제 2 교시

2023학년도 4월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역

성명		수험 번호					3			

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

따스한 강물에 흔들리는 노을

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 선택과목, 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

경기도교육청

수학 영역

제 2 교시

만든 놈
crazy_hansuckwon (인스타)

5지선다형

밑변환.
1번치곤 어려울 듯?

1. $\log_6 4 + \dfrac{2}{\log_3 6}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2\log_6 2 + \dfrac{2}{\log_3 6} = 2\left(\log_6 2 + \dfrac{1}{\log_3 6}\right)$

$= 2(\log_6 2 + \log_6 3)$

$= 2\log_6 6$

$= \boxed{2}$

그저 등비수열의 공비..

2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 3$, $\dfrac{a_5}{a_3} = 4$일 때, a_4의 값은? [2점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

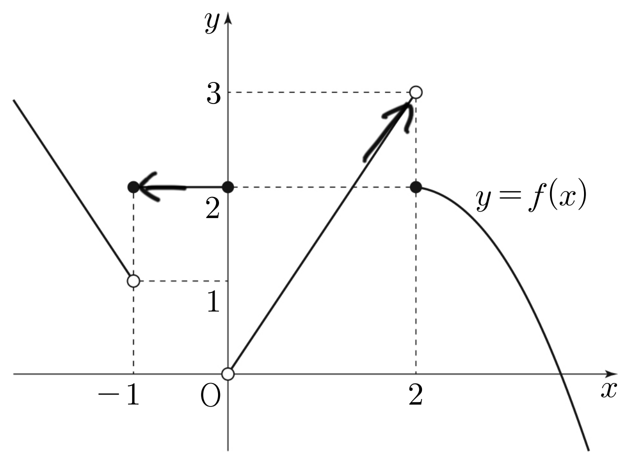
공비를 r로 두면 $\dfrac{a_5}{a_3} = r^2 = 4$ ∴ $r=2$ (공비 > 0)

㉠ $a_4 = 3 \times 2^3$

$= \boxed{24}$

극한값 기본문제

3. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

$2 + 3 = 5$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

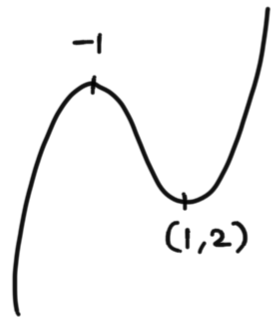
미분할 줄 아니?

4. 함수 $f(x) = 2x^3 - 6x + a$의 극솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 6x^2 - 6$

$= 6(x+1)(x-1)$



$\longrightarrow f(1) = 2 - 6 + a$

$= a - 4 = 2$

∴ ㉠ $a = \boxed{6}$

만든 놈
crazy_hansuckwon (인스타)

평균변화율과 미분계수의 관계

5. 0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2+2h+3일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = h^2+2h+3$$

⇒ 0이 아닌 모든 실수 h에서 성립하므로 극한 보내도 상관X

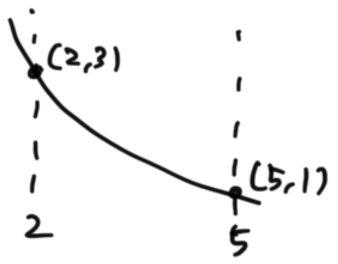
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2+2h+3) = \boxed{3}$$

로그함수의 최대와 최소~

6. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2, 5]$에서 최댓값 3, 최솟값 1을 갖는다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

주어진 함수: 감소함수



$$\left.\begin{aligned} 3 &= \log_{\frac{1}{2}}(2-a)+b \\ 1 &= \log_{\frac{1}{2}}(5-a)+b \end{aligned}\right\} \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(2-a)-\log_{\frac{1}{2}}(5-a)=2$$

⇒ $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2-a}{5-a}=2$ 이므로 $\frac{2-a}{5-a}=\frac{1}{4}$

∴ 계산하면 $a=1$이고, $b=3$

㉠ $a+b=\boxed{4}$

접선의 방정식 ⊕ 곱의 미분법.

