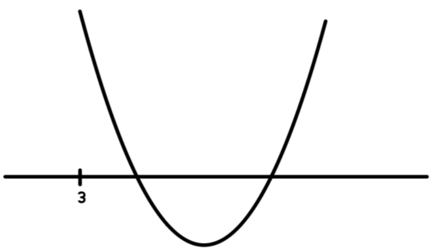
수학, 알고 있니?

이차방정식의 근의 위치/분리

3보다 큰 두 실근을 갖는다?

무엇을 따져야 할까?



안녕하세요 수알입니다

이차방정식 해석에 이어 이차방정식 근의 분리에 대해 다루겠습니다

이차방정식 근의 분리는

이차방정식의 근이 특정한 조건을 만족하기 위한 상황을 말합니다

예를 들어, 문제에서

서로 다른 양의 실근

서로 다른 음의 실근

부호가 다른 실근

특정 값보다 큰 서로 다른 두실근

등의 말이 나왔을 때

근의 존재성뿐만 아니라

근에 특정한 조건이 걸린 상황을 분석하는 개념입니다

이차방정식에서도 중요하지만

삼,사차 방정식에서도 쓰이고 심지어 이,삼,사차 부등식에서도 활용될 수 있는 내용이므로

꼭 숙지해야 합니다

뿐만 아니라 개념을 공부하는 과정에서 연습할

특정 조건을 만족하는 case를 추려내는 능력도 중요하니

이번 칼럼은 상위권 학생들도 쉽다고 무시하지 말고 꼭 정독해주기 바랍니다

그럼, 시작하겠습니다

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 가

(편의상 a는 양수로 하겠습니다. 방정식은 언제나 a를 양수로 만들 수 있으니까요)

<p보다 큰 서로 다른 두 실근을 갖는다>

p보다 큰 서로 다른 두 실근을 갖는 상황을

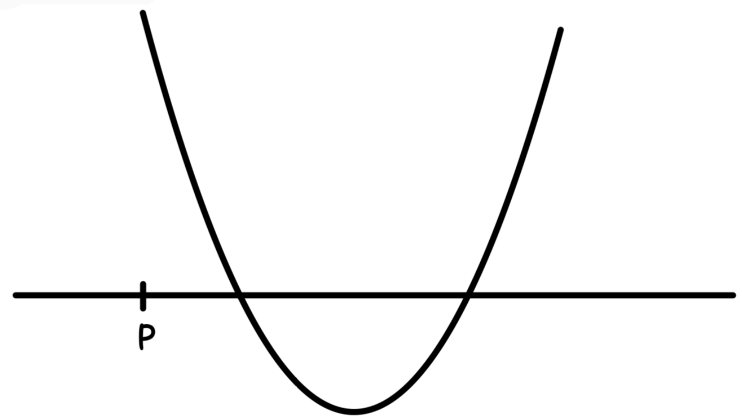
이차함수와 x축의 교점이 어떻게 되어야 하는지 생각하며 그려봅시다

어떻게 되죠?

.

.

.



위와 같이 된다는 것을 여러분이 잘 찾았을 겁니다

그렇다면 위 조건을 만족하기 위해 필요한 것들을 따져봅시다

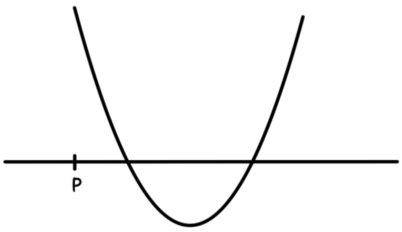
먼저, 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

판별식 $D>0$ 을 만족해야 합니다

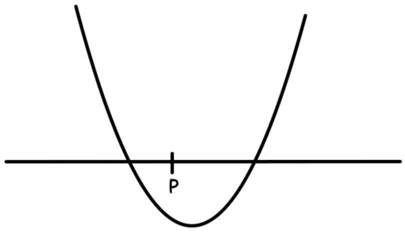
자 $D>0$이 확보된 상황에서

이차함수와 x축, 그리고 $(p,0)$의 관계는 어떻게 될 수 있을까요?

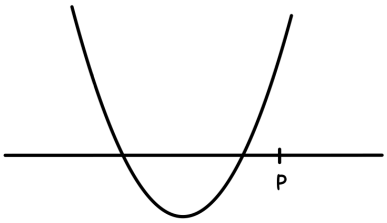
그려보세요!



