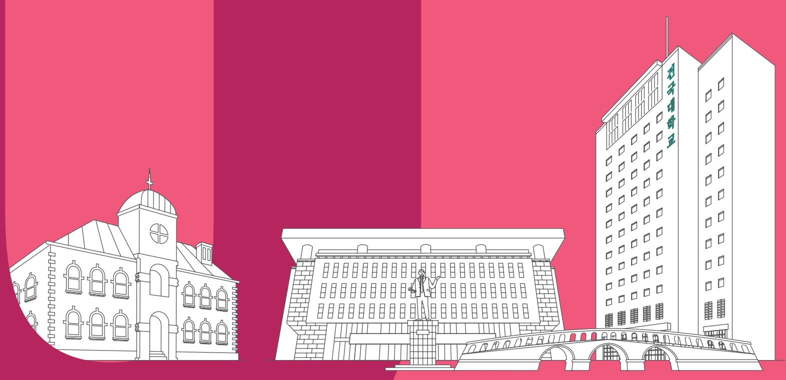
2023학년도 건국대학교 자연계 모의논술고사

CONTENTS

＊ 자연계



2023학년도 건국대학교 모의논술고사

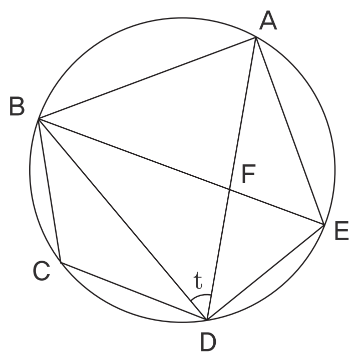
문제지(자연계)

제시문 1

[가] 사인법칙을 이용하면 삼각형의 넓이를 외접원의 반지름의 길이와 세 내각의 크기를 이용하여 나타낼 수 있다.

[나] 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

[다] [그림1]은 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 오각형 ABCDE를 나타낸 것으로, 그림에서 $\angle\mathrm{BEC}=29^\circ$, $\angle\mathrm{DBC}=30^\circ$, $\angle\mathrm{CAD}=31^\circ$ 이고 대각선 AD와 BE는 점 F에서 만난다.



[그림1]

[문제 1] $\angle\mathrm{ADB}=\mathrm{t}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이를 t에 대한 식으로 표시하고 최댓값을 구하되 풀이 과정을 쓰시오. [10점]

[문제 2] 제시문 1의 (다)에서 오각형 ABCDE의 외접원의 중심을 O라 할 때, $\overline{\mathrm{OF}}=\frac{1}{3}$이다. $\angle\mathrm{ADB}$의 크기 t가 30° 보다 클 때, $\tan\mathrm{t}$의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [15점]

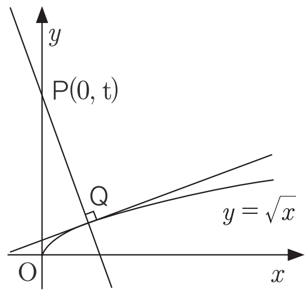
제시문 2

[가] 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

[나] 미분가능한 함수 $g(\mathrm{t})$에 대하여 $x=g(\mathrm{t})$로 놓으면 $\int f(x)\,dx=\int f(g(\mathrm{t}))g'(\mathrm{t})\,d\mathrm{t}$이다.

[다] [그림2]는 y축 위에 있는 임의의 점 $\mathrm{P}(0, \mathrm{t})(\mathrm{t}>0)$와 아래의 조건을 만족하는 점 Q를 표시한 것이다.

곡선 $y=\sqrt{x}$의 점 Q에서 접선이 직선 PQ에 수직이다.



[그림2]

이때, 점 Q의 x 좌표를 $f(\mathrm{t})$라 하고 $f(0)=0$이라 하자.

[문제 3] **미분계수 $f'(3)$의 값을 구하되 풀이 과정을 쓰시오.** [20점]

[문제 4] **정적분 $\int_0^3 f(\mathrm{t})\,d\mathrm{t}$를 구하되 풀이 과정을 쓰시오.** [25점]

제시문 3

[가] 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$와 같이 나타낸다.