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이다. 함수 $g(x)=(x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

① $y=3x-1$이 $(0, f(0))$을 지나므로 $f(0)=-1$

② 접선의 기울기가 3이므로 $f'(0)=3$

$g(x)=(x+2)f(x)$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$ 이므로

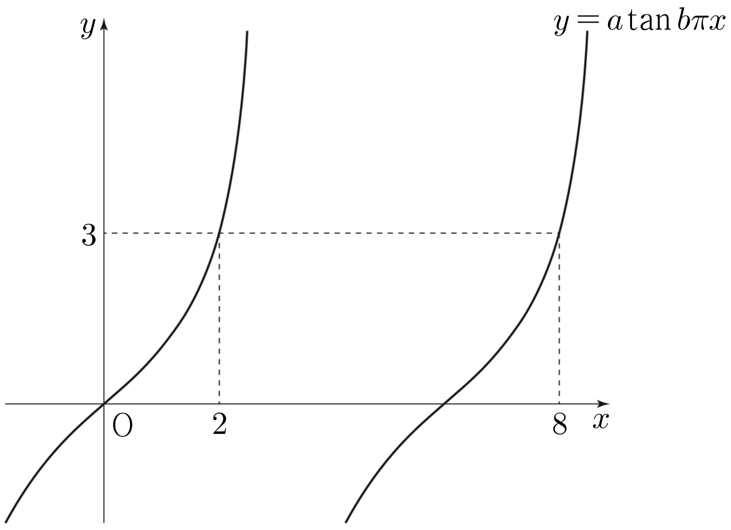
$g'(0)=f(0)+2f'(0)$

$=-1+6$

$=\boxed{5}$

tan 주기만 보라도 걍 좌표 때려박으면 되긴함

8. 그림과 같이 함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2, 3)$, $(8, 3)$을 지날 때, $a^2\times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

주기 : 6 이므로 $\frac{\pi}{b\pi}=6$ $\therefore b=\frac{1}{6}$

곧 $y=a\tan\frac{\pi}{6}x$ 가 $(2,3)$을 지나므로 $3=a\tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore a=\sqrt{3}$

구 $a^2b=\boxed{\frac{1}{2}}$

f(x)의 부정적분을 F(x)로 두는 연습을 합시다!

9. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$로 두면

$\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f(0)=1$

곧 $f'(x)=3x^2-4x+1$ 을 부정적분하면

$f(x)=x^3-2x^2+x+1$ ($\because f(0)=1$)

구 $f(2)=8-8+2+1$
$=\boxed{3}$

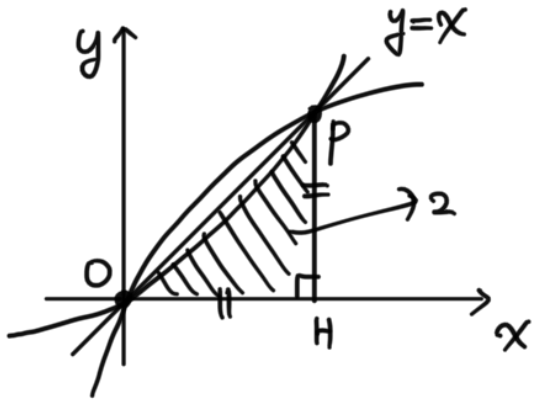
역함수만 잘 알고 있다면 어려울 건 X

10. 상수 $a(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-1$과 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

지수 & 로그 동시등장
⇒ 역함수의심!

$y=a^x-1$ 는 $y=a^x$를 y축방향 -1 평.이
$y=\log_a(x+1)$는 $y=\log_a x$를 x축방향 -1 평.이
> 역함수!



곧 $\overline{OH}=\overline{OP}=2$ 이고
P(2,2)이다.

$y=a^x-1$가 $(2,2)$를 지나므로 $2=a^2-1$

$\therefore$ 구 $a=\boxed{\sqrt{3}}$

만든 놈
crazy_hansuckwon (인스타)

합성함수긴...한데 결국 실근 3개의 특수성!

11. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

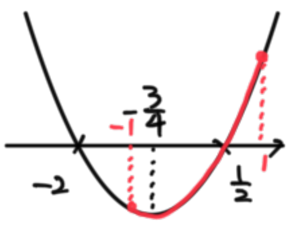
① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = k$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = -k$

$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = -k$

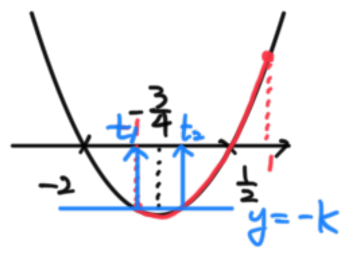
$\cos x = t$로 치환하면 $(2t-1)(t+2) = -k$ $(-1 \le t \le 1)$



이 때 실근이 3개라는 것은 $(2t-1)(t+2) = -k$를 만족하는 t가 2개이고, 그 중에서도 그 중 1개는 -1이라는 뜻

($\because$ $(2t-1)(t+2) = -k$ 만족하는 t가 1개면 $y=\cos x$, t 로 실근 최대 2개, 그리고 $y=t_2$, $y=-1\ (t_1)$ 형태여야 실근 3개 가능)

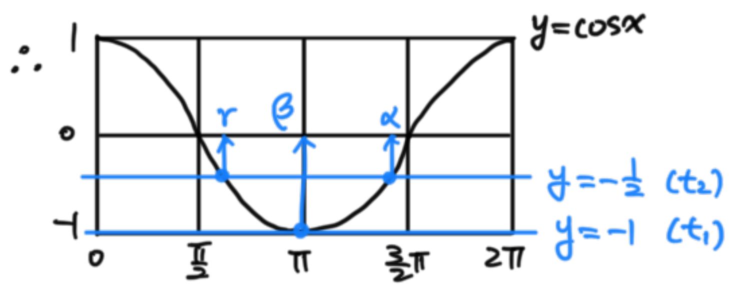
곧 구하는 경우는



이고

이차함수의 대칭성에 따라 $t_2 = -\frac{1}{2}$이다.

$\therefore$



따라서 $-k = (-3)(1)$ $\therefore k=3$ 이고

α는 $\cos x = -\frac{1}{2}$를 만족하는 x 중 큰 값

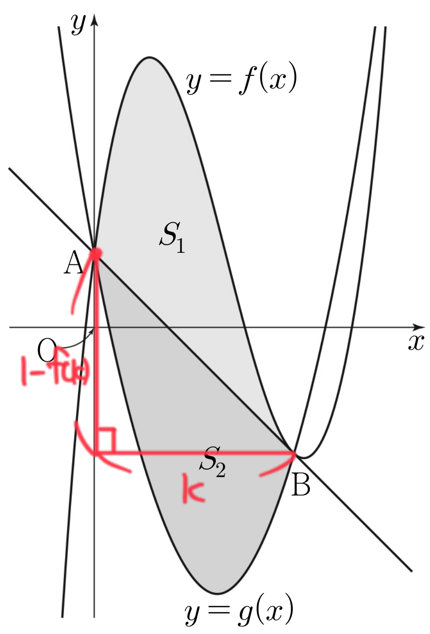
$\Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}\pi$ $(0 \le \alpha \le 2\pi)$

㉠ $k\alpha = \boxed{4\pi}$

넓이공식 외웁시다..

12. 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = g(x)$의 그래프가 점 A$(0, 1)$, 점 B$(k, f(k))$에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다. 곡선 $y = f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y = g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

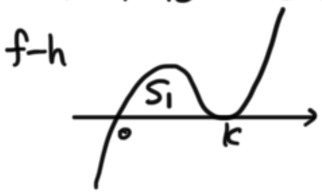
$S_1 = S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]



① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

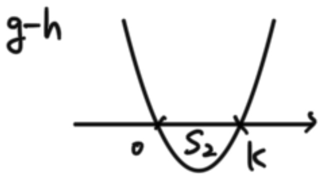
차의 함수 이용 (h는 접선)

f-h



$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{12}(k-0)^4 = \frac{k^4}{12}$

g-h



$\Rightarrow S_2 = \frac{p}{6}(k-0)^3 = \frac{p}{6}k^3$ (p는 $g(x)$의 최고차항 계수)

