경희대학교

2022학년도 신입생 수시모집

논술고사 문제지(자연계)

[11월 20일(토) 오후]

지원학부(과) (   )   수험번호 | | | | | | | | | | 성 명 (   )

<유의사항 : 아래 내용 위반시 감점 또는 0점 처리함>

1. 답안의 작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 펜을 사용하시고, 다른 펜으로 답안을 작성한 경우 공란으로 처리하므로 유의하시오.
2. 답안지에 제목을 쓰지 말고, 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 답안지에 답안과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오(예: 감사합니다 등).
4. 답안 작성 시 논제번호(예: Ⅰ, Ⅱ…)에 맞춰 답안을 작성하며, 논제별 소문항번호[예: (1), (2)…]를 쓰고 이어서 논술하시오.
5. 답안 정정 시에는 두 줄을 긋고 작성하며, 수정도구(수정액 또는 수정테이프) 사용은 절대 불가하므로 유의하시오.
6. 논제별 분량 제한을 준수하고 답안지는 반드시 1장만 사용하시오.
7. 지정된 답안의 작성 영역을 벗어나지 않도록 각별히 유의하시오.
8. **자연계 문제지는 총 2장 3쪽입니다.**

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

[가] 닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

[나] $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ (L, M은 실수)일 때, 모든 자연수 n에 대하여

① $a_n \le b_n$이면 $L \le M$

② $a_n \le c_n \le b_n$이고 $L = M$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

[다] 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

[라] 좌표평면의 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ, $\overline{\mathrm{OP}}$를 r이라 하면

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x\neq 0),\ \csc\theta = \frac{r}{y}\ (y\neq 0),\ \sec\theta = \frac{r}{x}\ (x\neq 0),\ \cot\theta = \frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

[마] 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

[바] 매개변수 t로 나타낸 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$이다.

[사] 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 위치를 매개변수 t에 관한 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$로 나타내면, $t = a$에서 $t = b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$이다.

< 다음 면에 계속 >

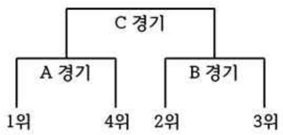
[논제 I]

(1) 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P}_n(0, -n)$에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 x절편을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

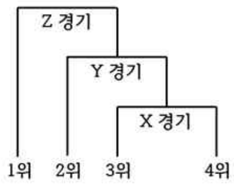
(2) 좌표평면의 곡선 $y=\ln x$와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 II]

체육 대회에서 예선을 통하여 상위 4개의 팀이 선발되었고, 이 중에서 우승팀을 결정하려고 한다. 우승팀을 결정하는 대진표는 아래와 같이 A, B, C 세 경기를 치르는 <대진표 1>과 X, Y, Z 세 경기를 치르는 <대진표 2>가 있다. 각 경기에서 한 팀이 다른 팀을 이길 확률은 예선 순위의 차이로 결정된다. 예선 상위 팀이 하위 팀을 이길 확률은 순위 차이가 1일 때 p, 순위 차이가 2일 때 q, 순위 차이가 3일 때 r이다. 예를 들어, 예선 1위 팀과 2위 팀이 경기를 할 때 1위가 이길 확률이 p, 2위와 4위가 경기를 할 때 2위가 이길 확률이 q, 1위와 4위가 경기를 할 때 1위가 이길 확률이 r이다. 단, 비기는 경우는 없으며, $0.5 \le p < q < r \le 1$이다. <대진표 1>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률을 P_1, <대진표 2>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률을 P_2라 하자.



<대진표 1>



<대진표 2>

(1) $p=0.6$, $q=0.7$, $r=0.8$일 때, P_1과 P_2를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) $q=\frac{5}{6}$, $r=1$일 때, P_1과 P_2를 각각 p의 식으로 나타내고, $P_1=P_2$가 되는 p를 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (15점)

< 다음 면에 계속 >

[논제 III]

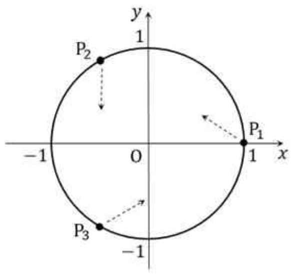
점 $\mathrm{A}\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선이 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 접하지 않는다. 이 직선이 y축과 만나는 점을 P, x축과 만나는 점을 Q, 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하고, 원점을 O라 하자.