[나] 두 자연수 m과 n $(m<n)$에 대하여 부등식 $m \le x \le n$을 만족하는 모든 자연수 x들의 집합을 $S(m,n)$이라 하자. 집합 $S(m,n)$의 원소 p에 대하여 두 자연수 m,n의 평균 $\frac{m+n}{2}$ 이하인 가장 큰 자연수를 l이라 할 때, 집합 $S(m,n)$을 두 부분집합 $S(m,l)$과 $S(l+1,n)$으로 나눈 후, 이 중 p를 포함하는 집합을 택하는 작업을 "p 찾기"라 부르자.

자연수 m이 주어졌을 때, 1부터 m까지 자연수 중 하나의 수 p를 정한다. 집합 $S(1,m)$에 p 찾기를 하여 얻은 부분집합에 p 찾기를 다시 적용한다. 이런 작업을 계속하여 부분집합 $\{p\}$를 얻을 때까지 반복한다. 예를 들어 $m=5$일 경우,

(1) $p=4$이면 $S(1,5) \supset S(4,5) \supset S(4,4)=\{4\}$ 이므로 4 찾기를 두 번 적용하면 집합 $\{4\}$를 얻을 수 있고,

(2) $p=2$이면 $S(1,5) \supset S(1,3) \supset S(1,2) \supset S(2,2)=\{2\}$ 이므로 2 찾기를 세 번 적용하면 집합 $\{2\}$를 얻을 수 있다.

[문제 5] **자연수 m에 대하여 1부터 m까지 자연수 중 하나의 수 p를 골랐을 때, 집합 $\{p\}$를 얻기까지 수행해야하는 p 찾기의 횟수를 m_p라 하자. $m_1, \cdots, m_m$중 가장 큰 수를 $f(m)$이라 할 때, 다음 극한값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. 참고로 $f(5)=3$이다.** [30점]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n^3)}{f(n^2)}$$

2023학년도 건국대학교 모의논술고사
문제해설지(자연계)

01 출제 의도

[문제 1]
사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 외접원의 반지름의 길이와 세 내각의 크기를 이용하여 나타내고, 미분을 활용하여 극값을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2]
삼각함수와 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 알아본다.

[문제 3]
무리함수의 성질을 이해하고 미분과 접선의 기울기의 관계를 이해하고 있는지 알아본다. 음함수의 미분법과 역함수의 미분을 이해하고 있는지 알아본다.

[문제 4]
역함수와 치환적분을 이해하고 있는지 알아본다.

[문제 5]
로그함수가 어떤 상황에서 나타나는지 이해하고 있는지 알아본다. 또한, 로그함수의 성질과 극한에 대한 이해를 알아본다.

02 문항 해설

[문제 1]
사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 외접원의 반지름의 길이와 세 내각의 크기를 이용하여 나타내고, 미분을 활용하여 극값을 구하고, 이를 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

[문제 2]
삼각함수와 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트값을 구한다.

[문제 3]
무리함수를 미분하여 접선의 기울기를 구하고 이를 이용하여 수직으로 만나는 직선의 방정식을 구한다. 음함수 미분법과 역함수 미분법을 이용하여 미분값을 구한다.

[문제 4]
치환적분과 역함수를 활용하여 답을 구한다.

[문제 5]
실생활에서 주어진 문제를 로그함수를 이용해 표현하고 극한을 구한다.

