▶ **문항카드 3**

# [건국대학교 문항정보]

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사 | |
| 전형명 | KU논술우수자전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연계 A(수학) / 문제 1, 2 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 |
| | 핵심개념 및 용어 | 함수의 극한, 삼각함수, 조합, 부등식, 합성함수의 미분, 음함수의 미분, 삼각함수의 미분 |
| 예상 소요 시간 | 70분 | |

## 2. 문항 및 제시문

### 제시문 1

(가) 함수 $f(x)$에서 $x$의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 $L$에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 $L$에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로 $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$과 같이 나타낸다.

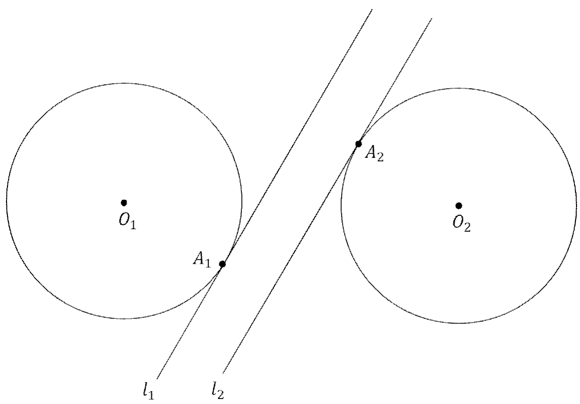
(나) $n$이 자연수일 때, 다음 식이 성립한다.

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

(다) [그림 1]은 반지름이 같은 원 $O_1$과 $O_2$를 나타낸 것이다. 평행한 직선 $l_1$과 $l_2$는 각각 점 $A_1$, $A_2$에서 원 $O_1$, $O_2$에 접한다

(라) $(5+2x)^{60}$을 전개했을 때 $x^k$의 계수를 $a_k$라 하자. 즉,

$$(5+2x)^{60} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_{60} x^{60}$$




[그림 1]

**문제 1-1**

제시문 1의 (다)에서 직선 $l_1$과 $l_2$ 사이의 거리는 1로 일정하며, 두 원의 반지름은 $r$이고 $\overline{O_1O_2}=3r$이다. 극한값 $\lim_{r \to \infty} \dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{O_1O_2}}$를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

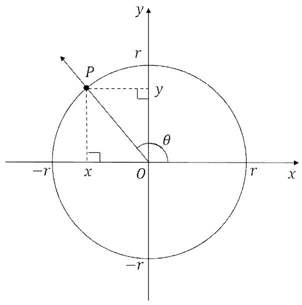
**문제 1-2**

제시문 1의 (라)에서 계수 $a_k\,(0 \le k \le 60)$ 중 가장 큰 것을 $a_p$, 두 번째로 큰 것을 $a_q$라 하자. $p$와 $q$를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

## 제시문 2

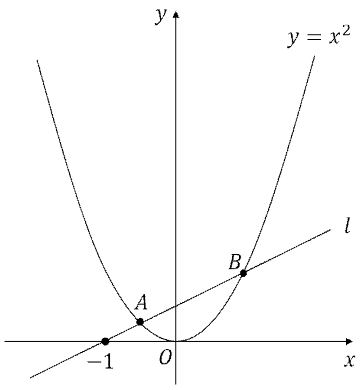
(가) 점 $(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 $m$인 직선의 방정식은 $y-y_1 = m(x-x_1)$이다.

(나) 다음 그림에서 동경 $OP$가 나타내는 각의 크기를 $\theta$라고 할 때, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}\ (x \ne 0)$ 이다.

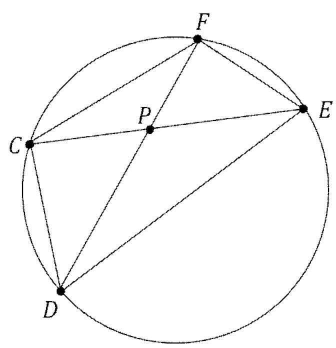



(다) [그림 2]는 곡선 $y=x^2$과 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선 $l$을 나타낸 것이다. 곡선 $y=x^2$과 직선 $l$은 두 점 $A$와 $B$에서 만난다. 점 $O$는 원점이다.

(라) [그림 3]은 반지름이 2인 원과 그 원에 내접하는 사각형 $CDEF$를 나타낸 것이다. 대각선 $CE$와 $DF$의 교점이 $P$이다.




