-k$ ⟨ $2-k>0$ / $2-k<0$ 으로 case 분류!

※ 왜 $2-k \le 0$이 아닌 $2-k<0$ 인가? $a_3 = 0$ 이면 $a_3a_4a_5a_6<0$은 애초에 불가능하기 때문 ⇒ 앞으로의 case 분류도 지금처럼 0 제외하고 할거임

i) $2-k>0$인 경우 ($2>k$ 전제)

$a_4 = a_3 - 6 - k$
$= (2-k) - 6 - k = -4-2k$ 이고, $2>k$인 자연수 k는 1뿐이므로 $k=1$

곧 $a_4 = -6$ 이고, 주어진 규칙을 통해 나머지 항도 구해보면 $a_5 = 1$, $a_6 = -10$

$\therefore a_3a_4a_5a_6 = (+)\times(-)\times(+)\times(-) > 0$ 이므로 $\boxed{\text{모순}}$

ii) $2-k<0$인 경우 ($2<k$ 전제)

$a_4 = a_3 + 6 - k$
$= (2-k) + 6 - k = 8-2k$ ⟨ $8-2k>0$ / $8-2k<0$ 또 case 분류필요!

① $8-2k>0$인 경우 ($4>k$ 전제)

$a_5 = a_4 - 8 - k$
$= (8-2k) - 8 - k = -3k < 0$ ($\because k$는 자연수)

$a_6 = a_5 + 10 - k$
$= -3k + 10 - k = 10-4k$

이 경우 $a_3a_4a_5a_6 = (-)\times(+)\times(-)\times ?$ 이므로 $10-4k<0$ 이어야 함.

$\therefore \frac{5}{2} < k$, $4>k$, $2<k$의 공통범위: $\frac{5}{2}<k<4$

이를 만족하는 자연수 $k = \boxed{3}$

② $8-2k<0$인 경우부터는 여백 문제로 다음 page

단답형

지수/로그 부등식은 밑 OR 지수 통일이 기본

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

밑 통일

$\Rightarrow 2^{x-6} \le 2^{-2x}$ 에서 $x-6 \le -2x$

$\therefore x \le 2$ 이므로

㉠ 모든 자연수 x의 합: $1+2 = \boxed{3}$

부정적분 ⊕ 적분상수 결정

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 1$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int f'(x)dx = 2x^4 - x + C$ 에서 $f(0) = 3$이므로

$f(x) = 2x^4 - x + 3$

㉠ $f(2) = \boxed{33}$

15번 문제 이어서

만든 놈 : crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

② $8-2k<0$ 인 경우 ($4<k$ 전제)

$a_5 = a_4 + 8 - k$
$= (8-2k) + 8 - k = 16-3k$ → $16-3k>0$ / $16-3k<0$ 마지막 case 분류

(i) $16-3k>0$ 인 경우 ($\frac{16}{3}>k$ 전제)

$a_6 = a_5 - 10 - k$
$= (16-3k) - 10 - k = 6-4k$

이 경우 $a_3 a_4 a_5 a_6 = (-)\times(-)\times(+)\times ?$ 이므로 $6-4k<0$ 이어야 함

∴ $\frac{3}{2}<k$, $\frac{16}{3}>k$, $4<k$, $2<k$ 의 공통범위는 $4<k<\frac{16}{3}$

이를 만족하는 자연수 $k=\boxed{5}$

(ii) $16-3k<0$ 인 경우 ($\frac{16}{3}<k$ 전제)

$a_6 = a_5 + 10 - k$
$= (16-3k) + 10 - k = 26-4k$

이 경우 $a_3 a_4 a_5 a_6 = (-)\times(-)\times(-)\times ?$ 이므로 $26-4k>0$ 이어야 함

∴ $\frac{13}{2}>k$, $\frac{16}{3}<k$, $4<k$, $2<k$ 의 공통범위는 $\frac{16}{3}<k<\frac{13}{2}$

이를 만족하는 자연수 $k=\boxed{6}$

곧, ㉠ k의 합 : $3+5+6$
$= \boxed{14}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수면회, 오르비 : 한석원의눈물

그저 미분...

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

$f(1)=a+b+a$
$=2a+b=-2$ ⋯ ①

$f'(x)=3ax^2+b$이 $x=1$에서 극소이므로
$f'(1)=3a+b=0$ ⋯ ②

①과 ②를 연립하면 $a=2$, $b=-6$

곧 $f'(x)=6x^2-6$
$=6(x+1)(x-1)$ 에서

㉠ 극댓값 $f(-1)=2\times(-1)^3-6\times(-1)+2$
$=\boxed{6}$

함숫값의 범위와 주기의 결정. 19번치고는 어려웠을수도?

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

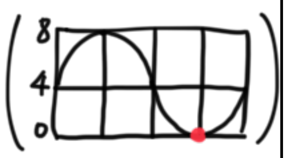
가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
> (나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$-1\leq \sin bx\leq 1$ 에서 출발.
$-a\leq a\sin bx\leq a$ $(a>0)$
→ $-a+(8-a)\leq a\sin bx+8-a\leq a+8-a$
⇒ $8-2a\leq a\sin bx+8-a\leq 8$ 이므로

(가) 조건에 의해 $8-2a\geq 0$ 이다. ∴ $4\geq a$

이 때, $f(x)=0$의 실근이 존재해야 하므로 $8-2a=0$ 이다.
∴ $a=4$ → $f(x)=4\sin bx+4$
이 때, 한 주기마다 실근이 1개 존재하므로



실근이 4개 존재하려면 주기 4번 반복되어야 함
⇒ $b=4$

㉠ $a+b=\boxed{8}$

치열도록 나왔던 유형. 개형 잘 추려보세요

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

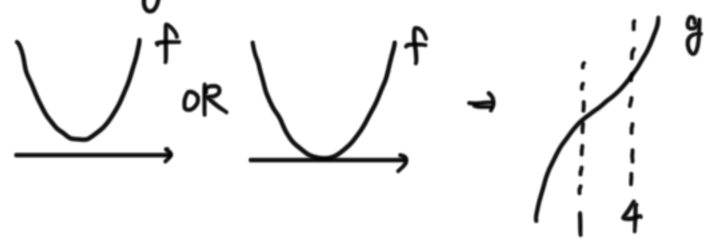
$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

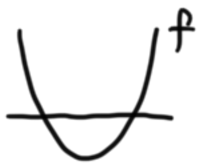
> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq|g(3)|$이다.

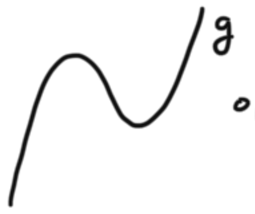
$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서
① $g(x)$는 최고차항계수 $\frac{1}{3}$인 삼차함수
② $g'(x)=f(x)$
③ $g(0)=0$ ($g(x)$는 원점지난다)

이제 $f(x)$가 $g(x)$의 도함수이므로 $f(x)$의 개형따라 case 분류

i)


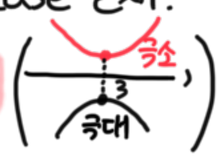
⇒ $g(x)$는 증가함수이므로 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$ 모순.

곧


이고, 이 경우


이다.

조건을 해석해보면
① $x\geq 1$인 "모든 실수" x에 대해 $g(x)\geq g(4)$: $g(4)$는 $g(x)$의 극솟값
if) 극솟값이 아니라면? 4 주변 어딘가에서는 무조건 $g(x)<g(4)$
② 〃 $|g(x)|\geq|g(3)|$: $|g(x)|$는 $x=3$에서 극소
⇒ 이미 $g(x)$는 $x=4$에서 극소이므로 $x=3$은 두가지 case 존재.

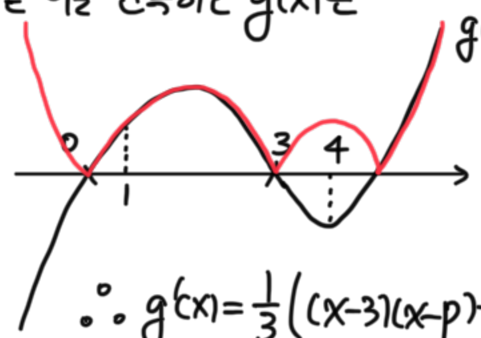
i) $g(3)<0$ 이고, $g(x)$는 $x=3$에서 극대였을 경우


⇒ 이 경우 $g(0)=0$ 조건 만족시키지 못한다. ($g(0)<0$ 일 수밖에 없음)

ii) $g(x)$가 절댓값에 의해 접히면서 $x=3$에서 새롭게 극솟값을 가질 경우 ⇒ $g(3)=0$
(ex.


)

곧 이를 만족하는 $g(x)$는



이고, $g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-p)$ 이다.