03 채점 기준

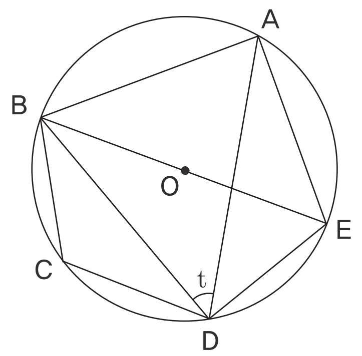
하위 문항	채점 기준	배점
[문제 1]	F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음 E: 외접원에 관련된 내용을 적음 D: 점 B,O,E가 일직선에 있고, 선분 BE가 외접원의 지름임을 밝힘 C: D와 더불어 삼각형 ABD의 넓이의 식을 구함 B: C와 더불어 미분하여 극값을 찾음 B+: B와 더불어 극값의 극대, 극소를 판정함 A: B+와 더불어 정답을 구하였으나 틀림 A+: A와 더불어 정답을 구함	10
[문제 2]	F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음 E: 외접원의 성질을 적음 D: 선분 BE가 외접원의 지름임을 나타냄 C: D와 더불어 점 O, D, F의 위치를 정확히 이해함 B: C와 더불어 $\angle ODF = \frac{5}{6}\pi - \mathrm{t}$ B+: B와 더불어 $3\sin\left(\mathrm{t} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \mathrm{t}\right)$를 구함 A: B+와 더불어 답을 구하였으나 틀림 A+: A와 더불어 정답을 구함	15
[문제 3]	F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음 E: 접선이나 법선의 기울기를 구함 D: 접선이나 법선의 식을 구함 C: D와 더불어 y절편을 구함 B: C와 더불어 미분을 시도함 B+: B와 더불어 역함수 미분법을 시도함 A: B+와 더불어 답을 구하였으나 틀림 A+: A와 더불어 정답을 구함	20
[문제 4]	F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음 E: 의미있는 적분식을 적음 D: 치환적분 등을 시도함 C: D와 더불어 $f(\mathrm{t}) = x$로 치환 B: C와 더불어 f의 역함수를 이용하여 치환함 B+: B와 더불어 역함수의 미분을 함 A: B+와 더불어 답을 구하였으나 틀림 A+: A와 더불어 정답을 구함	25
[문제 5]	F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음 E: $f(\mathrm{m})$에 대한 의미 있는 계산을 함 D: $f(\mathrm{m})$의 식과 로그함수의 관련을 찾음 C: $f(\mathrm{m})$의 식을 로그함수로 표현하였으나 틀림 B: $f(\mathrm{m})$의 식을 쓰거나 적절히 표현함 B+: B와 더불어 극한의 식을 구함 A: B+와 더불어 답을 구하였으나 틀림 A+: A와 더불어 정답을 구함	30

※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함

04 예시 답안 혹은 정답

[문제 1] 정답: 삼각형 ABD의 넓이를 $S(\mathrm{t})=\sqrt{3}\sin\mathrm{t}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\mathrm{t}\right)$이고, 최댓값은 $\frac{3}{4}\sqrt{3}$이다.



$\angle BOC+\angle COD+\angle DOE=2(\angle BEC+\angle CAD+\angle DBE)$

$=2(\angle BAC+\angle CAD+\angle DBE)=180^\circ$이므로 점 B,O,E는 일직선 위에 있고

선분 BE는 오각형 $ABCDE$의 외접원의 지름이다.

선분 BE가 외접원의 지름이므로 $0<\mathrm{t}<\frac{\pi}{2}$이다. 삼각형 ABD의 넓이를 $S(\mathrm{t})$라 하자.

$\angle BAE=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle ABE=\frac{\pi}{2}-\mathrm{t}$이다. $\angle DBE=\frac{\pi}{6}$이므로 $\angle ABD=\frac{2}{3}\pi-\mathrm{t}$이다.

$\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\overline{AB}=2\sin\mathrm{t}$이므로

$S(\mathrm{t})=\sqrt{3}\sin\mathrm{t}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\mathrm{t}\right)$이다.

$$S'(\mathrm{t})=\sqrt{3}\cos\mathrm{t}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\mathrm{t}\right)-\sqrt{3}\sin\mathrm{t}\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\mathrm{t}\right)$$

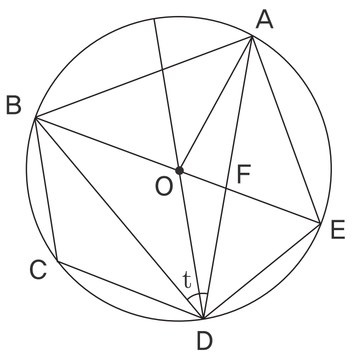
$$=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\mathrm{t}\right)$$

$S'(\mathrm{t})=0$의 해는 $\mathrm{t}=\frac{\pi}{3}$이다.