(1) $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$일 때, 삼각형 OPQ의 넓이 $S(a)$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=1$일 때, 삼각형 OPQ의 넓이 $S(a)$에 대하여 $\lim_{a\to\infty}S(a)$와 $\lim_{a\to 0}S(a)$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 IV]

<그림 1>과 같이 중심이 원점 O이고 반지름이 1인 원 위에 같은 간격으로 놓여 있는 세 개 이상의 점 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$이 있다. 매순간 점 P_k $(k<n)$는 점 P_{k+1}을 향하여 움직이고, 점 P_n은 점 P_1을 향하여 움직인다. 점 P_1은 점 $(1,0)$에서 출발하고, $\overline{\mathrm{OP}_1}=\overline{\mathrm{OP}_2}=\cdots=\overline{\mathrm{OP}_n}>0$와 $\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2=\cdots=\angle\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OP}_n=\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_1$는 항상 성립한다. $\alpha=\dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



<그림 1: $n=3$인 경우>

(1) 매개변수 t가 동경 OP_1이 나타내는 각의 크기일 때, 점 P_1의 좌표 (x_1, y_1)을 나타내는 함수 $x_1=f_1(t)$, $y_1=g_1(t)$를 α를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

(2) 점 P_1이 $t=0$에서 $t=u$까지 움직인 거리 $s(u)$의 극한값 $\lim_{u\to\infty}s(u)$를 α를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

< 끝 >

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (I)문항

2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[가] 닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

[논제 I]

(1) 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P}_n(0, -n)$에서 곡선 $y = \ln x$에 그은 접선의 x절편을 b_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 좌표평면의 곡선 $y = \ln x$와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 미적분	류희찬 외 9인	㈜ 천재교과서	2020	187	제시문[가]	X

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 I] (1)에서는 고등학교 수학 교육과정인 도함수를 활용하여 주어진 점들로부터 주어진 곡선으로의 접선들을 논리적 사고력으로 정확히 구하는 문제를 출제하였다. 그리고 이 접선들의 x절편과 관련된 수열을 수학적으로 추론하고 그 수열 항들 간의 비율의 극한을 구하는 문제를 출제하였다.
[논제 I] (2)에서는 주어진 곡선과 이 곡선에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형을 논리적으로 정확히 추론하는 문제를 출제하였다. 그리고 이 도형을 밑면으로 하는 입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 정의할 수 있는지를 평가하는 문제를 출제하였다. 부피를 구하기 위해 로그함수의 적분이 필요한데 부분적분 방법을 두 번 적용하는 정확하고 섬세한 계산능력을 평가하는 문제를 출제하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 I] (1)에서는 미분계수를 이용하여 곡선 $y=\ln x$ 밖의 점들에서 이 곡선으로의 접선의 방정식을 정확히 구할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 또한 이 접선들의 x절편들로 이뤄진 수열의 연속하는 두 항간의 비율의 극한값을 교육과정에서 학습한 대로 정확히 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[논제 I] (2)에서는 곡선 $y=\ln x$와 이 곡선의 한 접선 및 x축으로 이뤄진 도형을 먼저 결정할 수 있는 능력을 평가하고자 하였으며, 이 도형을 밑면으로 하는 입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있는지 평가하고자 하였다. 특히 구간별로 다른 형태의 두 입체도형을 구분할 수 있는 논리적 사고능력을 평가하고자 하였으며 로그함수의 적분을 위해 부분적분 방법을 두 번 적용하여 입체도형의 부피를 정확히 구할 수 있는 계산능력을 평가하고자 하였다.

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 I]
(1) (10점)
<5점> 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 정확히 구하고, 접선의 x절편을 정확히 구한다.
<5점> x절편들로 이뤄진 수열의 연속하는 두 항의 비율의 극한값을 정확히 계산한다.