∴ $g'(x)=\frac{1}{3}\left((x-3)(x-p)+x(x-p)+x(x-3)\right)$ 에서 $g'(4)=0$ 을 대입하면 $p=\frac{24}{5}$ 이고, 곧 ㉠ $f(9)=g'(9)=\boxed{39}$

만든 놈: [ö] crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

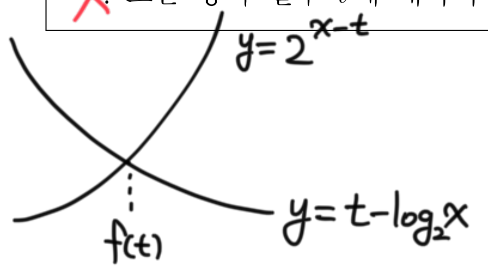
이젠 ㄱㄴㄷ을 8자선다로... 평가원은 진화한다. 옛날 기출(약10년전)로 돌아간느낌

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

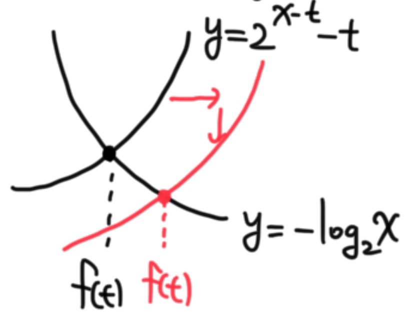
ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
~~ㄷ~~. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.



연립하는 것 아님!!

ㄱ. 명제의 참/거짓만 판별하면 되므로
$t=1$일 때 $y=2^{x-1}$과 $y=1-\log_2 x$ 교점 x좌표 $f(1)$
$\Rightarrow$ $x=1$ 대입하면 $2^{1-1}=1-\log_2 1$ $\therefore f(1)=1$
$t=2$일 때 마찬가지로 $x=2$ 대입하면 $2^{2-2}=2-\log_2 2$
이므로 $f(2)=2$ $\therefore A=\boxed{100}$

ㄴ. t가 양변에 있으므로 처리하기 기분나쁘다 $\Rightarrow$ 한쪽으로 몰아!
(사실 그냥 처리해도 상관없긴 함)
$2^{x-t}=t-\log_2 x$ 만족하는 x : $f(t)$ 이므로 t를 이항
$\Rightarrow$ $\underbrace{2^{x-t}-t}_{\text{변수}}=\underbrace{-\log_2 x}_{\text{고정}}$을 만족하는 x : $f(t)$
곧 t가 증가하면 $y=2^{x-t}-t$는 오른쪽/아래로 이동하므로



그림에서 $f(t)$는 증가한다.
$\therefore B=\boxed{10}$

ㄷ. 다음 page

생각보다 많이 쉬움. 아마 준킬러에 데여서 이건 생긴것만 보고 쳐다보지도 않았을듯?

22. 정수 $a\,(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를 "정수" k의 곱 = −12의 중요성!

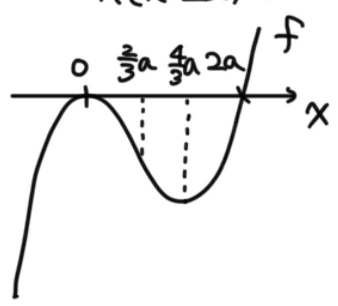
$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

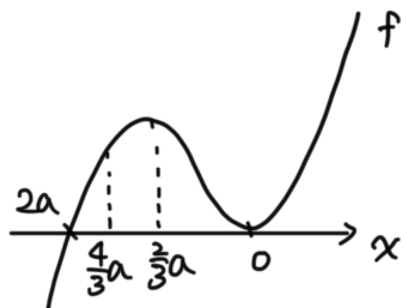
> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

함수 증/감에 따라 부호변동 하나는 (+), 하나는 (−)

$f(x)=x^3-2ax^2$
$=x^2(x-2a)$이므로 a의 부호에 따라 case 분류해보면



<a>0>



<a<0>

이 때, $\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}$은 $(x_1, f(x_1))\sim(x_2, f(x_2))$의 평균변화율
$\left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}$은 $(x_2, f(x_2))\sim(x_3, f(x_3))$의 평균변화율

둘이 부호가 다르려면 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 극점이 존재해야 한다.

왜? 기울기의 부호가 바뀐다는 의미이므로 증/감 한 번은 바뀌어야 함

케이스 분류는 다음 page

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

21번 ㄷ & 부연설명 (위에선 예빡문제로 설명 못한부분)

지수 & 로그함수 : 특히 밑이 2일 때 !!

⇒ □ 과 기울기 ±1 인 직선으로 관찰

만든 놈 : crazy_hansukwon

수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

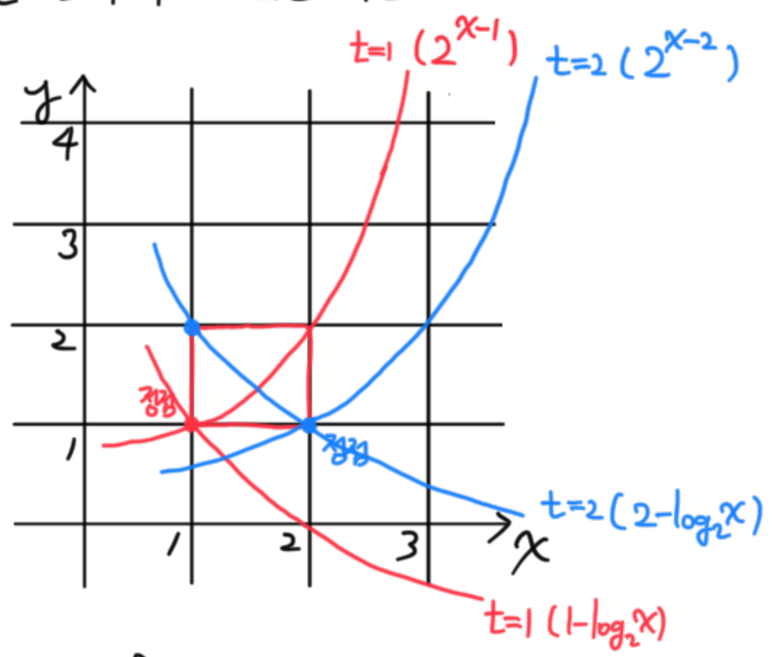
지수 & 로그함수는 특수한 점으로 관찰하는 것 중요. ⇒ "정점"

① $y=t-\log_2 x$ 는 $(1,t)$를 정점으로 가짐

② $y=2^{x-t}$는 $(t,1)$를 정점으로 가짐

} ⇒ 두 정점은 모두 $x+y=t+1$, 즉 $y=-x+(t+1)$인 직선위의 점임을 알 수 있다.

곧 $t=1$ 와 $t=2$일 때를 보면 (ㄱ선지)



$f(1)=1$, $f(2)=2$ 을 알 수 있다.
교점 $(1,1)$ 교점 $(2,1)$

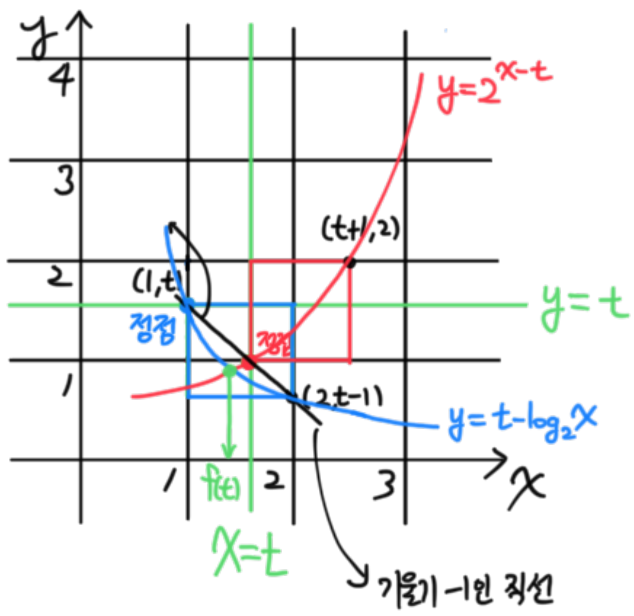
여기서 $f(t)\geq t$ (ㄷ 선지)를 해석하기 위해 ㄱ선지를 괜히 준 것이 아니라고 생각.

⇒ $1<t<2$ 와 $0<t\leq 1$, $2\leq t$ 으로 case 분류!

이때 각 정점이 $(t,1)$, $(1,t)$라는데에서 $y=t-\log_2 x$는 $(2,t-1)$를 지나므로 $(1,t)$, $(t,1)$, $(2,t-1)$는 기울기 -1인 직선 $y=-x+(t+1)$ 위의 점임을 알 수 있다.