$\mathrm{t}<\frac{\pi}{3}$이면 $S'(\mathrm{t})>0$이고 $\mathrm{t}>\frac{\pi}{3}$이면 $S'(\mathrm{t})<0$이므로 $\mathrm{t}=\frac{\pi}{3}$일 때, $S(\mathrm{t})$가 최댓값을 가진다.

삼각형 ABD의 넓이의 최댓값은 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}$이다.

[문제 2] 정답: $\tan t = \frac{2}{\sqrt{3}}$



선분 BE는 오각형 $ABCDE$의 외접원의 지름이다.

$\angle BDO = \angle DBO = \frac{\pi}{6}$ 이고 $t > \frac{\pi}{6}$ 이므로 점 O, D, F는 그림과 같이 위치한다.

삼각형 ODF에서 $\angle DOF = \frac{\pi}{3}$, $\angle ODF = t - \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\angle OFD = \frac{5}{6}\pi - t$ 이다.

사인법칙을 이 삼각형에 적용하면 $\frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - t\right)} = \frac{\overline{OF}}{\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)}$ 를 얻는다.

$\overline{OF} = \frac{1}{3}$ 이므로 $3\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi - t\right)$ 이다.

전개하여 정리하면 $\tan t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

[문제 3] 정답: $\frac{2}{7}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y = -2\sqrt{f(t)}\,(x - f(t)) + \sqrt{f(t)}$ 이다.

점 $P(0,t)$는 이 직선과 y축이 만나는 점이므로 $t = 2f(t)\sqrt{f(t)} + \sqrt{f(t)}$ 이다.

f의 역함수를 $g(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}$ 라 하면 $g(x) = 3$일 때 $x = 1$이다.

따라서 $f'(3) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{7}$ 이다.

[문제 4] 정답: $\frac{23}{15}$

$f(\mathrm{t})=x$로 치환하고, $\mathrm{t}=2f(\mathrm{t})\sqrt{f(\mathrm{t})}+\sqrt{f(\mathrm{t})}$ 로부터 f의 역함수를 $\mathrm{t}=g(x)=2x\sqrt{x}+\sqrt{x}$ 라고 하자. 이때 $f(3)=1, f(0)=0$이므로

$$\int_0^3 f(\mathrm{t})\,d\mathrm{t}=\int_0^1 f(g(x))g'(x)\,dx=\int_0^1 x(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}})\,dx$$

$$=[\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1=\frac{23}{15}$$ 이다.

[문제 5] 정답: $\frac{3}{2}$

$2^k<n\le 2^{k+1}$ 이고 $1\le p\le n$이면 $n_p=k$ 또는 $n_p=k+1$ 이고, 특히 $n_1=k+1$ 이므로 $f(n)=k+1$이다.

즉, $f(n)$은 $log_2 n$ 이상의 정수 중 가장 작은 것이다.

n이 이 범위에 있을 때 문제에 주어진 n^2과 n^3의 범위는 각각 $2^{2k}<n^2\le 2^{2k+2}$, $2^{3k}<n^3\le 2^{3k+3}$이므로

$2k+1\le f(n^2)\le 2k+2$ 이고, $3k+1\le f(\mathrm{n}^3)\le 3k+3$이다.

$\frac{3}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k+1}{2k+2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{f(n^3)}{f(n^2)}\le\lim_{k\to\infty}\frac{3k+3}{2k+1}=\frac{3}{2}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n^3)}{f(n^2)}=\frac{3}{2}$이다.

05 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	75, 97
	수학	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	123, 231
	수학 II	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	73
	미적분	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	12, 87, 89, 132
	수학 I	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	70, 92
	미적분	권오남 외 14인	교학사	2019	14, 95–96, 156
	수학 II	권오남 외 14인	교학사	2018	80
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2018	12, 99, 145