(2) (15점)
<3점> 도함수를 이용하여 원점에서 그은 접선의 방정식을 정확히 구하고,
접선과 곡선 및 x축으로 이뤄진 도형을 정확히 결정한다.
<4점> 구간 $0 \le x \le 1$에서 사면체라는 입체도형의 부피를 정확히 제시한다.
<6점> 구간 $1 \le x \le e$에서 입체도형의 부피를 부분적분을 이용해 정확히 계산한다.
<2점> 앞 단계에서 구한 두 부피를 더하여 전체구간의 부피를 정확히 제시한다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 I]

(1) $\mathrm{P}_n(0,-n)$에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점을 $(a, \ln a)$라 한다면 접선은 $y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)$이고 이 접선이 $(0,-n)$을 지나므로 $a=\dfrac{1}{e^{n-1}}$이다. 이 접선의 x절편은 $b_n=\dfrac{n}{e^{n-1}}$이다. 따라서

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{e^n}\cdot\dfrac{e^{n-1}}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{e}$이다.

(2) 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식은 $y=\dfrac{x}{e}$이며 이 접선과 x축 및 곡선으로 이뤄진 도형 위의 입체도형은 두 부분으로 나눠진다. $0\le x\le 1$일 때, 입체도형의 단면은 한 변의 길이가 $\dfrac{x}{e}$인 정삼각형이고,

이 입체도형의 부피는 $V_1=\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{e}\right)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{12e^2}$이다. $1\le x\le e$일 때, 입체도형의 단면은 한 변의 길이가 $\dfrac{x}{e}-\ln x$인 정삼각형이고, 이 입체도형의 부피는

$V_2=\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{e}-\ln x\right)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e\left(\frac{x^2}{e^2}-\frac{2}{e}x\ln x+(\ln x)^2\right)dx=\frac{5\sqrt{3}}{24}e-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8e}-\frac{\sqrt{3}}{12e^2}$

이다. 따라서 입체도형의 전체 부피는 $V=V_1+V_2=\dfrac{5\sqrt{3}}{24}e-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{8e}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{5e}{12}-1-\dfrac{1}{4e}\right)$이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사　☐ 면접 및 구술고사　☐ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅱ)문항

2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

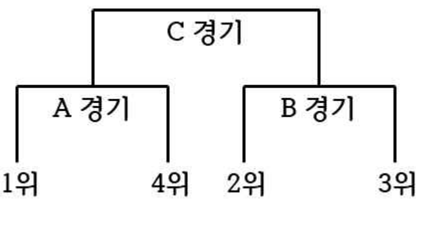
[다] 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

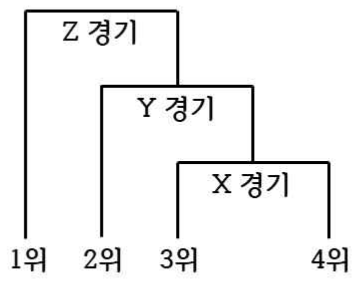
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\ \ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

[논제 II]

체육 대회에서 예선을 통하여 상위 4개의 팀이 선발되었고, 이 중에서 우승팀을 결정하려고 한다. 우승팀을 결정하는 대진표는 아래와 같이 A, B, C 세 경기를 치르는 <대진표 1>과 X, Y, Z 세 경기를 치르는 <대진표 2>가 있다. 각 경기에서 한 팀이 다른 팀을 이길 확률은 예선 순위의 차이로 결정된다. 예선 상위 팀이 하위 팀을 이길 확률은 순위 차이가 1일 때 p, 순위 차이가 2일 때 q, 순위 차이가 3일 때 r이다. 예를 들어, 예선 1위 팀과 2위 팀이 경기를 할 때 1위가 이길 확률이 p, 2위와 4위가 경기를 할 때 2위가 이길 확률이 q, 1위와 4위가 경기를 할 때 1위가 이길 확률이 r이다. 단, 비기는 경우는 없으며, $0.5 \le p < q < r \le 1$이다. <대진표 1>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률을 P_1, <대진표 2>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률을 P_2라 하자.