마찬가지로, $y=2^{x-t}$는 $(t+1,2)$를 지난다는 점도 이용가능.

case 1) $1<t<2$ 인 경우



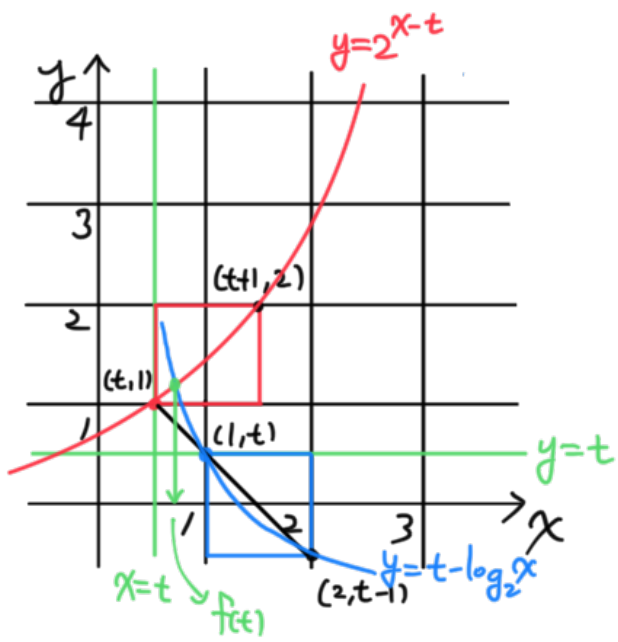
$y=t-\log_2 x$는 $(1,t)$, $(2,t-1)$를 지나지만 이 사이구간을 아래로 볼록하게 지나기 때문에 $y=2^{x-t}$의 정점의 x좌표인 $x=t$보다 왼쪽에서 교점이 발생하게 된다.

(기울기 -1인 직선과의 관계를 잘 생각해보시길 !)

∴ $f(t)\leq t$ 이므로 모순

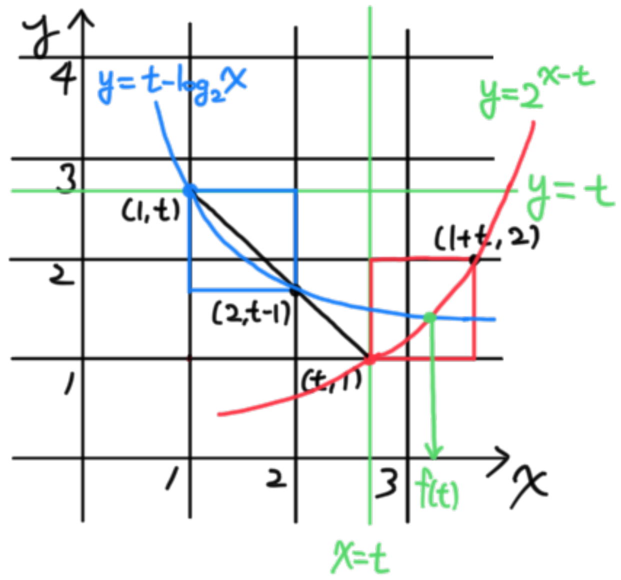
사실 실전에서는 여기까지 풀고 답 찍고 넘어가도 되지만 나머지 케이스도 모두 보자.

case 2) $0<t<1$ 인 경우



똑같은 논리로 $t\leq f(t)$ 이므로 이 경우는 성립.

case 3) $2\leq t$인 경우



마찬가지로 $t\leq f(t)$ 이므로 성립.

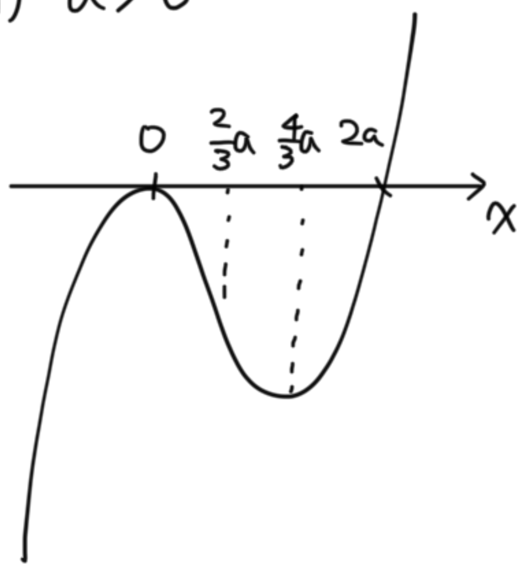
∴ $C=\boxed{0}$

㉠ $A+B+C=\boxed{110}$

22번 이어서 (case 분류)

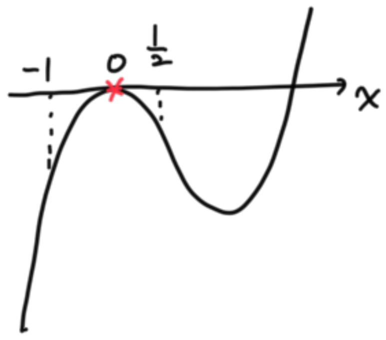
만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

i) $a>0$



① $k\le -2$ 일때
구간의 끝점 $k+\frac{3}{2}\le -\frac{1}{2}$ 이므로 극점 X : 모순

② $k=-1$ 일때 ($\because$ k는 정수)
구간이 $(-1, \frac{1}{2})$ 이므로



⇒ 극점 $x=0$에서 보장

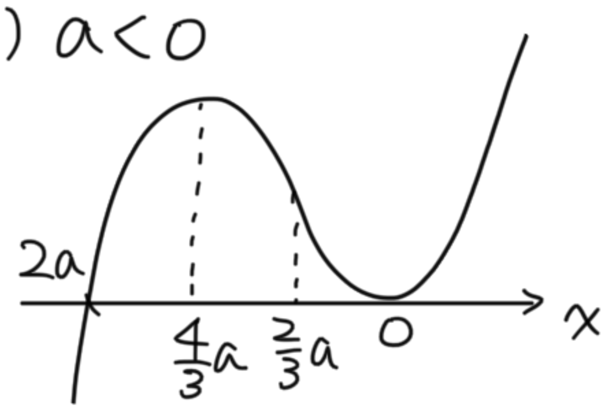
③ $k=0$ 일때
⇒ 정수 k의 곱이 -12 이므로 $k=0$은 성립하면 안됨.
⇒ $(0, \frac{3}{2})$에 극점 없어야 함
⇒ $\frac{3}{2}\le\frac{4}{3}a$ 이므로 $\frac{9}{8}\le a$

⋮

그런데 생각해보면 구간이 오른쪽으로 순차적으로 이동하므로 가능한 k도 연속된 자연수일텐데 연속된 자연수 k를 곱해서 12를 만들 수 있는 방법은 존재하지 않는다.

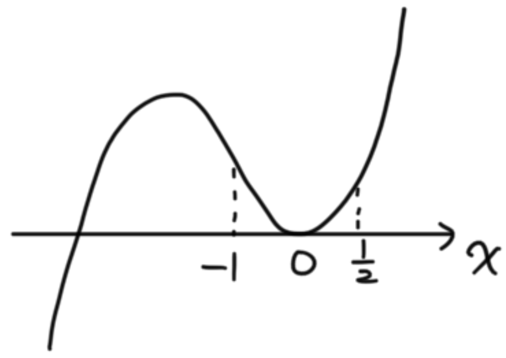
$\therefore$ $a>0$은 모순

ii) $a<0$



① $k\ge 0$ 일때
구간 내에 극점 존재하지 않음 ⇒ 모순

② $k=-1$ 일때
구간이 $(-1, \frac{1}{2})$ 이므로 사이에 극점 $(x=0)$ 존재



⇒ 성립 보장

여기서 음의 정수 k를 곱해 나머지 12를 만드는 방법은
(i) -2×-6 OR (ii) -3×-4 두 가지 방법뿐이다.

이때 $(-2)\times(-6)$인 경우는 $k=-3,-4,-5$일때 성립하면 X
하지만 $(-2,-\frac{1}{2})$ 구간에 $x=\frac{4}{3}a$가 존재하다가 $(-3,-\frac{3}{2}),(-4,-\frac{5}{2}),(-5,-\frac{7}{2})$에서는 존재하지 않고 다시 $(-6,-\frac{9}{2})$에서 존재하는건 불가능.
(생각해보면 당연함... 극점은 1개밖에 없으니까!)

곧 (ii)인 경우가 정답임을 알 수 있다.

③ $k=-2$일 때
구간이 $(-2,-\frac{1}{2})$ 이므로 사이에 $x=\frac{4}{3}a$이 존재 X
$\therefore$ $\frac{4}{3}a\le -2$ 이므로 $a\le -\frac{3}{2}$

④ $k=-3$일 때
동일하게 $(-3,-\frac{3}{2})$ 안에 $x=\frac{4}{3}a$ 존재
$\therefore$ $-3<\frac{4}{3}a<-\frac{3}{2}$ 이므로 $-\frac{9}{4}<a<-\frac{9}{8}$

⑤ $k=-4$일 때
동일하게 $(-4,-\frac{5}{2})$ 안에 $x=\frac{4}{3}a$ 존재
$\therefore$ $-4<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$ 이므로 $-3<a<-\frac{15}{8}$

⑥ $k\le -5$일 때
$-\frac{7}{2}\le\frac{4}{3}a$ 이면 되므로 $-\frac{21}{8}\le a$

모두 만족하는 정수 a: -2
곧 $f(x)=x^3+4x^2$ 에서
$f'(x)=3x^2+8x$ 이므로
㉠ $f'(10)=\boxed{380}$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

5지선다형

같.포.순

23. 5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

$\frac{5!}{2!} = \boxed{60}$

확률과 집합의 관계. 3점 단골문제~

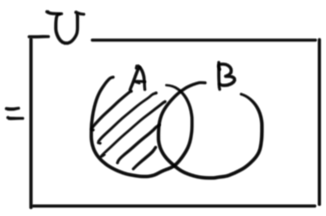
24. 두 사건 A, B에 대하여

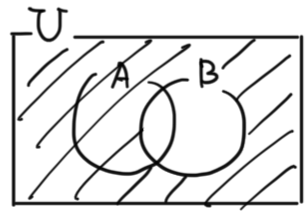
$$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{P}(B^C) = \frac{7}{18}$$

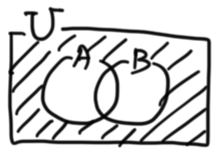
일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

주어진 집합에 따라 벤 다이어그램을 그려보면

$P(A \cap B^c) =$  $: \frac{1}{9}$

$P(B^c) =$  $: \frac{7}{18}$

 $= \frac{7}{18} - \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

⑦ $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$
$= 1 - \frac{5}{18}$
$= \boxed{\frac{13}{18}}$

만든놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

여사건 VS 그냥 풀기 선택!