$\frac{1}{12}k^4 = \frac{p}{6}k^3$

$\Rightarrow p = \frac{1}{2}k$

또한, 접선의 평균변화율(기울기) $= f'(k)$ 이므로

$\frac{f(k)-1}{k} = f'(k)$ 에서 $k^2 - 6k + 8 = 3k^2 - 12k + 8$

$\Rightarrow 2k^2 - 6k = 0$ 에서 $k=3$ $(k>0)$

곧 $p = \frac{3}{2}$이고, $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + qx + 1$로 두면 이 함수는 $(3, f(3))$을 지나므로 계산때리면 $q = -\frac{11}{2}$이다.

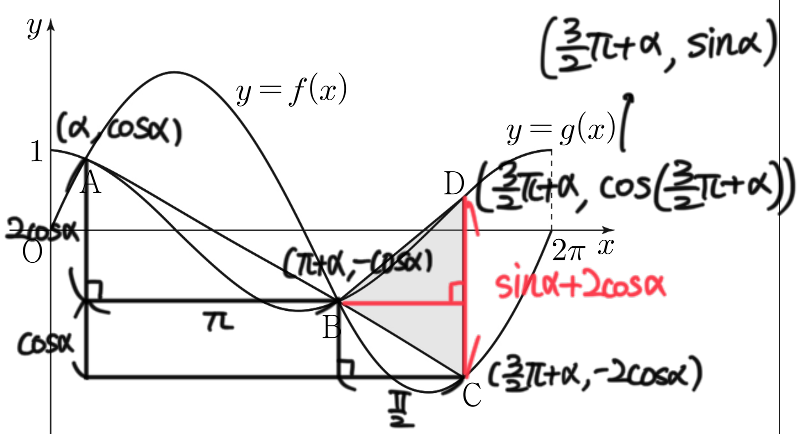
㉠ $\int_0^3 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 1\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (3x^2 - 11x + 2)dx$

$= \frac{1}{2}\left[x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 2x\right]_0^3$

$= \boxed{-\frac{33}{4}}$

case 분류만 잘하면 함수가 어려운 함수는 아니라 할만함

13. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]

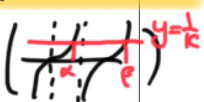


① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ✓③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

가장 먼저 check! : 대칭성, 주기성

$y=k\sin x$와 $y=\cos x$의 교점 α : $k\sin\alpha=\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{k}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{k}$을 만족하는 α

곧 $y=\tan x$는 주기가 π이므로 점 A와 점 B의 x좌표도 π만큼 차이남. () $y=\frac{1}{k}$

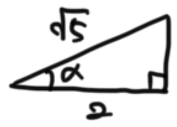
$\therefore$ $A(\alpha, \cos\alpha)$, $B(\pi+\alpha, -\cos\alpha)$ ($\because \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$)

C는 $\overline{AB}$를 $3:1$ 외분하는 점이므로 비율 쓰면 $C(\frac{3}{2}\pi+\alpha, -2\cos\alpha)$

이때 $C(\frac{3}{2}\pi+\alpha, -2\cos\alpha)$가 $y=k\sin x$ 위의 점이므로

$-2\cos\alpha=k\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha)$

$=-k\cos\alpha$ 이고, $\cos\alpha\neq 0$ 이므로 $k=2$

곧 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 에서  : $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times(\sin\alpha+2\cos\alpha)$

$=\frac{\pi}{4}\times\sqrt{5}$

$=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{4}\pi}$

14. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(2)=32$ O

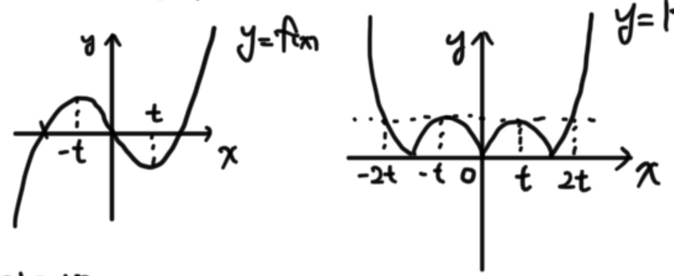
ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다. O