<대진표 1>



<대진표 2>

(1) $p=0.6$, $q=0.7$, $r=0.8$일 때, P_1과 P_2를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) $q=\frac{5}{6}$, $r=1$일 때, P_1과 P_2를 각각 p의 식으로 나타내고, $P_1=P_2$가 되는 p를 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (15점)

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 확률과 통계	이준열 외 7인	(주)천재교육	2021	64	제시문[다]	X

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 II]에서는 고등학교 수학 교육과정 문자와 식 영역 다항식의 인수분해, 삼차방정식의 풀이, 확률과 통계 영역 경우의 수의 합의 법칙과 곱의 법칙, 확률의 기본 성질, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리, 조건부확률 등의 기본 개념을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 실생활과 관련된 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 문제 해결 능력과 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하는 추론 능력 등 단순한 공식의 적용보다는 논제를 수학적으로 표현하여 문제 해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결하는데 필요한 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 II]의 첫 번째 논제에서는 확률의 기본 성질, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리, 조건부확률 등의 개념을 이해하고 주어진 실생활과 관련된 상황에서의 확률을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 두 번째 논제에서는 첫 번째 논제의 결과를 문자와 식으로 나타내고, 삼차방정식의 풀이 등의 방법을 적절하게 응용하여 구하려는 값을 정확하게 찾는 능력을 평가하고자 하였다.

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 II]

(1) (10점)

<4점> <대진표 1>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률 P_1의 값을 정확하게 구한다.

<6점> <대진표 2>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률 P_2의 값은 정확하게 구한다.

(2) (15점)

<5점> <대진표 1>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률 P_1을 p의 식으로 정확하게 나타낸다.

<5점> <대진표 2>로 대회를 진행할 때 예선 1위 팀이 우승할 확률 P_2를 p의 식으로 정확하게 나타낸다.

<5점> $P_1 = P_2$가 되는 p를 정확하게 구한다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 II]

(1)

(i) <대진표 1>로 진행할 때, 1위 팀이 우승하는 경우는 다음과 같다.

(a) A에서 1위 승리, B에서 2위 승리, C에서 1위 승리

(b) A에서 1위 승리, B에서 3위 승리, C에서 1위 승리

따라서 P_1은 $P_1 = rpp + r(1-p)q = p^2 r + (1-p)qr$이고,

$p = 0.6$, $q = 0.7$, $r = 0.8$이므로

$P_1 = 0.6^2 \times 0.8 + 0.4 \times 0.7 \times 0.8 = 0.512$이다.

(ii) <대진표 2>로 진행할 때, 1위 팀이 우승하는 경우는 다음과 같다.

(a) X에서 3위 승리, Y에서 2위 승리, Z에서 1위 승리

(b) X에서 3위 승리, Y에서 3위 승리, Z에서 1위 승리

(c) X에서 4위 승리, Y에서 2위 승리, Z에서 1위 승리

(d) X에서 4위 승리, Y에서 4위 승리, Z에서 1위 승리

따라서 P_2는 $P_2 = ppp + p(1-p)q + (1-p)qp + (1-p)(1-q)r = p^3 + 2p(1-p)q + (1-p)(1-q)r$이고,

$p = 0.6$, $q = 0.7$, $r = 0.8$이므로

$P_2 = 0.6^3 + 2 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3 \times 0.8 = 0.648$이다.

(2) $q = \frac{5}{6}$, $r = 1$을 (1)에서 구한 P_1, P_2에 대입하여 p의 식으로 나타내면

$P_1 = p^2 + \frac{5}{6}(1-p) = \frac{1}{6}\left(6p^2 - 5p + 5\right)$,

$P_2 = p^3 + \frac{5}{3}p(1-p) + \frac{1}{6}(1-p) = \frac{1}{6}\left(6p^3 - 10p^2 + 9p + 1\right)$이다.