25. 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{4}{7}$　✓③ $\frac{9}{14}$　④ $\frac{5}{7}$　⑤ $\frac{11}{14}$

여사건 써도 되고 그냥 풀어도 된다. (이 문제는 여사건이 편함)

Sol1) 여사건 쓰는 경우

$1-(P(\text{흰색 손수건 1장})+P(\text{흰색 손수건 0장}))$

i) 흰 1, 검 3

$\Rightarrow \frac{{}_4C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4} = \frac{40}{{}_9C_4}$

ii) 흰 0, 검 4

$\Rightarrow \frac{{}_4C_0 \times {}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{{}_9C_4}$

$\frac{45}{{}_9C_4}$

즉, ㉠ $1-\frac{45}{{}_9C_4} = \boxed{\frac{9}{14}}$

Sol2) 여사건 안 쓰는 경우

i) 흰 2 검 2

$\Rightarrow \frac{{}_4C_2 \times {}_5C_2}{{}_9C_4} = \frac{60}{{}_9C_4}$

ii) 흰 3 검 1

$\Rightarrow \frac{{}_4C_3 \times {}_5C_1}{{}_9C_4} = \frac{20}{{}_9C_4}$

iii) 흰 4 검 0

$\Rightarrow \frac{{}_4C_4 \times {}_5C_0}{{}_9C_4} = \frac{1}{{}_9C_4}$

$\frac{81}{{}_9C_4} = \boxed{\frac{9}{14}}$

이항정리 기본문제. 한 문제씩은 꼭 나오는 듯

26. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

✓① 15　② 20　③ 25　④ 30　⑤ 35

i) $(x-1)^6$에서 x^2, $(2x+1)^7$에서 상수

$\Rightarrow \{{}_6C_2 \cdot x^2 \cdot (-1)^4\} \times \{{}_7C_0 \cdot (2x)^0 \cdot 1^7\}$

$= 15x^2$

ii) $(x-1)^6$에서 x, $(2x+1)^7$에서 x

$\Rightarrow \{{}_6C_1 \cdot x^1 \cdot (-1)^5\} \times \{{}_7C_1 \cdot (2x) \cdot 1^6\}$

$= -6x \times 14x$

$= -84x^2$

iii) $(x-1)^6$에서 상수, $(2x+1)^7$에서 x^2

$\Rightarrow \{{}_6C_0 \cdot x^0 \cdot (-1)^6\} \times \{{}_7C_2 \cdot (2x)^2 \cdot 1^5\}$

$= 84x^2$

∴ ㉠ x^2의 계수 $= 15-84+84$

$= \boxed{15}$

조건부확률? 어렵지 않음. 때로는 그냥 세는게 빠름

27. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a\times b$가 4의 배수일 때, $a+b\leq 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$a\times b$가 4의 배수인 경우의 수

i) $a\times b=4$ → (1,4), (2,2), (4,1)
ii) $a\times b=8$ → (2,4), (4,2)
iii) $a\times b=12$ → (2,6), (3,4), (4,3), (6,2)
iv) $a\times b=16$ → (4,4)
v) $a\times b=20$ → (4,5), (5,4) → 총 15가지
vi) $a\times b=24$ → (4,6), (6,4)
vii) $a\times b=28$ → 존재 X
viii) $a\times b=32$ → 존재 X
IX) $a\times b=36$ → (6,6)

이 중 $a+b\leq 7$인 경우는
(1,4), (2,2), (4,1), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3)

∴ 7가지

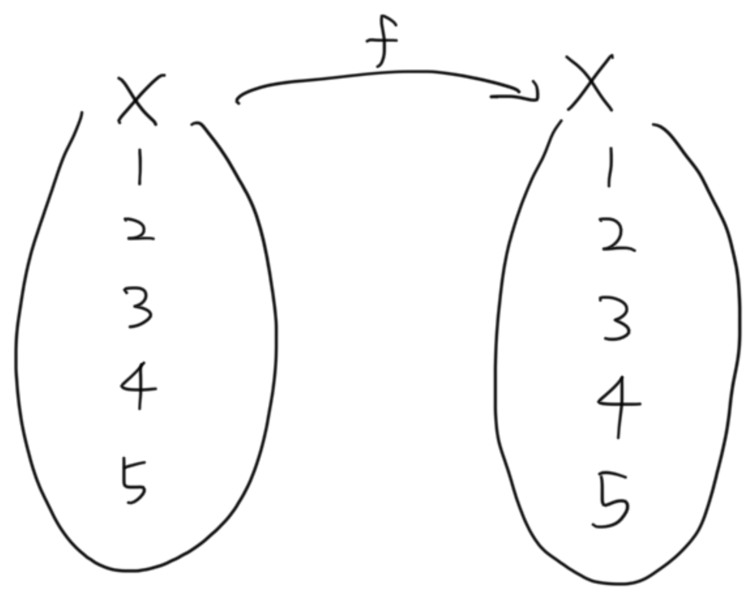
② $\boxed{\frac{7}{15}}$

치역관련은 치역 개수로 case 분류 ⑦ 곱이 홀수인 조건의 중요성!!

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1)\times f(3)\times f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2)<f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

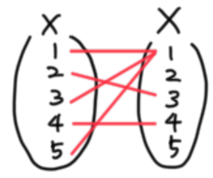
① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144



(가) 세 수의 곱이 홀수
→ 홀×홀×홀 외엔 존재 X

문제 조건에 "치역의 개수"가 등장했으니
f(1), f(3), f(5)의 치역 개수로 case 분류.

i) f(1), f(3), f(5) 치역 1개
⇒ f(2)와 f(4)가 f(1), f(3), f(5)와 다른 값이어야 한다. → ex)



⇒ f(1), f(3), f(5)의 치역 1개를 고르는 경우의 수 3가지
⇒ 공역 나머지 4개 원소중 f(2), f(4)를 f(2)<f(4)를 만족하도록 고르는 경우의 수
$_4C_2$가지 ∴ $3\times {}_4C_2=18$

ii) f(1), f(3), f(5) 치역 2개
⇒ ① 치역이 {1, 3}일 경우
→ f(2), f(4)가 치역으로 {1, 3} 중 한 개를 원소로 가지고 나머지 {2, 4, 5} 중 한 개를 원소로 가지면서 f(2)<f(4)를 만족해야 함 → $2\times3=6$ (순서가 정해져 있기 때문)
곧, f(1), f(3), f(5)를 {1, 3}에 배열하는 경우의 수 $=2^3-2=6$가지이므로
(2를 빼주는 이유는 f(1), f(3), f(5) 모두 1 or 3으로 쏠리는 경우 빼줄것.)
∴ $6\times6=36$
② 치역이 {1, 5}일 경우 → 동일한 논리로 36
③ 치역이 {3, 5}일 경우 → 〃 36
$36\times3=108$가지

iii) f(1), f(3), f(5) 치역 3개
⇒ f(1), f(3), f(5)를 {1, 3, 5}에 1개씩 배열하는 경우의 수 $3!=6$
나머지 f(2), f(4)도 {1, 3, 5}에 f(2)<f(4)를 만족하며 배열해야 함
⇒ $_3C_2=3$
∴ $6\times3=18$가지

⑦ $18+108+18=\boxed{144}$

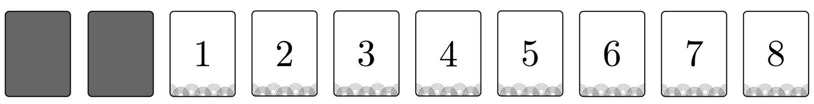
만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수박퀴, 오르비: 한석원의눈물

단답형

너무 실망스러운데 . . . 너무 쉬움

29. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
> (나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
> (다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



(가): 순서를 신경쓸 필요가 없다! 행복함~

(다): 3의 배수라 해봤자 3, 6 뿐.

case 1) 검은색 카드 사이에 3"만" 있을 경우
검은색 중 왼쪽의 카드는 3보다 왼쪽에, 오른쪽의 카드는 3과 6 사이에~

V 1 V 2 V 3 V 4 V 5 V 6 7 8

V: 검은색 중 왼쪽 카드가 들어갈 후보군
V: 검은색 중 오른쪽 카드가 들어갈 후보군 } $3\times3=9$

여기서 (나) 조건을 만족시키지 않는 ▨3▨ 만 빼면 8가지이다.

case 2) 검은색 카드 사이에 6"만" 있을 경우
마찬가지로 (설명생략)

1 2 3 V 4 V 5 V 6 V 7 V 8 V ⇒ $3\times3=9$

여기서 (나) 조건을 만족시키지 않는 ▨6▨ 만 빼면 8가지이다.

case 3) 검은색 카드 사이에 3과 6 모두 있을 경우

V 1 V 2 V 3 4 5 6 V 7 V 8 V ⇒ $3\times3=9$

이 경우 (나) 조건을 만족시키지 않는 경우는 없다.