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$ ✕

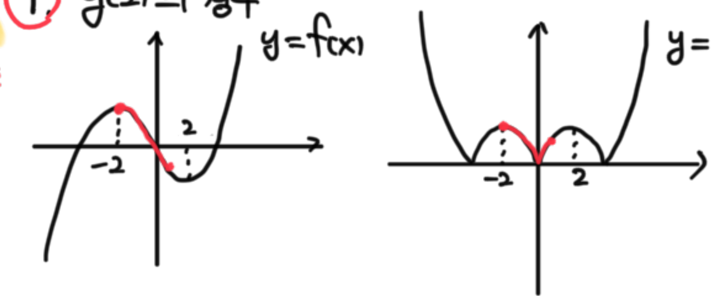
① ㄱ ② ㄷ ✓③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이유는... 삼차함수의 비율관계 ^^...

$f(x)$는 기함수, $f'(x)=3x^2-3t^2$ 이므로



ㄱ. $g(2)$의 경우



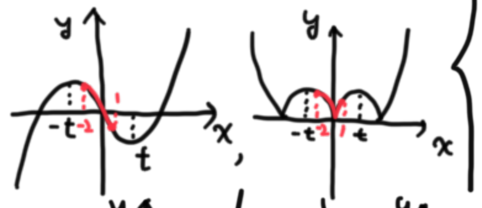
⇒ $[-2, 1]$에서의 최댓값은 둘다 $f(-2)$

⇒ $M_1(2)+M_2(2)=2f(-2)$

이를 계산하면 $g(2)=\boxed{32}$

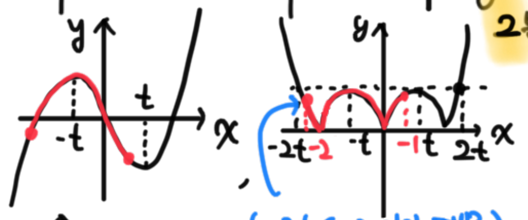
ㄴ. t따라 case 분류. (극점 기준으로!)

i) $t\geq 2$:



곧 $M_1(t)=f(-2)$
$M_2(t)=f(-2)$
⇒ $g(t)=2f(-2)$이므로
$g(t)=2f(-t)$를 만족하는 t는 2뿐. (계산 ㄱㄱ)

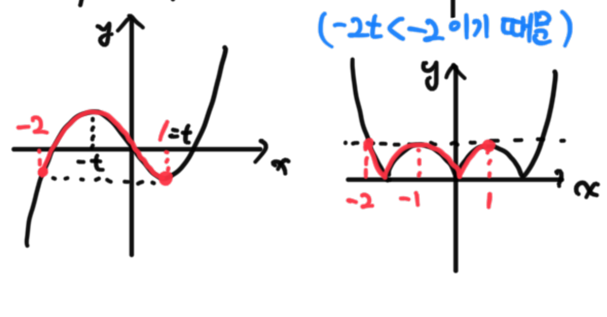
ii) $1<t<2$:



(−2t<−2이기 때문)

곧 i)과 동일하므로 조건 만족하는 t는 ✕

iii) $t=1$



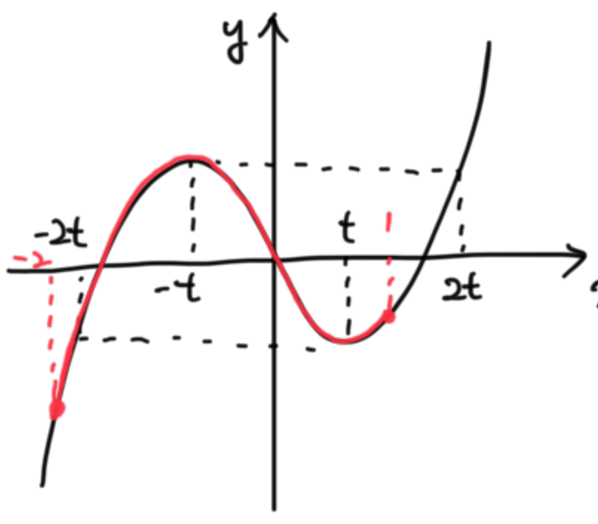
곧 $M_1(t)=f(-t)$
$M_2(t)=f(-t)$
⇒ $g(t)=2f(-t)$이다.
따라서 $t=1$은 조건 만족