[그림 2]




[그림 3]

**문제 2-1**

제시문 2의 (다)에서 직선 $l$의 기울기가 $t$일 때 $\angle AOB$의 크기를 $\theta(t)$라 하자. 미분계수 $\theta'(2)$의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

**문제 2-2**

제시문 2의 (라)에서 $\angle CPD = \frac{\pi}{3}$일 때 $\overline{CD} + \overline{EF}$의 값 중 가장 큰 것을 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

## 3. 출제 의도

[문제 1-1] 거리를 삼각함수를 이용해 계산하고 함수의 극한을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-2] 다항식의 전개식을 조합으로 표현하고 조합에 관한 기본 계산을 수행할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-1] 함수가 합성함수로 주어진 경우 미분을 계산하는 원리를 이해하고 있는지 알아본다.

[문제 2-2] 원이나 삼각형 등의 도형에서 길이를 삼각함수를 이용해 표현하고 삼각함수의 합의 공식과 미분에 대한 기본적인 계산을 수행할 수 있는지 알아본다.

## 4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제2020-236호 [별책8] |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| 문제 1-1 | 수학 - (3)도형의 방정식 3 원의 방정식<br>[10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치의 관계를 이해한다<br>수학Ⅱ- (1) 함수의 극한과 연속 1함수의 극한<br>[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. |
| 문제 1-2 | 수학 - (6) 경우의 수 2 순열과 조합<br>[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.<br>확률과 통계 - (1) 경우의 수 2 이항정리<br>[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. |
| 문제 2-1 | 수학 - (1) 문자와 식 5 이차방정식과 이차함수<br>[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.<br>미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분<br>[12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.<br>[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. |
| 문제 2-2 | 미적분 - (2) 미분법 1 여러 가지 함수의 미분<br>[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.<br>[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. |

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 고등학교 교과서 | 수학I | 권오남 외 | 교학사 | 2017 | 75 |
| | 수학II | 권오남 외 | 교학사 | 2017 | 16 |
| | 확률과 통계 | 류희찬 외 | 천재교과서 | 2018 | 28 |
| | 미적분 | 이준열 외 | 천재교육 | 2018 | 65, 88 |
| | 미적분 | 황선욱 외 | 미래앤 | 2018 | 63, 75 |
| 기타 | | | | | |

## 5. 문항 해설

[문제 1-1] 거리를 삼각함수를 이용해 계산하고 함수의 극한을 구할 수 있는지 알아본다.
[문제 1-2] 다항식의 전개식을 조합으로 표현하고 조합에 관한 기본 계산을 수행할 수 있는지 알아본다.
[문제 2-1] 함수가 합성함수로 주어진 경우 미분을 계산하는 원리를 이해하고 있는지 알아본다.
[문제 2-2] 원이나 삼각형 등의 도형에서 길이를 삼각함수를 이용해 표현하고 삼각함수의 합의 공식 등 기본 공식을 이용해 다룰 수 있는지 알아본다.