따라서 $6p^2 - 5p + 5 = 6p^3 - 10p^2 + 9p + 1$이고,

$6p^3 - 16p^2 + 14p - 4 = 2(p-1)^2(3p-2) = 0$, $p < 1$이므로, $p = \frac{2}{3}$이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅲ)문항

2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[나] $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, $\lim_{n \to \infty} b_n = M$ (L, M은 실수)일 때, 모든 자연수 n에 대하여

① $a_n \le b_n$이면 $L \le M$

② $a_n \le c_n \le b_n$이고 $L = M$이면 $\lim_{n \to \infty} c_n = L$

[논제 III]

점 $\mathrm{A}\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(a > 0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선이 곡선 $y = \frac{1}{x}$과 접하지 않는다. 이 직선이 y축과 만나는 점을 P, x축과 만나는 점을 Q, 곡선 $y = \frac{1}{x}$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하고, 원점을 O라 하자.

(1) $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$일 때, 삼각형 OPQ의 넓이 $S(a)$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) $\overline{\mathrm{AB}} = 1$일 때, 삼각형 OPQ의 넓이 $S(a)$에 대하여 $\lim_{a \to \infty} S(a)$와 $\lim_{a \to 0} S(a)$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 미적분	이준열 외 7인	(주)천재교육	2019	19	제시문[나]	X

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 III]에서는 고등학교 수학 교육과정의 접선의 방정식, 함수의 그래프, 두 점 사이의 거리, 유리함수, 함수의 극한 등의 내용을 바탕으로 제시된 상황을 수학적 문제로 표현할 수 있는지와 그렇게 표현된 문제를 논리적으로 해결할 수 있는지에 대한 능력을 평가하고자 하였다. 유리함수의 개형을 파악하고, 접선의 의미를 이해하며, 직선과 곡선 사이의 관계를 이용해서 주어진 상황을 수학적으로 해결할 수 있는 능력을 가지고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 III]에서는 ‘수학’의 ‘유리함수와 무리함수’ 단원에서 학습하는 내용을 바탕으로 유리함수의 개형을 파악할 수 있어야 하고, ‘수학II’ 또는 ‘미적분’의 ‘접선의 방정식’ 단원에서 학습하는 내용을 바탕으로 주어진 점 A에서의 접

선의 의미를 이해할 수 있어야 하고, ‘수학’의 ‘두 점 사이의 거리’ 단원의 내용을 이용해서 점 A와 점 B 사이의 거리를 표현할 수 있어야 한다. 곡선과 직선이 만나는 점을 각각의 방정식을 이용해서 구할 수 있어야 하고, 좌표 a와 b 사이의 관계를 이용하여 적절한 방법을 통해 극한값을 구할 수 있어야 한다.

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 III]

(1) (10점)

<5점> 직선의 방정식을 구할 수 있고 이를 이용하여 점 P와 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.

<5점> 이를 이용하여 삼각형 OPQ의 넓이를 구한다.

(2) (15점)

<5점> 극한의 대소관계를 이용할 수 있다.

<10점> a와 b 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 III]

점 B의 좌표를 $\mathrm{B}\left(b, \frac{1}{b}\right)$라 하자. 점 A와 B를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$이다. 따라서 점들의 좌표 $\mathrm{P}\left(0, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$와 $\mathrm{Q}(a+b, 0)$을 얻을 수 있다. 따라서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-b)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{|a-b|}{ab}\sqrt{1+a^2b^2}$$

이고,

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{(a+b)}{ab}\sqrt{1+a^2b^2}$$

이다.

(1) 점 B가 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족하는 경우, $|a-b|=\frac{1}{2}(a+b)$를 얻는다. 이때, $a>b$이면 $b=\frac{1}{3}a$이고, $a<b$이면 $b=3a$이다. 삼각형 OPQ의 넓이는 $S(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{(a+b)^2}{2ab}$이므로, $a>b$인 경우와 $a<b$인 경우 모두 $S(a)=\frac{8}{3}$을 얻는다.