1



2



3

위와 같이 세개의 상황이 나옵니다

그 중에서 우리가 원하는 그림 (=1) 이 나오기 위해서는 추가로 어떤 조건을 만족해야 할까요?

그림간의 차이점을 분석하며 떠올려봅시다

맞습니다

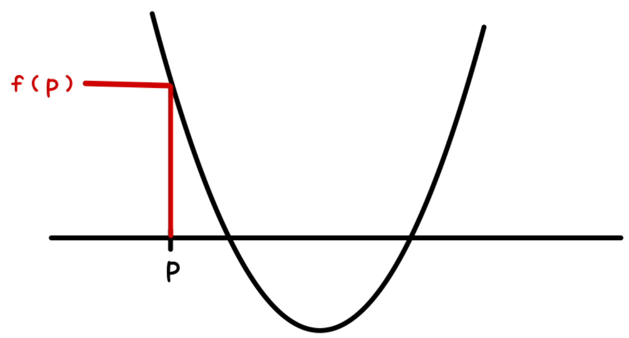
축의 위치와 **p에서의 함숫값의 부호**

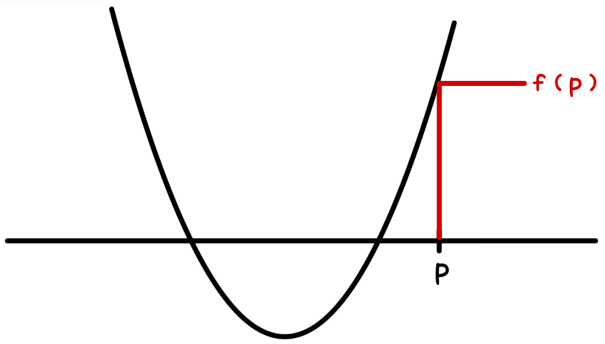
에 따라 케이스가 분류된다는 것을 알 수 있죠?

먼저 p에서의 함숫값의 부호를 따져서 케이스를 정리해줍시다

1,3번은 f(p)가 양수이고, 2번은 f(p)가 음수입니다

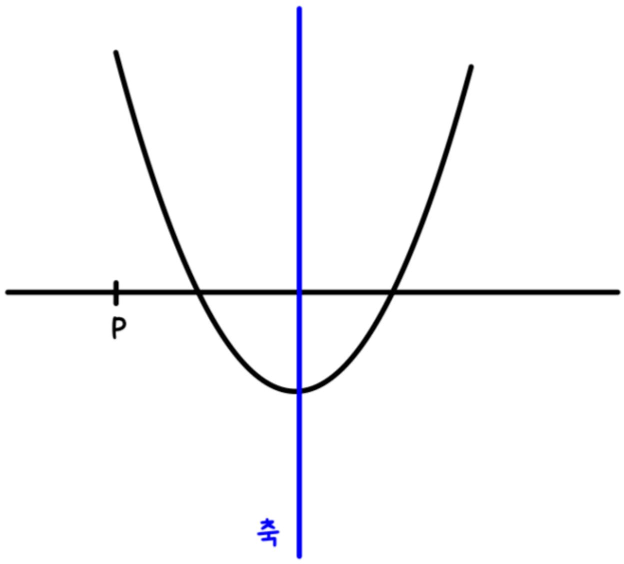
우리가 원하는 것은 1번이므로 $f(p)>0$ 이라는 조건을 통해 2번을 제껴줍시다