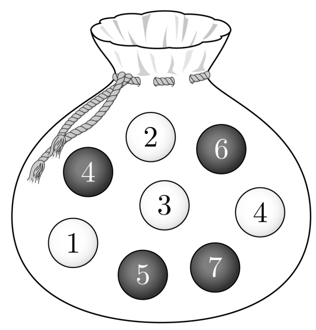
㉠ $8+8+9$
$=\boxed{25}$

너무 실망스러운데... 너무 쉬움 ② 이 정도면 평가원이 킬러내기 귀찮았던게 아닐까

30. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고,
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



전체 경우의 수 ${}_8C_2$

① 서로 다른 색의 공을 뽑으면 무조건 만족
⇒ ${}_4C_1\times{}_4C_1=16$

② 같은 색의 공을 뽑았을 때 두 수의 곱이 24 이하의 짝수인 경우
검은공: $(4,5), (4,6)$ → 2가지
흰공: ${}_4C_2$에서 $(1,3)$ 한가지를 뺀 5가지

$\therefore \dfrac{16+2+5}{{}_8C_2}=\dfrac{23}{28}$

㉠ $p+q=\boxed{51}$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

5지선다형

극한의 부정형 처리 ($\infty - \infty$꼴)

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\infty - \infty$꼴: 유리화

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}=\boxed{\frac{5}{2}}$$

매개변수 미분법

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\cdot 2t}{(t^2+1)^2},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{3\cdot 2t}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5(t^2-1)}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{-5(t^2-1)}$$

곧 ㉠ $t=2$일때 $\frac{dy}{dx}=\boxed{-4}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

극한 (응꿀) ⇒ $x\to 0$으로 갈때의 다양한 공식 숙지

25. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

분모가 $x\to 0$에서 $2^{b\cdot 0}-1=0$이므로
분자도 0이어야 극한값 존재.
곧 $2^b=8$이고 $b=3$이다.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^3(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$

$$=2^3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{x}}{\frac{2^{3x}-1}{x}}$$

$$=2^3\cdot\frac{a}{3}=16$$

곧 $\frac{a}{3}=2$이므로 $a=6$

㉠ $a+b=\boxed{9}$

(원래는 $\frac{a}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$으로 계산하는 게 정석이긴 함)

$f'(x)$ 분석 잘 하기만 하면 쉬움

26. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

$f(x)=x^2-5x+2\ln x$ 으로 두면

$$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}$$

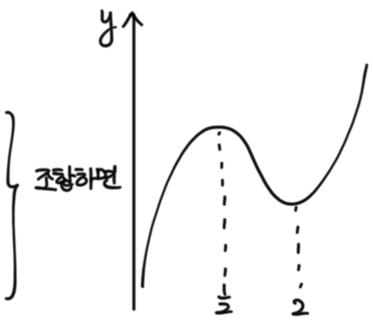
$$=\frac{2x^2-5x+2}{x}$$

$$=\frac{(x-2)(2x-1)}{x}$$ ⇒ $x=\frac{1}{2}$, $x=2$에서 극점

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\underbrace{x^2-5x}_{+\infty}+\underbrace{2\ln x}_{+\infty})=\infty$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(\underbrace{x^2-5x}_{0}+\underbrace{2\ln x}_{-\infty})=-\infty$$

조합하면



곧 $y=f(x)$와 $y=t$의 교점이 2개이려면 $t_1=f(\frac{1}{2})$ OR $t_2=f(2)$

$$\therefore \begin{cases} t_1=\frac{1}{4}-\frac{5}{2}+2\ln\frac{1}{2} \\ t_2=4-10+2\ln 2\end{cases} \Rightarrow ㉠\ t_1+t_2=-\frac{33}{4}+2\left(\ln\frac{1}{2}+\ln 2\right)$$

$$=\boxed{-\frac{33}{4}}$$

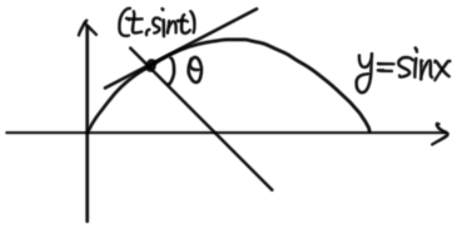
30번이 너무 쉬웠음...

좀 귀찮긴 한데 이 정도는 뭐... 수I이 미적분에도 언제든 등장가능!!

개인적으로 이번 미적분의 "진짜" 30번은 요놈. 합성함수는 특수한 부분을 관찰한다! ⊕ 대칭성 등 판단은 기본

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim\limits_{t\to\pi-}\dfrac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ✓③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1



$y'=\cos x$ 이므로 $(t, \sin t)$에서의 접선의 기울기: $\cos t$

곧 { 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α로 두고
기울기가 -1인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β로 두면 $(\beta=\frac{3}{4}\pi)$

$$|\tan(\beta-\alpha)|=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{-1-\cos t}{1-\cos t}\right|=\tan\theta$$

이때 $0<t<\pi$ 에서 $-1<\cos t<1$ 이고, $\left|\dfrac{-1-\cos t}{1-\cos t}\right|=\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}$

곧 $\tan\theta=\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}$

㉠ $\lim\limits_{t\to\pi-}\dfrac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\dfrac{1+\cos t}{(1-\cos t)(\pi-t)^2}$

$\pi-t=x$로 치환하면 $t=\pi-x$

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{1+\cos t}{(1-\cos t)(\pi-t)^2}=\lim_{x\to0+}\frac{1+\cos(\pi-x)}{(1-\cos(\pi-x))x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}=\lim_{x\to0+}\frac{\boxed{\sin^2 x}}{\boxed{x^2}(1+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0+}\frac{1}{(1+\cos x)^2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

※ 여기서 $\lim\limits_{x\to0+}(1-\cos x)=\frac{1}{2}x^2$으로 근사해서 바로 풀어도 된다.

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
> 이다.
>
> (나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\dfrac{1}{16}$ ✓② $-\dfrac{7}{64}$ ③ $-\dfrac{5}{32}$ ④ $-\dfrac{13}{64}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

대입은 항상 까먹지 말자.

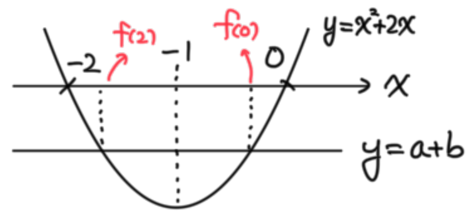
(나) 조건의 $x=0$, $x=2$를 (가) 식에 대입!

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a\cos^3 0\times e^{\sin^2 0}+b$
$=a+b$

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a\cos^3 2\pi\times e^{\sin^2 2\pi}+b$
$=a+b$

곧 $x=f(0)$과 $x=f(2)$는 $x^2+2x=a+b$의 두 실근과 같다.

∴ 이차함수의 대칭성에 의해



$\Rightarrow\dfrac{f(0)+f(2)}{2}=-1$ 이고, $f(0)=f(2)+1$ 이므로

$f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$

이로부터 $a+b=\{f(0)\}^2+2f(0)=-\frac{3}{4}$를 얻는다.

이제부터 합성함수 관점 본격적으로 도입

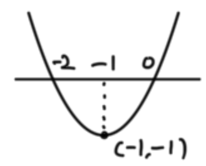
주어진 식 $\{f(x)\}^2+2f(x)$ 은 $y=x^2+2x$ 와 $y=f(x)$ 합성.

그렇다면 $a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$은?

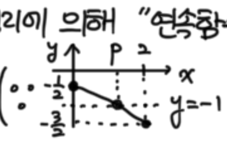
$\Rightarrow a\cos^3\pi x\times e^{1-\cos^2\pi x}+b$ 으로 변형하면 $y=ax^3e^{1-x^2}+b$ 와 $y=\cos\pi x$ 합성.

즉, 두 합성함수를 비교하는 문제고, 우리는 합성함수의 개형 자체에 관심 X → 특수한 지점!

좌변 $(x^2+2x)\circ f(x)$를 보면 $y=x^2+2x$는



이 때, $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$ 이므로 사잇값 정리에 의해 "연속함수" $f(x)$는 무조건 $f(p)=-1$인 $x=p$가 적어도 한 개 존재한다.



곧 $y=x^2+2x$는 $x=-1$에서 최솟값 -1을 갖는데, 속함수 $f(x)$가 $f(p)=-1$이 되는 경우가 존재하니 $\{f(x)\}^2+2f(x)$는 $x=p$에서 최솟값 -1을 갖는다.