(2) 점 B가 $\overline{\mathrm{AB}}=1$을 만족하는 경우,

$$|a-b|=\frac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}$$

를 얻는다. 이때 $a>b$이면 $a=b+\dfrac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}$이고, $a<b$이면 $b=a+\dfrac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}$이므로, 이를 다시 쓰면

$$\frac{b}{a}=\begin{cases}1-\dfrac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a>b)\\ 1+\dfrac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a<b)\end{cases}$$

이다. 여기서 $0<\dfrac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}<1$이므로, $0<\dfrac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}}<\dfrac{1}{a}$이고, 극한값 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}}=0$을 얻는다. 따라서 극한값 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{b}{a}=1$을 얻을 수 있고, 이를 이용하면

$$\lim_{a\to\infty}S(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2}{2\dfrac{b}{a}}=2$$

를 얻는다. 위 식을 $\dfrac{a}{b}$에 대해서 정리하면

$$\frac{a}{b}=\begin{cases}1+\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a>b)\\ 1-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a<b)\end{cases}$$

이다. 여기서 $0<\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2b^2}}<1$이므로, $0<\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}}<a$이고, 극한값 $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}}=0$을 얻는다. 따라서 극한값 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{a}{b}=1$을 얻을 수 있고, 이를 이용하면

$$\lim_{a\to 0}S(a)=\lim_{a\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^2}{2\dfrac{a}{b}}=2$$

를 얻는다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅳ)문항

2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[라] 좌표평면의 원점 O와 점 P(x,y)에 대하여, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ, $\overline{\mathrm{OP}}$를 r이라 하면

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\,(x \neq 0),$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}\,(y \neq 0),\ \sec\theta = \frac{r}{x}\,(x \neq 0),\ \cot\theta = \frac{x}{y}\,(y \neq 0)$$

[마] 삼각함수의 덧셈정리

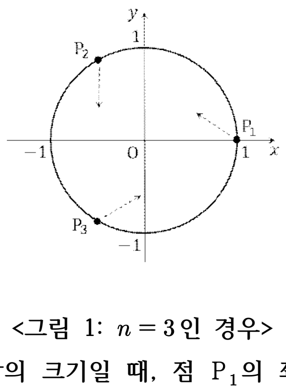
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

[바] 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$이다.

[사] 좌표평면 위를 움직이는 점 P(x,y)의 위치를 매개변수 t에 관한 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내면, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$이다.

[논제 Ⅳ]

<그림 1>과 같이 중심이 원점 O이고 반지름이 1인 원 위에 같은 간격으로 놓여 있는 세 개 이상의 점 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$이 있다. 매순간 점 P_k $(k<n)$는 점 P_{k+1}을 향하여 움직이고, 점 P_n은 점 P_1을 향하여 움직인다. 점 P_1은 점 $(1,0)$에서 출발하고, $\overline{\mathrm{OP}_1} = \overline{\mathrm{OP}_2} = \cdots = \overline{\mathrm{OP}_n} > 0$와 $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = \cdots = \angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OP}_n = \angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_1$는 항상 성립한다. $\alpha = \dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



<그림 1: $n=3$인 경우>

(1) 매개변수 t가 동경 OP_1이 나타내는 각의 크기일 때, 점 P_1의 좌표 (x_1, y_1)을 나타내는 함수 $x_1 = f_1(t)$, $y_1 = g_1(t)$를 α를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

(2) 점 P_1이 $t=0$에서 $t=u$까지 움직인 거리 $s(u)$의 극한값 $\displaystyle\lim_{u\to\infty} s(u)$를 α를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 IV]에서는 고등학교 수학 교육과정의 삼각함수의 정의와 덧셈정리, 매개변수로 표시된 함수의 미분법 및 좌표평면 위의 점이 움직인 거리를 구하는 적분법을 활용하여 조건을 만족시키는 점이 움직인 거리를 구하는 문제를 출제하여 논리적으로 사고하고 수학적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 단편적인 수학의 공식의 활용 능력보다는 주어진 조건을 종합적으로 이해하여 주어진 상황을 수학적 문제로 해석하고, 그 문제를 체계적이고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