다음으로 1,3번에서 1번만 얻어내려면

축의 방정식이 p보다 오른쪽에 있어야 한다는 것을 떠올릴 수 있습니다



$$x = -\frac{b}{2a}$$

이렇게 세가지 조건

$D>0$

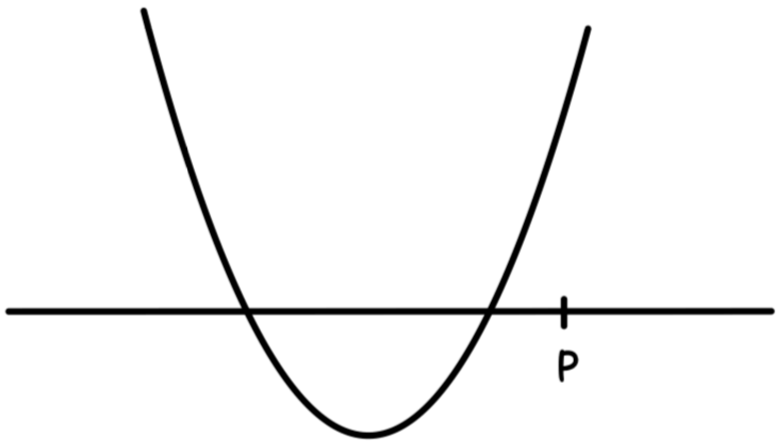
$f(p)>0$

축$>p$

를 따져주면 이차방정식은 p보다 큰 서로 다른 두 실근을 갖는다는 것을 확정지을 수 있습니다

<p보다 작은 서로 다른 두 실근을 갖는다>

상황에 맞는 그림을 그려보세요

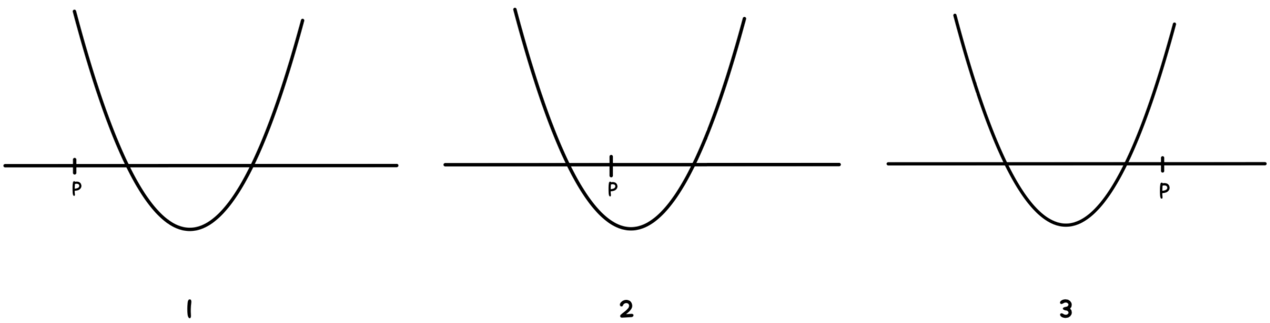


위와 같이 그려지겠죠?