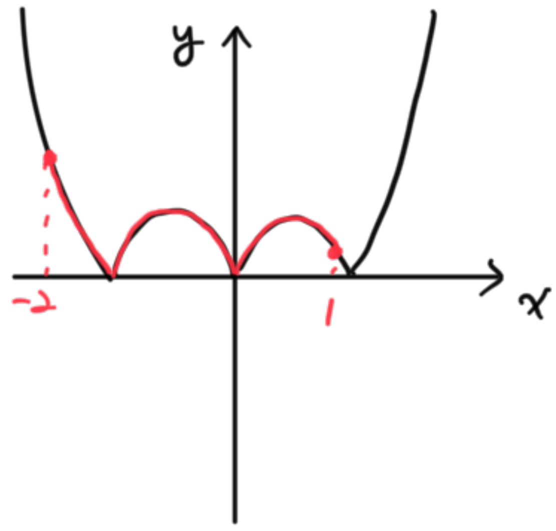
여백 부족으로 추가 페이지에 쓰겠습니다...

14번 추가 여백 많아서 너무 행복함 ^^ ~

만든 놈
crazy_hansuckwon (인스타)

iv) $\frac{1}{2}<t<1$ 일 때





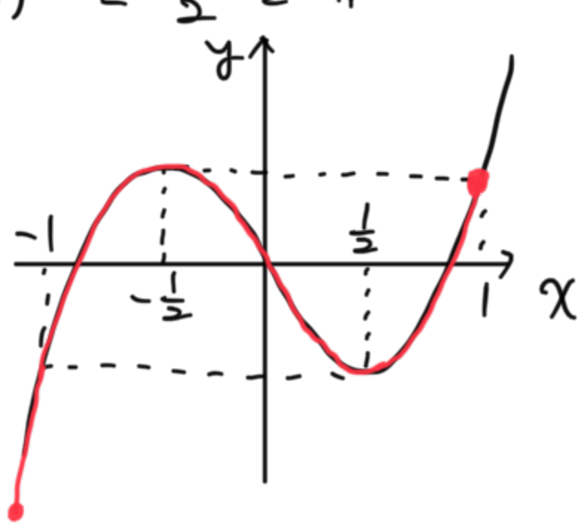
곧 $M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=f(-2)$ 이므로