좌표평면 위의 점의 위치를 매개변수로 표현된 삼각함수를 이용하여 표현하고, 점이 만드는 곡선의 접선의 기울기를 매개변수로 표현된 곡선의 미분법을 사용하여 구할 수 있다. 또한 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 평면 위의 두 점 사이의 관계를 표시하고, 치환적분 및 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리를 적분으로 표시하여 계산한다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 수학 I	김원경 외 14인	(주)비상교육	2021	71	제시문[라]	X
고등학교 미적분	박교식 외 19인	(주)동아출판	2021	61	제시문[라]	X
고등학교 미적분	박교식 외 19인	(주)동아출판	2021	65	제시문[마]	X
고등학교 미적분	박교식 외 19인	(주)동아출판	2021	92	제시문[바]	X
고등학교 미적분	박교식 외 19인	(주)동아출판	2021	163	제시문[사]	X

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 IV]
(1) (15점)
<5점> 점 P_1이 만족하는 조건을 찾는다.
<5점> 점 P_1의 위치를 매개변수로 나타낸 함수로 표시한다.
<5점> 계산을 논리적으로 전개할 수 있다.

(2) (10점)
<5점> 점 P_1이 움직인 거리를 식으로 표현할 수 있다.
<5점> 점 P_1이 움직인 거리를 식을 적분하여 계산할 수 있다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 IV]

(1) $\theta = \dfrac{2\pi}{n} = \angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = \cdots = \angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OP}_n = \angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_1$이라 하자. 매개변수 t가 동경 OP_1이 나타내는 각의 크기일 때, 점 P_1의 좌표 (x_1, y_1)을 나타내는 함수는 $x_1 = f_1(t)$, $y_1 = g_1(t)$이고, 점 P_2의 좌표 (x_2, y_2)를 나타내는 함수는 $x_2 = f_2(t)$, $y_2 = g_2(t)$이다. 그림과 같이 $r = \overline{\mathrm{OP}_1} = \overline{\mathrm{OP}_2}$이라 하면 $f_1(t) = r\cos t$, $g_1(t) = r\sin t$,
$f_2(t) = r\cos(t+\theta)$, $g_2(t) = r\sin(t+\theta)$이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의해,
$f_2 = r\cos t\cos\theta - r\sin t\sin\theta = f_1\cos\theta - g_1\sin\theta$, $g_2 = r\sin t\cos\theta + r\cos t\sin\theta = g_1\cos\theta + f_1\sin\theta$이다.
$\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{g_1{}'}{f_1{}'}$이 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 기울기 $\dfrac{-g_1(1-\cos\theta)+f_1\sin\theta}{-f_1(1-\cos\theta)-g_1\sin\theta}$와 같으므로,
$(f_1{}'g_1 - f_1g_1{}')(1-\cos\theta) = (f_1{}'f_1 + g_1{}'g_1)\sin\theta$이다. $f_1{}'(t) = r'\cos t - r\sin t$, $g_1{}'(t) = r'\sin t + r\cos t$이므로
$f_1{}'g_1 - f_1g_1{}' = -r^2$이고 $f_1{}'f_1 + g_1{}'g_1 = r'r$이므로, $-r^2(1-\cos\theta) = r'r\sin\theta$이다.
$r > 0$이므로, $\dfrac{r'}{r} = -\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$이고, $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}} = \alpha$이므로 양변을 치환적분하면 $r = ke^{-\alpha t}$이고,
$t=0$일 때 $r=1$이므로, $k=1$이다. 따라서, $f_1(t) = e^{-\alpha t}\cos t$, $g_1(t) = e^{-\alpha t}\sin t$이다.

(2) $s(u) = \displaystyle\int_0^u \sqrt{\{f_1{}'(t)\}^2 + \{g_1{}'(t)\}^2}\,dt = \int_0^u \sqrt{\alpha^2+1}\,e^{-\alpha t}dt = \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}(1-e^{-\alpha u})$이므로,
$\displaystyle\lim_{u\to\infty} s(u) = \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}$이다.