⇒ (가)에서 주어진 식이 항등식이니 우변도 $x=p$에서 최솟값 -1 가져야 한다.

28번 이어서

이제 우변을 관찰해보자.

$y=(ax^3e^{1-x^2}+b)\circ(\cos\pi x)$ 에서 겉함수를 보면 $(0,b)$ 대칭임을 알 수 있다.

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

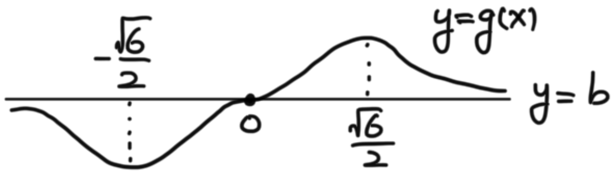
($\because$ $y=ax^3e^{1-x^2}$ 에 x 대신 $-x$ 대입해보면 기함수 $\Rightarrow$ $(0,0)$ 대칭)

곧, $g(x)=ax^3e^{1-x^2}+b$ 로 두면 $g'(x)=3ax^2e^{1-x^2}-2ax^4e^{1-x^2}$

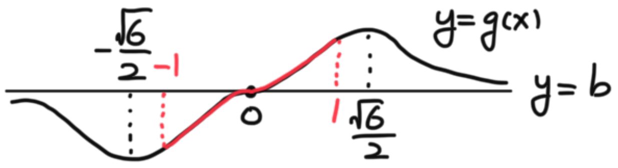
$=ax^2e^{1-x^2}(3-2x^2)$

$\Rightarrow$ $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ 에서 극점이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=b+$, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=b-$ ($\because$ 문제 조건에서 $a>0$)

$\therefore$ $g(x)$ 그래프를 그려보면



인데, 속함수 $y=\cos\pi x$가 $-1\le\cos\pi x\le 1$ 이므로
우리가 관찰해야 할 정의역 범위는 아래 그림과 같다.



$\Rightarrow$ $y=ax^3e^{1-x^2}+b$ 는 구간 $[-1,1]$ 에서 $x=-1$일 때 최솟값을 가지고, 그 값은 $-a+b$이다.

$\therefore$ 좌변과 우변의 논의를 종합해보면 우변도 최솟값 -1을 가지므로 $-a+b=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-\frac{3}{4} \\ -a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{7}{8}$$

⑦ $ab=\boxed{-\frac{7}{64}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

단답형

주어진 곡선이 기울어진 타원이기는 한데 우리가 이걸 기하적으로 다룰수는 없으니 계산!

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k \neq 0$, $b+2k \neq 0$) [4점]

곡선 위의 점: 대입을 까먹지 말자!

그런데 그냥 대입하면 식이 너무 엉켜버리니 정리 좀 하고 대입...

$A(a, a+k)$에서 x좌표 $-$ y좌표 $=(-k)$임에 착안해

$C: x^2-2xy+2y^2=15 \longrightarrow (x-y)^2+y^2=15$

$\begin{cases} \text{A좌표 대입: } k^2+(a+k)^2=15 \ \cdots ① \\ \text{B좌표 대입: } k^2+(b+k)^2=15 \ \cdots ② \end{cases}$

① $-$ ② 를 하면 $(a+k)^2-(b+k)^2=0$ 이므로 $(a+b+2k)(a-b)=0$

⇒ 점 A와 점 B에서의 접선의 기울기가 같지 않으므로 둘은 당연히 다른 점이고, 곧 $a-b\neq 0$ 에서 $a+b+2k=0$ 이다. $\cdots$ ③

또한 ① + ② 를 하면 $4k^2+a^2+b^2+2k(a+b)=30$ 이다.

⇒ ③에 의해 $a^2+b^2=30$을 알 수 있다.

이제 주어진 식을 씹고 뜯고 했으니 접선의 기울기 조건을 쓰자.

$C: x^2-2xy+2y^2=15$을 음함수 미분하면

$$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$$

곧 $\begin{cases} \text{점 A에서의 접선의 기울기} = \dfrac{-k}{-a-2k} \\ \text{점 B} \quad // \quad = \dfrac{-k}{-b-2k} \end{cases} \Rightarrow \therefore \dfrac{k^2}{(a+2k)(b+2k)}=-1$

이 식을 정리하면 $ab+2k(a+b)+5k^2=0$ 에서

③에 의해 $ab+(2k)(-2k)+5k^2=0$

⇒ $k^2=-ab$

따라서 $a^2+b^2=30$을 $\begin{cases} a+b=-2k \\ -ab=k^2 \end{cases}$ 으로 정리하면 $6k^2=30$

㉮ $k^2=\boxed{5}$

30번도 충분히 풀 만한 문제라는 것을 여실히 보여준 문제. 해보면 어렵지 않을걸?

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
>
> (나) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

(가), (나)에서 급수가 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_{2n-1}=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_{2n}=0$

$b_3=-1$ 이므로 $a_3\le -1$ ← 기준!

⇒ $\{a_n\}$의 초항을 a, 공비를 r로 두면

i) $|r|\ge 1$ 인 경우 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_{2n-1}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_{2n}\neq 0$ 이므로 모순

ii) $r=0$ 인 경우 당연히 모순

iii) $0<r<1$인 경우 $a_3\le -1$에서 음수. ⇒ 나머지 $\{a_n\}$의 항들도 모두 음수

iv) $-1<r<0$인 경우

공비가 음수이므로 항의 부호는

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$
$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$\cdots$

이 때 a_{2n}은 모두 $(+)$이므로 $a_{2n}\ge -1$ 이고, $b_{2n}=a_{2n}$이다.

⇒ (나) 조건에서 $\dfrac{ar}{1-r^2}=8$ $\quad\therefore ar=8(1-r^2)$

또한 $-1<r<0$ 이고 $a_3\le -1$ 이므로 $a_1=\dfrac{a_3}{r^2}\le -1$ 이고, $b_1=-1$ 확정

곧 $b_1=-1$, $b_3=-1$ 인데 $b_5=-1$ 이면 $b_7+b_9+\cdots=0$ 이므로 모순.

$\therefore b_{2n-1}=a_{2n-1}$ $(n\ge 3)$

⇒ (가) 조건에서 $\dfrac{ar^4}{1-r^2}=-1$ $\quad\therefore ar^4=-(1-r^2)$

곧 $\dfrac{ar^4}{ar}=\dfrac{-(1-r^2)}{8(1-r^2)}=-\dfrac{1}{8}$ 이므로 $r=-\dfrac{1}{2}$, 이를 통해 $a=-12$도 구할 수 있음

㉮ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=12+6+3+\frac{3}{2}+\cdots=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}=\boxed{24}$

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

5지선다형

평행이동 관계만 파악하면 어려울 건 X

23. 포물선 $y^2=-12(x-1)$의 준선을 $x=k$라 할 때, 상수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

$y^2=-12x \xrightarrow{x\to 1} y^2=-12(x-1)$

준선 $x=3$ ⟶ 준선 $x=4$

∴ ㉠ $k=\boxed{4}$

24번자리 어려웠을지도. 벡터의 분리!

24. 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

$$2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{CA}$$

일 때, $p-q$의 값은? (단, p와 q는 실수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ 이므로

$2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=q(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=-q\overrightarrow{BC}-q\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow (2+q)\overrightarrow{AB}+(p+q)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

A, B, C가 한 직선 위의 점이 아니므로

$\overrightarrow{AB}$과 $\overrightarrow{BC}$는 평행하지 않다.

∴ $2+q=0$, $p+q=0$ ($\because \overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$)

곧 $p=2$, $q=-2$ 이므로

㉠ $p-q=\boxed{4}$

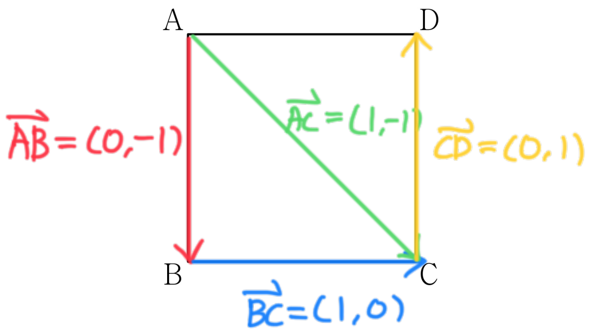
만든 놈: [ㅇ] crazy_hansuckwon
수란휘, 오르비 : 한석원의눈물

억지로 기하적 분석할 필요는 X. 성분화도 각 보이면 적극적으로 활용

25. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

$$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$$

일 때, 실수 k의 값은? [3점]