## 6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
| --- | --- | --- |
| 1-1 | A+: 정답과 풀이가 맞음.<br>A: 마지막 단계에서 사소한 계산 실수가 있음.<br>B+: 적절한 풀이를 통해 비율 $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{O_1O_2}}$을 맞게 계산함.<br>B: 적절한 풀이를 통해 $\overline{A_1A_2}$를 맞게 계산함.<br>C: 삼각비 등을 이용해 $\overline{O_2P}$, $\overline{A_2Q}$ 등 풀이에 도움이 되는 길이를 계산함.<br>D: 삼각비 등을 이용해 $\overline{O_2P}$, $\overline{A_2Q}$ 등 풀이에 도움이 되는 길이를 계산하였으나 틀림.<br>E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함.<br>F: 답안이 없거나 관계없는 내용만 적음. | 10 |
| 1-2 | A+: A와 더불어 가장 큰 계수 $a_{17}$과 두 번째로 큰 계수 $a_{16}$을 모두 정확히 구함.<br>A: B+와 더불어 $a_{16}$과 $a_{18}$을 비교함. | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| | B+: B와 더불어 가장 큰 계수가 $a_{17}$임을 구함.<br>B: $a_k < a_{k+1}$이 되기 위한 조건 $k < \frac{2n-5}{7}$를 정확히 구함.<br>C: $a_k < a_{k+1}$이 되기 위한 $k$의 조건을 구하기 위하여 $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 또는 $\frac{a_k}{a_{k+1}}$를 계산함.<br>D: $a_k < a_{k+1}$ 되기 위한 조건을 구하기 위한 의미 있는 시도를 함.<br>E: $a_k = 5^n {}_n\mathrm{C}_k (\frac{2}{5})^k$ 임을 구함.<br>F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음. | |
| 2-1 | A+: 풀이와 정답이 맞음.<br>A: B+와 더불어 $t=2$일 때 $\sec\theta$의 값을 구함.<br>B+: B와 더불어 $\sec^2\theta \cdot \theta'(t) = \dfrac{\frac{2t+4}{2\sqrt{t^2+4t}}(t-1) - \sqrt{t^2+4t}}{(t-1)^2}$ 를 구함.<br>B: C와 더불어 $\tan\theta$를 $t$에 대하여 미분하는 시도를 함.<br>C: $\tan\theta$를 $t$에 관하여 바르게 표현함.<br>D: $\tan\theta$를 $a, b$에 관하여 바르게 표현함.<br>E: 풀이와 관련있는 의미있는 시도를 함.<br>F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음. | 20 |
| 2-2 | A+: 정답과 풀이가 맞음.<br>A: B+와 더불어 $f(\alpha)$가 $\alpha = \frac{\pi}{6}$일 때 최댓값을 가짐을 보임.<br>B+: $\overline{CD} + \overline{EF}$를 한 변수에 대하여 함수로 바르게 표현함.<br>B: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$임을 보이고 $\overline{CD} + \overline{EF} = 4(\sin\alpha + \sin\beta)$임을 보임.<br>C: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$와 $\overline{CD} + \overline{EF} = 4(\sin\alpha + \sin\beta)$ 중 하나를 보임.<br>D: 중심각과 현의 관계를 표현함.<br>E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함.<br>F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음. | 25 |

*※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.*
*※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.*

## 7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

**[문제 1-1]** 답: $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

풀이: $O_2$에서 직선 $O_1A_1$에 내린 수선의 발을 $P$라 하면, $\angle O_1O_2P=\theta$에 대하여

$\sin\theta=\dfrac{\overline{O_1P}}{\overline{O_1O_2}}=\dfrac{2r+1}{3r}$이고, 따라서 $\lim\limits_{r\to\infty}\sin\theta=\dfrac{2}{3}$이고 $\lim\limits_{r\to\infty}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 이다.

$A_2$에서 직선 $O_1A_1$에 내린 수선의 발을 $Q$라 하면, $\overline{A_2Q}=\overline{O_2P}=3r\cos\theta$이다.

따라서 $\overline{A_1A_2}=\sqrt{\overline{A_1Q}^2+\overline{A_2Q}^2}=\sqrt{1+9r^2\cos^2\theta}$

그러므로 극한값은 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+9r^2\cos^2\theta}}{3r}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

**[문제 1-2]** 답: $p=17$, $q=16$

풀이: 풀이: 식을 전개하면 $(5+2x)^n=5^n(1+\dfrac{2}{5}x)^n=5^n\sum\limits_{k=0}^{n}{}_nC_k(\dfrac{2}{5})^k x^k$ 이므로,

$a_k=5^n{}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}(\dfrac{2}{5})^{\mathrm{k}}$ 의 값이 최대가 되는 $k$ 값을 구하면 된다.

$a_k<a_{k+1}$이 되는 $k$의 조건을 구한다.

먼저 $a_k<a_{k+1}$이 되는 필요충분조건은 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}>1$이다. 한편, $a_k<a_{k+1}$일 때,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{5^n\cdot{}_nC_{k+1}\cdot(\frac{2}{5})^{k+1}}{5^n\cdot{}_nC_k\cdot(\frac{2}{5})^k}=\frac{2}{5}\cdot\frac{n-k}{k+1}>1$$

이다. 따라서 $k<\dfrac{2n-5}{7}$이면, $a_k<a_{k+1}$이다.

그리고 $k>\dfrac{2n-5}{7}$이면, $a_k>a_{k+1}$ 이다.

한편 $n=60$이고 $k<\dfrac{2n-5}{7}=\dfrac{115}{7}=16.4\cdots$ 이므로, 계수들의 대소관계는 다음과 같다.

$$a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{16}<a_{17}>a_{18}>a_{19}>\cdots>a_{60}\qquad ------\qquad (*)$$

따라서 $k=17$일 때, 계수 $a_k$가 가장 크고, $p=17$이다.