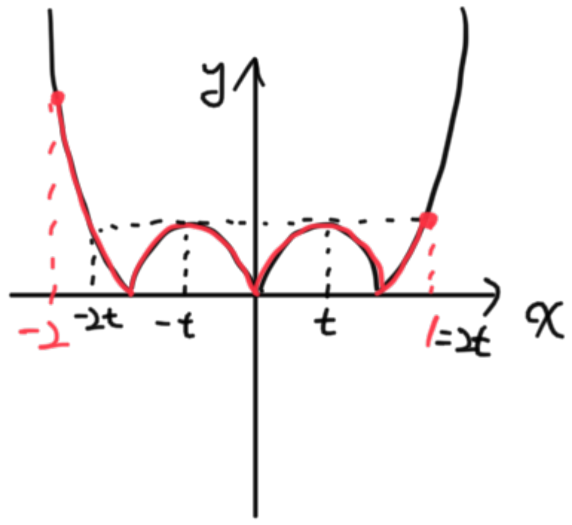
$g(t)=f(-t)+f(-2)=2f(-t)$

⇒ ∴ $f(-2)=f(-t)$을 만족하는 t는

주어진 범위 내에 X

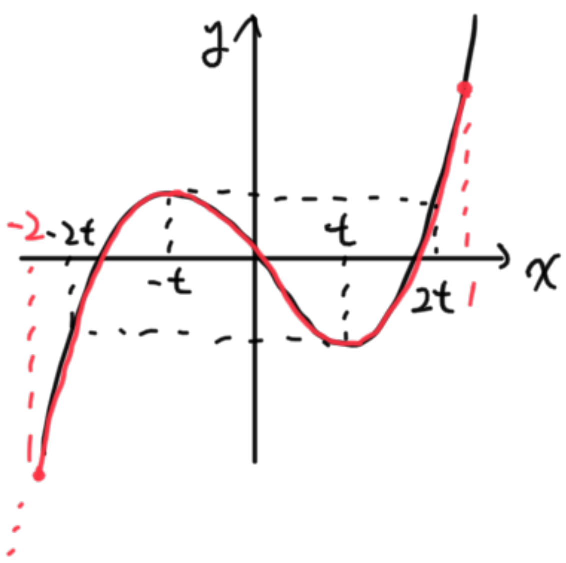
v) $t=\frac{1}{2}$ 일 때

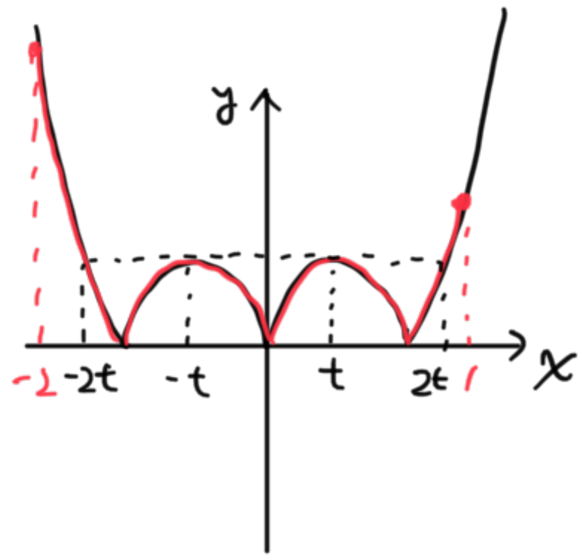




iv)과 동일. But ㄷ 선지와 관련있음

vi) $0<t<\frac{1}{2}$ 일때





$M_1(t)=f(1)$, $M_2(t)=f(-2)$ 이므로

$g(t)=f(1)+f(-2)=3t^2-7$

곧 계산하면 조건을 만족하는 양의 실수 t는 X

곧 t의 최댓값: 2, 최솟값: 1 이므로 합은 $\boxed{3}$

ㄷ. iv)과 vi)를 보면

iv)에서 $g(t)=2t^3+6t^2-8$, vi)에서 $g(t)=3t^2-7$ 이므로 각각 ㄷ선지의 우극한 / 좌극한에서 쓰이는 함수

∴ $\lim_{h\to0+}\frac{g(\frac{1}{2}+h)-g(\frac{1}{2})}{h}$ 는 $2t^3+6t^2-8$의 도함수에 $t=\frac{1}{2}$ 대입한 값 ($g(t)$는 다항함수이므로 미분가능)

⇒ $\frac{15}{2}$

$\lim_{h\to0-}\frac{g(\frac{1}{2}+h)-g(\frac{1}{2})}{h}$ 는 $3t^2-7$의 도함수에 $t=\frac{1}{2}$ 대입한 값

⇒ 3

ㄱ $\frac{15}{2}-3=\boxed{\frac{9}{2}}$

만든 놈
crazy_hansuckwon (인스타)

역추적하면 case 분류에서 모순이 생각보다 금방 발견됨. 쫄지 맙시다!

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

① 2^{n-2}으로는 음수를 만들 수 없다 check (0도 안됨)
② $\log_2 a_n$으로도 $a_n \geq 1$이므로 음수를 만들 수 없다 check
모든항 ≥ 0

i) a_6이 2^{n-2}의 결과로 만들어졌다 가정 → $a_6 = 8$
이 때 $a_5 = -7$이므로 모순

ii) a_6이 $\log_2 a_n$의 〃 → $a_5 + \log_2 a_5 = 1$
이 때 $a_6 = \log_2 a_5$ $(a_5 \geq 1)$에서 $a_5 \geq 1$인데 $\log_2 a_5$는 $a_5 \geq 1$일때 $\log_2 a_5 \geq 0$이므로 $a_5 = 1$ 확정. $\therefore$ $a_5 = 1,\ a_6 = 0$