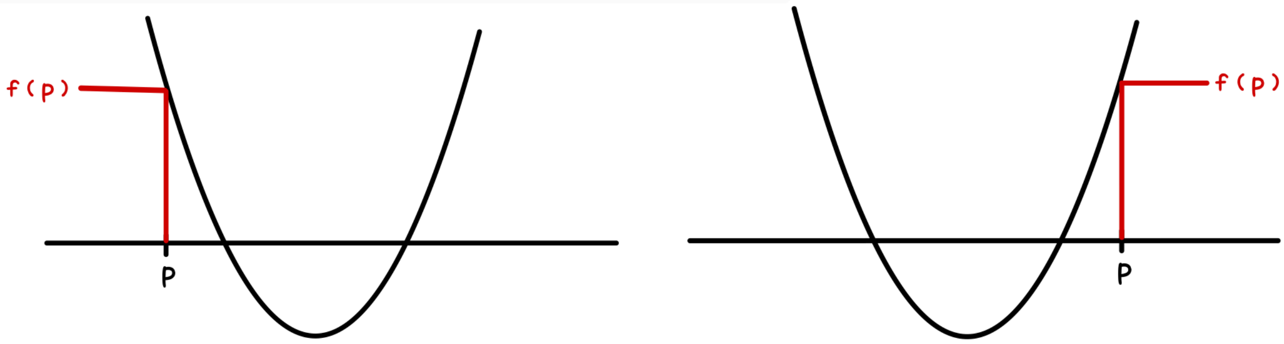
첫번째하고 마찬가지로

D > 0이어야 하고,

D > 0 인 상황이면 다음과 같이 세가지의 상황이 가능한데



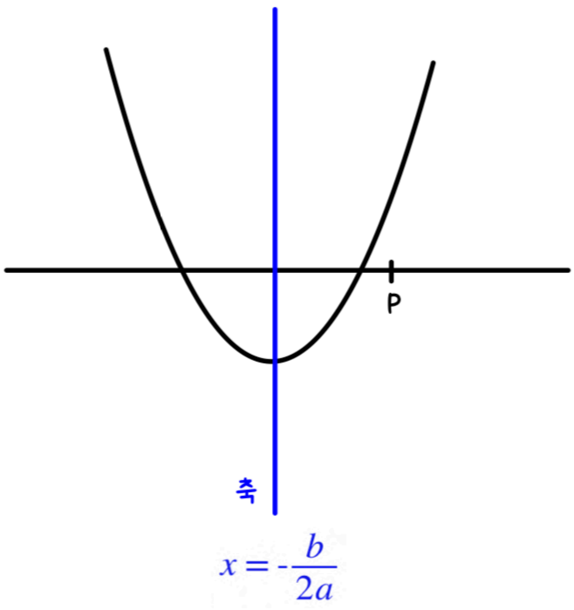
f (p) 가 양수이면 1,3번만 남게되고



우리가 원하는 것은 3번인데

1,3을 구분하는 것은 축과 p의 관계이므로

축<p 이라는 조건을 사용하면 3번 case가 확정됩니다



즉,

$D > 0$

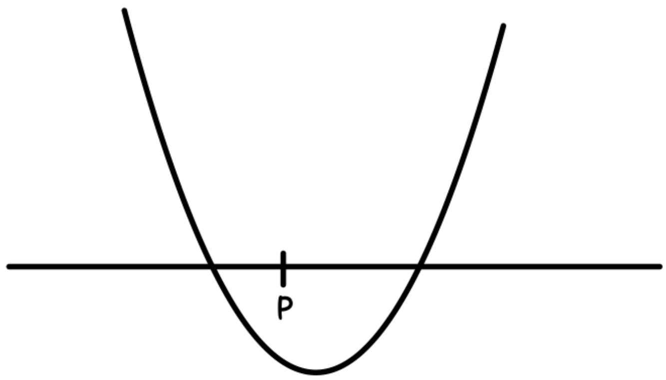
$f(p) > 0$

축$<p$

를 따져주면 이차방정식은 p보다 작은 서로 다른 두 실근을 갖는다는 것을 확정지을 수 있습니다

<두 근 사이에 p가 있다 >

이 상황에 맞는 그림을 그려봅시다



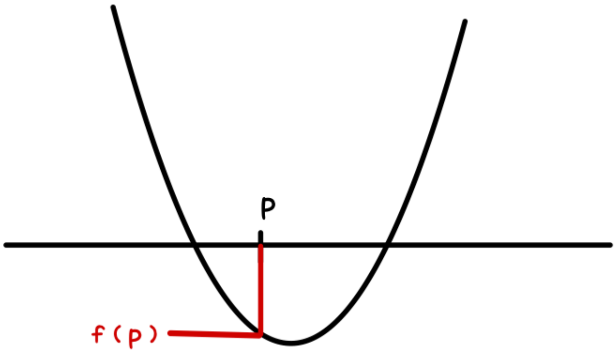
위과 같이 되겠죠?

자 여기서 어떤 조건을 따지면 될 지 생각해보세요

만약 1번에서처럼 판별식 $D>0$ 을 먼저 따지려 했다면 그건 잘못된 생각입니다!

왜냐하면 $f(p)$가 음수가 되면 $(f(p)<0)$

두 근 사이에 p가 있는 그림외에 다른 case가 나올수가 없기 때문이죠!!



또한 축의 위치도 상관이 없죠?

축이 p보다 클필요도, 작을 필요도, 같을 필요도 없습니다

그러므로 두 근 사이에 p가 있다는 상황에서는

$f(p)<0$ 만 만족하면 되는 것입니다

이런 식으로 단순히 외워서 조건을 따지는 것이 아닌

상황에 맞는 case가 한정되기 위해서는 어떤 조건을 따져야할지

판단하는 연습을 하며 공부하셔야 합니다

그래야 수능 문제에서 조건이 나왔을 때

그 상황에 맞는 case들을 빠르게 추론할 수 있습니다

다음은

서로 다른 두 양의 실근

서로 다른 두 음의 실근

부호가 다른 두 실근

에 대해서 따져보겠습니다

<서로 다른 두 양의 실근>

위 case에서 p 대신 0으로만 바꿔서 따져주면 됩니다!

추가로 이차 방정식의 근과 계수와의 관계를 활용하여

두 근의 합과 곱으로 따져줄 수도 있는데요

두 근의 합이 양수 ($\alpha + \beta > 0$) 이고

두 근의 곱도 양수 ($\alpha\beta > 0$) 이면

됩니다

또한 실근의 존재를 따져줘야 합니다

두 근의 합이 양수이고 두 근의 곱이 양수이더라도

실근이 존재하지 않을 수 있기 때문입니다

예를 들어, $x^2 - x + 10 = 0$ 의 경우

두근의 합도 양수, 두 근의 곱도 양수이지만

실근이 존재하지 않습니다

그러므로 D > 0을 따져줘야 합니다

만약, 서로 다른 두 양의 실근이 아니라

0보다 큰 두 실근으로 물어보면 어떨까요?