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

벡터를 성분화하기에 최고인 정사각형 등장
⇒ 성분화 안 할 이유 X

$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$

$\Rightarrow (k,-1)\cdot(1,3k-1)=0$

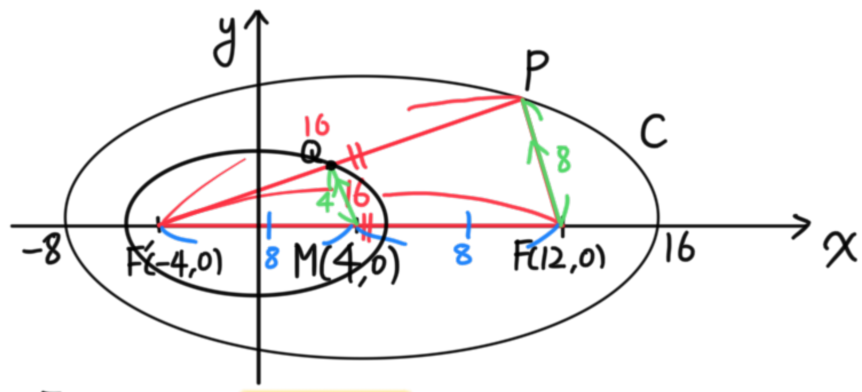
$\Rightarrow k-3k+1=0$

㉠ $k=\boxed{\frac{1}{2}}$

삼각형의 중점연결 ⇒ 닮음 이용 ~

26. 두 초점이 F(12, 0), F′(−4, 0)이고, 장축의 길이가 24인 타원 C가 있다. $\overline{F'F}=\overline{F'P}$인 타원 C 위의 점 P에 대하여 선분 F′P의 중점을 Q라 하자. 한 초점이 F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 Q를 지날 때, $\overline{PF}+a^2+b^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 46 ② 52 ③ 58 ④ 64 ⑤ 70



두 초점의 중심 : M(4, 0)
여기서 장축의 길이가 24이므로 타원의 x절편 : (4+12, 0), (4−12, 0)
⇒ (16, 0), (−8, 0)

곧 $\overline{FF'}=16$ 이므로 $\overline{F'P}=16$ 이고, 이를 만족하는 두 개의 점 중
1사분면 위의 점을 P로 두자. (어차피 $\overline{PF}$의 값은 불변)
그러면 타원의 정의에 의해 $\overline{PF'}+\overline{PF}=24$ 에서 $\overline{PF}=8$ 이고
△PFF′는 이등변△

$\overline{F'P}$의 중점이 점 Q이므로 △QF′M과 △PF′F는 닮음비 1:2인 이등변△

이때 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 은 중심이 원점인 타원인데 한 초점이 F′(−4, 0)
이므로 다른 초점은 M(4, 0)
⇒ $a^2-b^2=16$

타원의 정의에 의해 $\overline{QF'}+\overline{QM}$ = 장축의 길이 = $2a$
⇒ $8+4=2a$

∴ $a=6$ 이므로 $b^2=20$

㉠ $\overline{PF}+a^2+b^2$
$=8+36+20$
$=\boxed{64}$

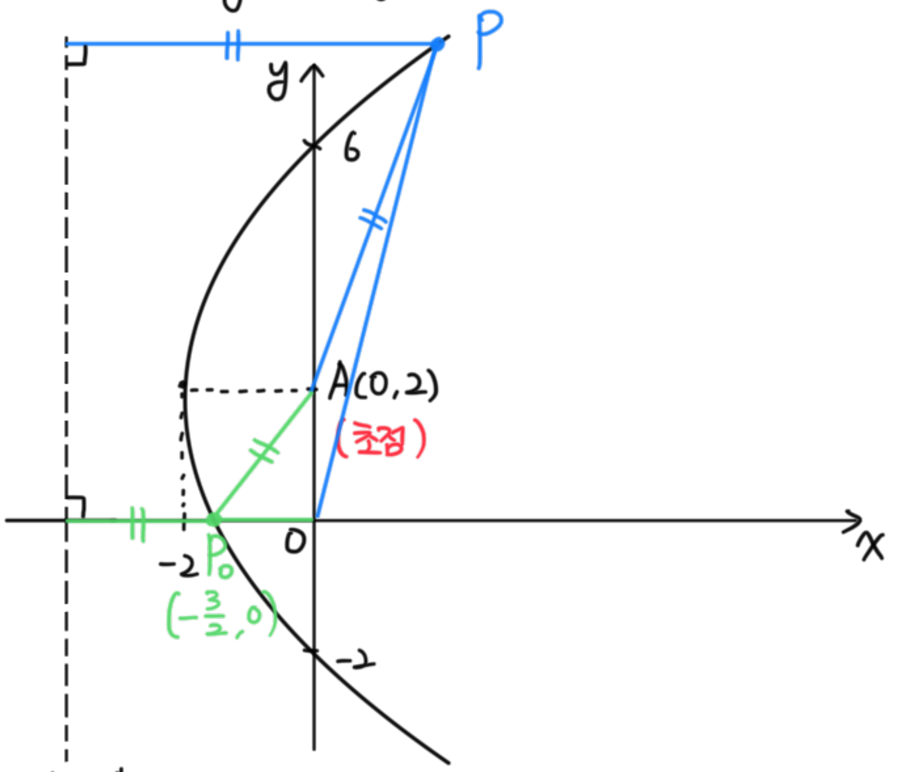
만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

보통 이차곡선 문제에서 A+B="최소"를 묻는다면 ① 일직선 위의 세점 ② 원의 중심과 관련

27. 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$ 위의 점 P와 점 A$(0,\ 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 P_0이라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{OP}_0}+\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{A}}$를 만족시키는 점 Q에 대하여 점 Q의 y좌표의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

$y^2=8x \xrightarrow[y\to 2]{x\to -2} (y-2)^2=8(x+2)$ 이므로 포물선의 그래프는



$x=-4$
(준선)

점 A가 초점이므로 $\overline{\mathrm{PA}}$는 포물선의 정의에 의해 준선~점P까지의 거리와 같다.

이제 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$가 언제 최소가 될지를 열심히 고민해보면

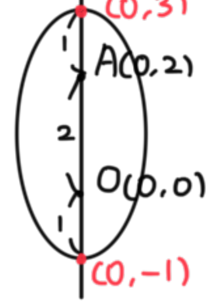
어차피 $\overline{\mathrm{PA}}$ = (준선~점P까지의 거리)

⇒ P의 x좌표하고만 관련되어 있으므로 P가 x축위의 점일때!

⇒ P_0는 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$ 와 x축의 교점이므로 $\mathrm{P}_0(-\frac{3}{2},0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}_0}+\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{A}}=\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{3}{2})^2+2^2}=4$

곧 점 Q는 $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=4$를 만족시키는 점이고, 이는 점 Q의 자취의 방정식이 초점을 O와 A로 하고 장축의 길이가 4인 타원임을 의미한다.

⇒ 

에서 $M=3,\ m=-1$

③ $M^2+m^2=\boxed{10}$

처음에 (가) 조건 "×"보고 ?? 벡터 외적이 교육과정에 있었나?? 하고 당황함 ㅋㅋ...

28. 좌표평면의 네 점 A$(2,\ 6)$, B$(6,\ 2)$, C$(4,\ 4)$, D$(8,\ 6)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

별로 안 어려운데! 29, 30보단 어려움

한 직선 $x+y=8$ 위의 점

> (가) $\{(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\times\{|\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-3\}=0$
>
> (나) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다.

집합 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최대인 점을 Q, y좌표가 최소인 점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

$AB=0 \Rightarrow A=0$ or $B=0$ 이므로

(가) 조건에서

$(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{DX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\ \cdots$ ① 이거나

$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-3=|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|-3=0\ \cdots$ ② 이다.

곧 ①에서 $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, ②에서 $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|=3$을 얻는다.

i) $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$: $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(4,4)$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{DX}}=(k,-k)$

조건 (나)의 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PX}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PX}}$

따라서 조건을 종합하면

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DX}}=(k,-k)$: 점 X는 점 D$(8,6)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 $x+y=14$ 위의 점

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PX}}$: 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 점이므로 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 어느 점이든 기울기 1인 직선을 그리면 그 직선 위의 점이 X