이제 두 번째 큰 계수를 찾기 위해 식 (*)에서 $a_{16}$과 $a_{18}$을 비교하면 된다.

$$\frac{a_{18}}{a_{16}}=\frac{5^{60}\cdot{}_{60}C_{18}\cdot(\frac{2}{5})^{18}}{5^{60}\cdot{}_{60}C_{16}\cdot(\frac{2}{5})^{16}}=\frac{44\cdot43}{18\cdot17}\cdot\frac{4}{25}=\frac{7568}{7650}<1$$

이므로, $a_{18}<a_{16}$이다. 따라서 두 번째 큰 계수는 $a_{16}$이고, $q=16$이다.

**[문제 2-1]** 답:$-\dfrac{4\sqrt{3}}{39}$

풀이: 직선 $l$의 방정식은 $y=t(x+1)$이다. 점의 좌표를 $A(a,a^2)$, $B(b,b^2)$이라 놓자.

직선 $OA$의 기울기를 $\tan\theta_1$, 직선 $OB$의 기울기를 $\tan\theta_2$라 하면 $\tan\theta_1=a$, $\tan\theta_2=b$이다. 삼각함수의

덧셈정리를 이용하여

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{a-b}{1+ab}$$

를 얻는다. $a, b$는 방정식 $t(x+1)=x^2$, 즉 $x^2-tx-t=0$의 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $a+b=t, ab=-t$를 얻는다.

$a-b<0$이므로 $a-b=-\sqrt{(a+b)^2-4ab} = -\sqrt{t^2+4t}$이다. 따라서

$$\tan\theta = -\frac{\sqrt{t^2+4t}}{1-t} = \frac{\sqrt{t^2+4t}}{t-1}$$

이다. 양변을 $t$에 대해 미분하면

$$\sec^2\theta \cdot \theta'(t) = \frac{\frac{2t+4}{2\sqrt{t^2+4t}}(t-1) - \sqrt{t^2+4t}}{(t-1)^2}$$

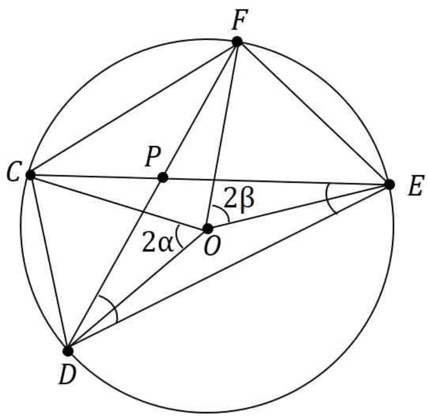
이다. $t=2$일 때 $\tan\theta = 2\sqrt{3}$이고 이 때 $\sec\theta = \sqrt{13}$이다. 그러므로

$$13\theta'(2) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이고 따라서 $\theta'(2) = -\frac{4\sqrt{3}}{39}$ 이다.

**[문제 2-2]** 답: 4

풀이: 원의 중심을 $O$라 하자.




현 $CD$의 원주각 $CED$를 $\alpha$, 현 $EF$의 원주각 $EDF$를 $\beta$라 하자. 그러면

$\angle COD = 2\alpha$, $\angle EOF = 2\beta$

이다. 반지름이 2이므로 삼각형 $CDO$에서 $\overline{CD} = 2\cdot 2\sin\alpha = 4\sin\alpha$ 이고 삼각형 $EFO$에서 $\overline{EF} = 4\sin\beta$이다. 따라서

$$\overline{CD} + \overline{EF} = 4(\sin\alpha + \sin\beta)$$

이다. 삼각형 $DEP$에서 $\alpha+\beta = \angle CPD = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{CD} + \overline{EF} = 4\left(\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right)$$

이다. 삼각함수의 덧셈정리로부터

$$
\begin{aligned}
\overline{CD} + \overline{EF} &= 4\left(\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right) \\
&= 4\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \\
&= 2\sin\alpha + 2\sqrt{3}\cos\alpha
\end{aligned}
$$

이다. $f(\alpha) = 2\sin\alpha + 2\sqrt{3}\cos\alpha$라 하자. $f'(\alpha) = 2\cos\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha = 0$을 풀면 $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이고 $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ 를 얻는다. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$ 일 때 $f'(\alpha) > 0$이고 $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $f'(\alpha) < 0$ 이므로 $f(\alpha)$는 $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $f(\frac{\pi}{6}) = 4$를 갖는다. 따라서 $\overline{CD} + \overline{EF}$ 는 값 중 가장 큰 것은 4이다.