[두 실근]이라는 말과 [서로 다른 두 실근]은 다른 말입니다

[두 실근]은

[중근]이 [서로 같은 두 실근]으로서 해석이 되기 때문에

두 실근 = [서로 다른 두 실근] & [서로 같은 두 실근 = 중근] 모두 가능한 것입니다.

즉, 0보다 큰 두 실근을 따지려면

$D > 0$ 이 아니라 $D \geq 0$ 로 따져줘야 합니다

<서로 다른 음의 실근>

마찬가지로 p보다 작은 서로 다른 두 실근을 따지는 조건에서

p대신 0을 대입하면 해결됩니다

다른 방법으로는

두 근의 합이 음수 ($\alpha + \beta < 0$) 이고

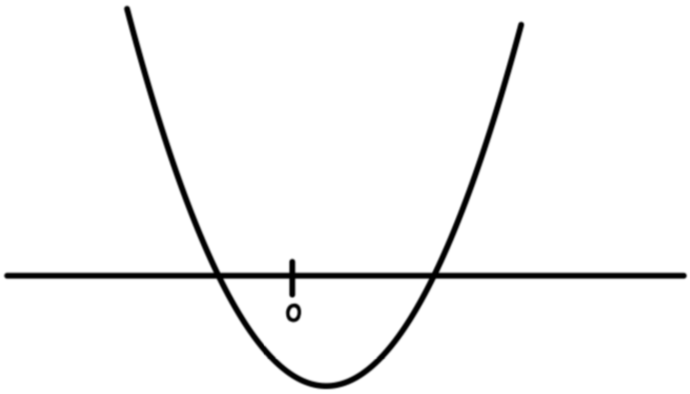
두 근의 곱이 양수 ($\alpha\beta > 0$) 이면

됩니다

[서로 다른] 이므로 판별식 > 0까지 따져줘야 합니다

<부호가 서로 다른 두 실근>

이 상황에 맞는 그림을 그려봅시다



앞서 배운 내용을 활용하면

$f(0) < 0$ 으로 따져낼 수 있습니다

또한,

두 근의 곱이 음수 ($\alpha\beta < 0$) 라는 것으로 따져도 가능합니다

이 경우는 두 근이 부호가 서로 달라 절대 같을 수 없으므로

[서로 다른] 을 따로 따질 필요가 없습니다

<정리>

첫 째, 이차방정식의 근의 위치 판단을 위해서는 조건에 맞는 그림을 먼저 그려낼 수 있어야한다

둘 째, 원하는 그림이 확정되기 위한 조건을 따진다

셋 째, 그 조건에는 [판별식], [특정 함숫값의 부호], [축의 위치] 등이 있다

넷 째, 두 근의 부호가 다르거나 두 근 사이에 p가 있다는 조건을 따질 때는

함숫값 조건만 따져도 원하는 그림이 확정된다는 것을 이해하자

그러나, 절대 ~~단순히 외우지는 말고~~

함숫값 조건을 만족하는 그림 중

원하는 조건을 만족하지 않는 다른 그림이 나올 수 없다는 것을 충분히 이해하자

다섯 째, [두 근] 과 [서로 다른 두 실근] 을 이해하자

[두 근] 을 따질 때는 중근도 두 근으로 간주해야 하므로

$D > 0$ 이 아니라 $D \geq 0$ 로 따져줘야 한다!

여섯째, 이 개념뿐만 아니라 다른 개념을 공부할 때도 단순히 외우지 말고

상황을 이해하며 따져가는 공부를 할 수 있도록 하자!

자 이렇게 이차 방정식의 근의 위치 혹은 근의 분리에 대해 공부해 보았습니다

내용 뿐만 아니라, 내용을 설명하는 과정에서 쓰인

특정 조건에서 가능한 case들 그려보는 연습이

본 칼럼에서 제가 가장 강조하고 싶은 부분입니다.

평상시 공부를 하거나 기출 분석을 할 때,

조건에 맞는 case들을 추론하는 연습을 해야만

준킬러, 킬러에 대한 적응력을 높일 수 있습니다.

다음 칼럼에서는 이차부등식의 함수적 해석에 대해 공부하겠습니다

-끝-