⇒ (1)과 (2)의 직선 교점이 점 X가 가능한 자취

ii) $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|=3$: 점 X는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점

i)과 동일한 방식으로 해석해보면

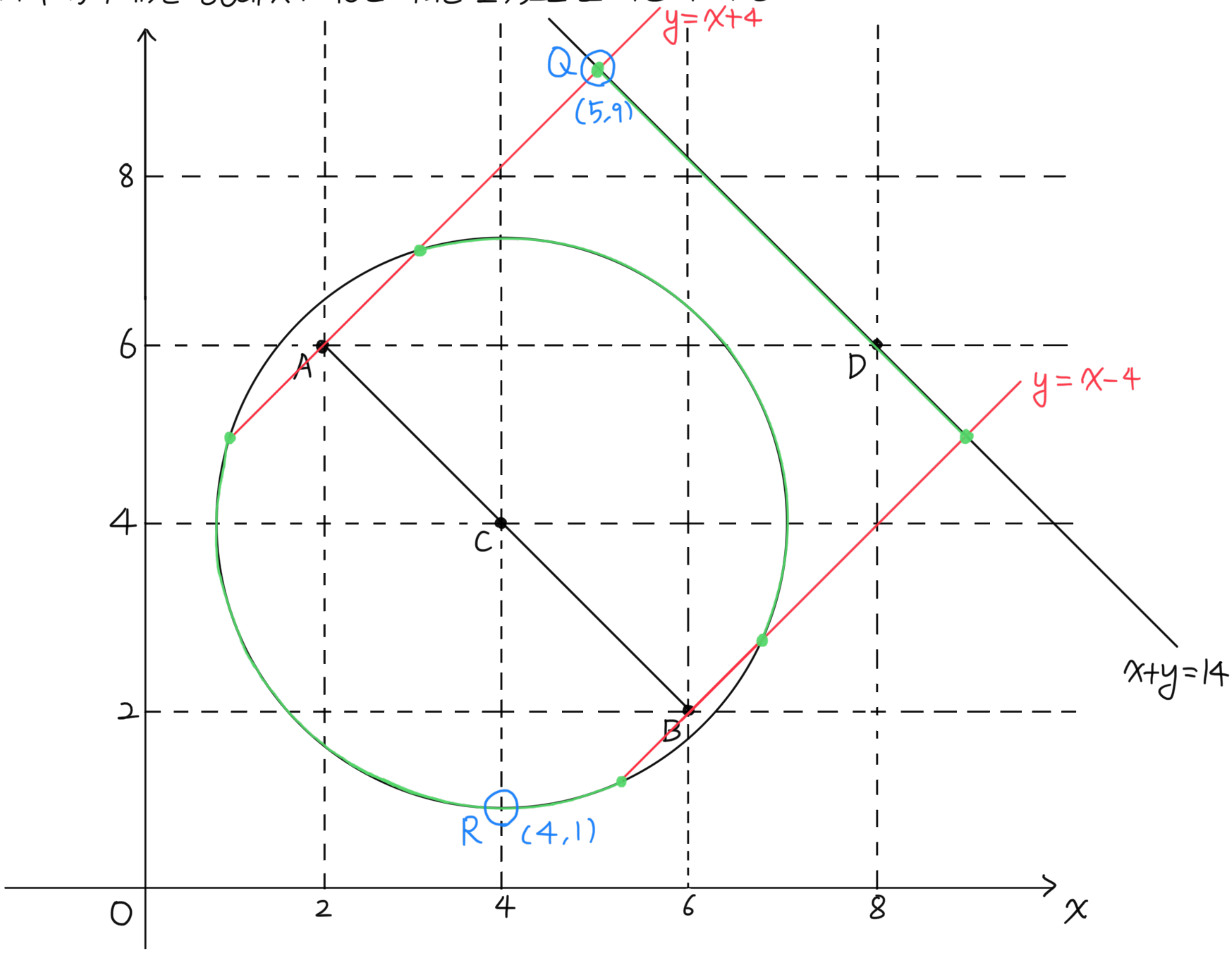
선분 $\overline{\mathrm{AB}}$에서 기울기 1인 직선을 그었을 때 그 직선과 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$의 교점이 점 X의 자취

다음 page

28번 이어서

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

따라서 i)과 ii)를 종합해 X가 가능한 자취를 초록색으로 표시하면 다음과 같다.



곧 그림에서 $\begin{cases} y\text{좌표가 최대인 점 } Q=(5,9) \\ y\text{좌표가 최소인 점 } R=(4,1) \end{cases}$

㉮ $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR} = (5,9)\cdot(4,1)$

$= 20+9$

$= \boxed{29}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

단답형

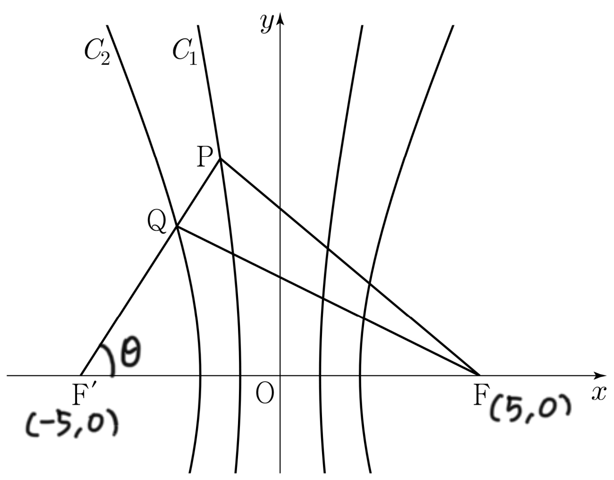
29번치고 너무 쉬움. 등차중항 이용하고 익숙한 처리 띡띡하면 끝

29. 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선

$$C_1 : x^2 - \frac{y^2}{24} = 1, \quad C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$$

이 있다. 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분 PF′이 쌍곡선 C_2와 만나는 점을 Q라 하자.

$\overline{PQ}+\overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF}+\overline{PF'}$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는 m이다. $60m$의 값을 구하시오. [4점]



쌍곡선 C_1, C_2 모두 초점의 좌표는 $(\pm 5, 0)$
($\because$ $1+24 = 4+21 = 5^2$)

$\overline{PQ}+\overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF}+\overline{PF'}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항을 이용하면 $4\overline{PF'} = \overline{PQ}+\overline{QF}+\overline{PF}+\overline{PF'}$

$$\Rightarrow \underbrace{(\overline{PF'}-\overline{PQ})}_{①} + \underbrace{(\overline{PF'}-\overline{QF})}_{②} + \underbrace{(\overline{PF'}-\overline{PF})}_{③} = 0$$

① : $\overline{PF'}-\overline{PQ}$ 은 일단 그대로 냅두자.

② : $\overline{PF'}-\overline{QF} = \overline{PQ}+(\overline{QF'}-\overline{QF})$

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{QF'}-\overline{QF} = -4$

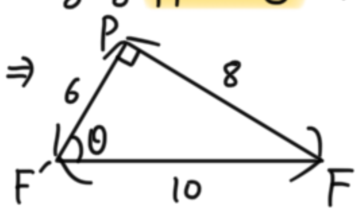
$\Rightarrow \overline{PQ}-4$

③ : $\overline{PF'}-\overline{PF}$ 도 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF'}-\overline{PF} = -2$

곧 ①+②+③ $= (\overline{PF'}-\overline{PQ})+(\overline{PQ}-4)-2 = 0$

$\therefore$ $\overline{PF'} = 6$ 이고, 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF} = 8$

$\Rightarrow$



여서 답 $m = \tan\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ 이므로

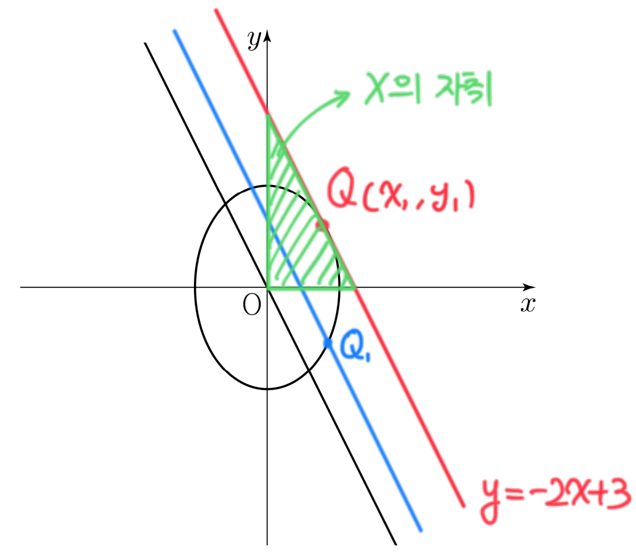
$60m = \boxed{80}$

이딴게 30번???? 확통도 그렇고 아예 선택과목 갈려 내가가 키참았던 건지 수능때 쉽게 내겠다고 암시하는 건지....

30. 직선 $2x+y=0$ 위를 움직이는 점 P와 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키고, x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ} \Rightarrow \overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$
$\Rightarrow \overrightarrow{QX} = \overrightarrow{OP}$

즉, 이 말은 타원 $2x^2+y^2=3$ 위의 점 Q에서 시작해 $\overrightarrow{OP}$, 즉 기울기가 -2인 직선을 그으면 그 중 x, y좌표 모두 0 이상인 점이 점 X의 자취라는 뜻.

$\Rightarrow$ 결국 타원의 기울기 -2인 접선이 경계.

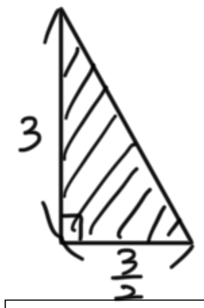
타원위의 점 (x_1, y_1) 위의 접선은 $2xx_1 + yy_1 = 3$ 이므로

$y = \frac{1}{y_1}(-2x_1 \cdot x + 3)$

$\Rightarrow \frac{-2x_1}{y_1} = -2$ 이므로 $x_1 = y_1$ 이고, (x_1, y_1)은 타원 위의 점이므로

$2x_1^2 + y_1^2 = 3$. 곧 $3x_1^2 = 3$ 에서 $x_1 = y_1 = 1$ ($\because$ $x_1, y_1 \geq 0$)

곧 $(1,1)$을 지나고 기울기 -2인 직선의 방정식은 $y = -2x+3$ 이므로



$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ $\quad \therefore$ 답 $p+q = \boxed{13}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.