



경희대학교

2023학년도

모의논술고사 문제지(자연계)

[온라인]

지원학부(과) ()

수험번호

성명 ()

<유의사항>

1. 제목은 쓰지 마시고 특별한 표시를 하지 마시오.
2. 제시문 속의 문장을 그대로 쓰지 마시오.
3. 답안지에 답안과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오.(예: 감사합니다. 등)
4. 답안 정정 시에는 두줄을 긋고 작성하며, 수정도구(수정액 또는 스티커) 사용은 절대 불가합니다.
5. 답안 작성은 답안지 인쇄된 부분을 이용하여 반드시 논제당 1쪽 이내로 작성하시오.
6. 자연계 문제지는 총 2쪽입니다.

제시문 [가]~[라]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

[가] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

이다.

[나] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여

$$f(c) = k$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

[다] 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 에서의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > c > 0, b^2 = a^2 - c^2)$$

두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 에서의 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > c > 0, a^2 = b^2 - c^2)$$

[라] 이산확률변수 X 의 확률질량함수가 $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)일 때, X 의 기댓값(평균) $E(X)$ 는

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

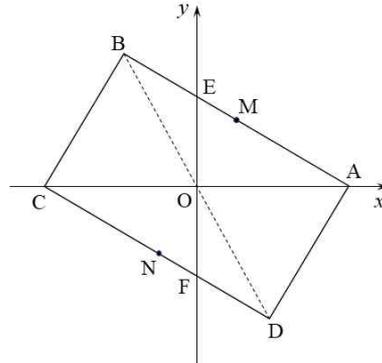
<뒷면에 계속>

[문제 I] 양의 실수 a 와 b 에 대하여 함수 $f(x) = x(x+a)(x-b)$ 를 생각하자. 이때 곡선 $y = f(x)$ ($-a \leq x \leq 0$)과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A , 곡선 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq b$)와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 B 라 하자.

(1) 넓이 A 와 B 를 a 와 b 에 대한 식으로 표현하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 넓이 A 와 B 가 $B = 2A$ 를 만족한다고 하자. 이때 $a < b < 2a$ 임을 설명하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문제 II] 그림과 같이 직사각형 ABCD는 점 A와 C가 x 축 위에 있고, 두 대각선의 교점이 원점에 있다. $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 2p$ 이고 $0 < p < 1$ 이다. 변 AB, CD와 y 축의 교점을 각각 E, F라 하고, 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 다음 물음에 답하시오.



(1) 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 점 A, E, C, F를 지날 때, 이 타원의 두 초점의 좌표를 p 의 식으로 나타내고, 그 과정을 논술하시오. (15점)

(2) 타원 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($m > 0, n > 0$)이 점 A, M, C, N을 지날 때, (1)의 b 에 대하여 $n < b$ 임을 보이고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문제 III] 경희 금은방에서 현재 금 한 돈을 A_0 만원의 가격에 판매하고 있다. 금 한 돈의 가격이 1년마다 변한다고 할 때, n 년 후의 금 한 돈의 가격을 A_n 만원이라 하자. A_n 은 p 의 확률로 uA_{n-1} 이 되고 $q = 1 - p$ 의 확률로 dA_{n-1} 이 된다고 하자. (단, n 은 자연수, $0 < d < 1 < u$). 다음 물음에 답하시오.

(1) $p = \frac{1}{3}$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $A_0 = 20$ 이라 하자. 민국은 3년 후에 금 한 돈을 3년 동안 변한 금 한 돈의 가격 중에 가장 싼 값으로 구입하기로 경희 금은방과 약속하였다. 민국이 3년 후에 이 금 한 돈 거래를 통해 얻는 이익의 기댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (예를 들어, 금 한 돈의 가격이 3년 동안 $A_1 = 10$, $A_2 = 20$, $A_3 = 40$ 으로 변했다면 민국은 3년 후 40만원인 금 한 돈의 가격을 10만원으로 구입하여 30만원의 이익을 남긴다.) (15점)

(2) 민국은 1년 후에 금 한 돈의 가격 A_1 만원이 A_0 만원보다 비싼 경우에는 A_0 만원의 가격으로 금 한 돈을 구입하고, A_0 만원보다 싼 경우에는 금 한 돈을 구입하지 않기로 경희 금은방과 약속하였다. 민국이 1년 후에 얻는 이익을 V_1 이라고 하자. V_0 을 V_1 의 기댓값이라고 할 때, 상수 β 가 A_1 의 가격에 상관없이 $V_0 + \beta A_0 = V_1 + \beta A_1$ 을 만족한다. p 와 β 을 u 와 d 을 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

2023학년도 모의논술고사[자연계]

1. 2023학년도 모의논술고사 예시답안

[문제 1]

(1) 정적분을 활용하여 넓이 A 와 B 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = \frac{a^3}{12}(a+2b), \quad B = \frac{b^3}{12}(2a+b)$$

(2) 넓이 A 와 B 가 $B=2A$ 를 만족하면 다음을 얻는다.

$$b^3(2a+b) = 2a^3(a+2b)$$

이를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 4\left(\frac{b}{a}\right) - 2 = 0$$

또는

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 4\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

함수 $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 2$ 를 생각하자. 그러면 $g(1) = -3 < 0$ 이고 $g(2) = 22 > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서,

$$1 < \frac{b}{a} < 2$$

를 만족하는 a 와 b 가 존재한다. 다음으로,

$$\frac{b}{a} \geq 2$$

인 a 와 b 가 존재하는지 생각해 보자. 함수 $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 2$ 의 도함수 $g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4$ 를 생각하자. 그러면, $g(2) = 22 > 0$ 이고, $x \geq 2$ 에 대해서

$$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4 \geq 32 + 24 - 4 = 52 > 0$$

이므로, 함수 $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 2$ 는 $x \geq 2$ 에서 x 축과 만나지 않는다. 따라서, 방정식 $g(x) = 0$ 은 $x \geq 2$ 에서 근을 가지지 않고, $\frac{b}{a} \geq 2$ 를 만족하는 a 와 b 는 존재하지 않는다. 다음으로,

$$\frac{a}{b} \geq 1$$

인 a 와 b 가 존재하는지 생각해 보자. 함수 $h(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 1$ 을 생각하고, 그것의 도함수 $h'(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2$ 를 생각하자. 그러면 $h(1) = 3 > 0$ 이고, $x \geq 1$ 에 대해서

$$h'(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2 \geq 8 + 12 - 2 = 18 > 0$$

이므로, 함수 $h(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 1$ 는 $x \geq 1$ 에서 x 축과 만나지 않는다. 따라서 $h(x) = 0$ 은 $x \geq 1$ 에서 근을 가지지 않고, $\frac{a}{b} \geq 1$ 을 만족하는 a 와 b 는 존재하지 않는다. 결국, 넓이 A 와 B 가 $B=2A$ 를 만족하면 $a < b < 2a$ 이다.

[문제 II]

(1) 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AC} = 2\sqrt{1+p^2}$ 이므로, A의 좌표는 $(\sqrt{1+p^2}, 0)$ 이다.

또한 삼각형 ABC와 삼각형 AOE가 닮았으므로 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AO} : \overline{OE}$ 이다.

$2 : 2p = \sqrt{1+p^2} : \overline{OE}$ 에 의하여 $\overline{OE} = p\sqrt{1+p^2}$ 이고, E의 좌표는 $(0, p\sqrt{1+p^2})$ 이다.

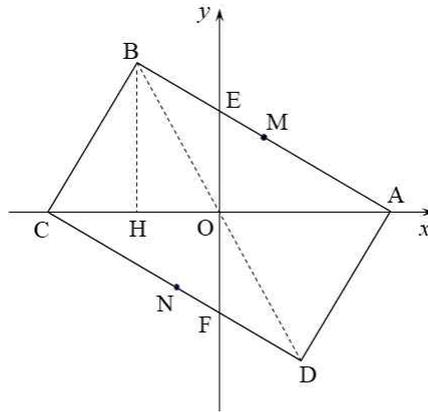
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 $(\sqrt{1+p^2}, 0)$ 을 대입하면 $\frac{1+p^2}{a^2} = 1$ 이고, $a^2 = 1+p^2$ 이다.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 $(0, p\sqrt{1+p^2})$ 을 대입하면 $\frac{p^2(1+p^2)}{b^2} = 1$ 이고, $b^2 = p^2(1+p^2)$ 이다.

$0 < p < 1$ 이므로 $a^2 - b^2 = 1+p^2 - p^2(1+p^2) = 1-p^4 > 0$ 이다.

따라서 두 초점은 x 축 위에 있고, 좌표는 $(\sqrt{1-p^4}, 0), (-\sqrt{1-p^4}, 0)$ 이다.

(2)



점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 ABC와 삼각형 AHB가 닮았으므로 $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AH}$, $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AB} : \overline{BH}$ 이다.

$\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 2p$, $\overline{AC} = 2\sqrt{1+p^2}$ 를 이용하면 $\overline{AH} = \frac{2}{\sqrt{1+p^2}}$, $\overline{BH} = \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}$ 이다.

따라서 B의 좌표는 $\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{2}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \left(-\frac{1-p^2}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$ 이고,

M의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{1-p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right), \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) = \left(\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$

$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ 에 $(\sqrt{1+p^2}, 0)$ 을 대입하면 $\frac{1+p^2}{m^2} = 1$ 이고, $m^2 = 1+p^2$ 이다.

$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ 에 $\left(\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$ 를 대입하고 $m^2 = 1+p^2$ 을 이용하면

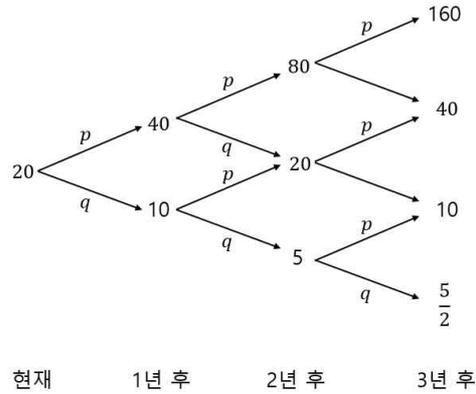
$\frac{p^4}{(1+p^2)^2} + \frac{p^2}{n^2(1+p^2)} = 1$ 이고, 정리하면 $n^2 = \frac{p^2(1+p^2)}{1+2p^2}$ 이다.

$b^2 = p^2(1+p^2)$ 이므로 $n^2 = \frac{p^2(1+p^2)}{1+2p^2} = \frac{b^2}{1+2p^2}$ 이고,

$0 < p < 1$ 에 대하여 $\frac{1}{1+2p^2} < 1$ 이므로 $n^2 < b^2$ 이고, 따라서 $n < b$ 이다.

[문제 Ⅲ]

(1)



위의 그림으로부터 총 8가지의 경로가 있다. 아래표로 정리하면

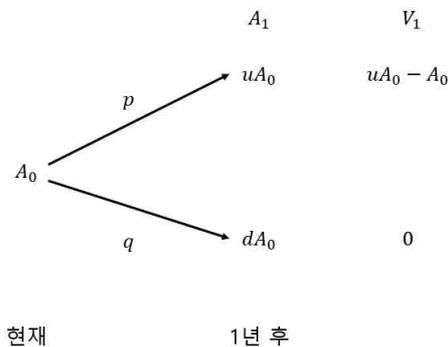
가격 변화	최저가격	이익	확률
20 → 40 → 80 → 160	20	140	1/27
20 → 40 → 80 → 40	20	20	2/27
20 → 40 → 20 → 40	20	20	2/27
20 → 40 → 20 → 10	10	0	4/27
20 → 10 → 20 → 40	10	30	2/27
20 → 10 → 20 → 10	10	0	4/27
20 → 10 → 5 → 10	5	5	4/27
20 → 10 → 5 → 5/2	5/2	0	8/27

따라서 민국이가 3년 후에 얻는 이익의 기댓값은

$$140 \times \frac{1}{27} + 20 \times \frac{2}{27} + 20 \times \frac{2}{27} + 0 \times \frac{4}{27} + 30 \times \frac{2}{27} + 0 \times \frac{4}{27} + 5 \times \frac{4}{27} + 0 \times \frac{8}{27} = \frac{100}{9}$$

이다.

(2)



위에 그림으로부터 민국은 1년 후의 이익 V_1 은 p 의 확률로 $V_1 = uA_0 - A_0$ 이 되고, q 의 확률로 $V_1 = 0$ 이 되므로 V_1 의 기댓값 V_0 은 다음과 같이 계산된다.

$$V_0 = p \times (uA_0 - A_0) + q \times 0 = pA_0(u - 1).$$

상수 β 에 대해 A_1 의 가격과 상관없이 $V_0 + \beta A_0 = V_1 + \beta A_1$ 이 성립하므로 $A_1 = uA_0$, $A_1 = dA_0$ 일 때

대입하면 다음 두 식을 얻는다.

$$V_0 + \beta A_0 = A_0(u - 1) + \beta u A_0$$

$$V_0 + \beta A_0 = 0 + \beta d A_0$$

$V_0 = pA_0(u - 1)$ 을 위의 식에 대입하고, 연립 방정식을 풀면, $\beta = \frac{1-u}{u-d}$, $p = \frac{1-d}{u-d}$ 이다.

2. 2023학년도 모의논술고사문항 해설(출제범위 포함)

[문제 I]에서는 주어진 상황을 정적분의 성질, 사잇값 정리 등을 이용하여 수학적으로 표현할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [문제 I]-(1)에서는 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는지, 그리고 적분 계산을 정확하게 할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [문제 I]-(2)에서는 사잇값 정리를 잘 이해하고 있는지와 그것을 이용하는 능력을 평가하고자 하였다.

[문제 II]에서는 이차곡선인 타원의 방정식을 이해하고, 무리식의 계산을 정확하게 수행할 수 있는지 평가하는 것을 목표로 하였다. [문제 II]-(1)에서는 삼각형의 닮음을 이용하여 장축과 단축의 길이를 구하고, 이를 이용하여 타원의 초점을 찾을 수 있는지 평가하며, [문제 II]-(2)에서는 삼각형의 닮음을 이용하여 타원의 방정식을 찾고, 논리적으로 부등식을 설명할 수 있는지 평가하고자 하였다.

[문제 III]에서는 미래의 상황을 논리적으로 구성하는 능력, 확률과 기댓값을 계산하는 능력을 평가하는 것을 목표로 하였다. [문제 III]-(1)에서는 3년 후의 상황을 수형도로 그려 각 상황별 이익과 확률을 구하고 이를 이산확률분포로 표현하여 기댓값을 찾을 수 있는지 평가하며, [문제 III]-(2)에서는 일반화된 상황에서 기댓값을 계산하고 항등식을 이용하여 이를 정리한 후 연립방정식을 풀 수 있는지 평가하고자 하였다.