곧 a_5는 2^{n-2}의 결과물이 불가능하므로 $\log_2 a_4$로 만들어짐.
$\therefore$ $a_4 = 2$

문제는 $a_4 = 2$는 $\begin{cases} 2^{3-2} = 2 & (a_3 < 1) \\ \log_2 4 = 2 & (a_3 \geq 1) \end{cases}$ 모두 가능.

a_3

또 case 분류하자.
쉬운 $a_3 = 4$부터 보면, 4는 또 2^{n-2} 결과물 불가능 → $\log_2 a_2 = 4$
이런식으로 2의 거듭제곱꼴로 계속 반복 : $a_2 = 16,\ a_1 = 2^{16}$

이제 $a_3 < 1$인 경우를 보자.

$a_3 = p < 1$로 두면, 마찬가지로 p는 2^{n-2}의 결과물이 불가능하다.
따라서 $\log_2 a_2 = p$이고 $a_2 = 2^p$

마지막으로 $a_2 = 2^p$가 2^{n-2}의 결과물이라고 가정하면
$2^{1-2} = 2^p$이므로 $p = -1$인데 이는 모든 항이 양수라는 조건에 모순.
따라서 $\log_2 a_1 = 2^p$이고 $a_1 = 2^{2^p}$ $(a_1 \geq 1)$
이 때 p의 범위가 $0 \leq p < 1$이므로 $2 \leq a_1 < 4$
㉠ $\log_2 \dfrac{M}{m} = \log_2 \dfrac{2^{16}}{2} = \boxed{15}$

단답형

ㅋㅋ...

16. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \boxed{5}$

지수함수의 평행이동

17. 함수 $y = 4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$y = 4^x \xrightarrow[y \to a]{x \to 1} y = 4^{x-1} + a$

$\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 대입

$\therefore$ $2 + a = 5$이므로

㉠ $a = \boxed{3}$

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5$에서 $xf(x)-2x^3+1=5x^2+\square$

$\therefore xf(x)=2x^3+5x^2+\square$ 꼴.

$\Rightarrow f(x)=2x^2+5x+1\quad(\because f(0)=1)$

㉠ $f(1)=\boxed{8}$

위치 ↕ 속도 ↕ 가속도 } 관계!

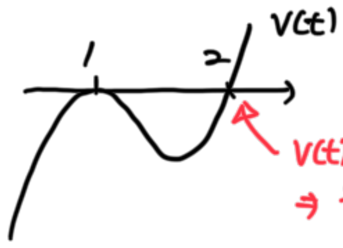
19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

운동방향이 바뀐다 ⇒ 속도의 부호변동

$\Rightarrow x'(t)=6t^3-24t^2+30t-12$
$=6(t^3-4t^2+5t-2)$
$=6(t-1)^2(t-2)$
$=v(t)$



v(t)의 부호변동점 ⇒ 운동방향 바뀐다.

㉠ $t=2$에서 P의 가속도

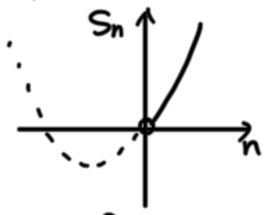
$v'(t)=18t^2-48t+30$
$=6(3t^2-8t+5)$
$=a(t)$

$a(2)=6\times1$
$=\boxed{6}$

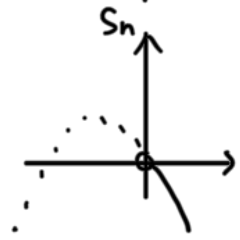
20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lvert S_m\rvert=\lvert S_{2m}\rvert=162$인 자연수 $m\,(m>8)$이 존재한다.

S_n은 상수항이 0인 이차함수꼴

i)


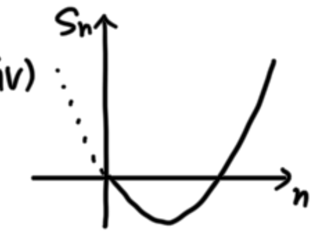
: 최솟값 존재 X

ii)


: 최솟값 존재 X

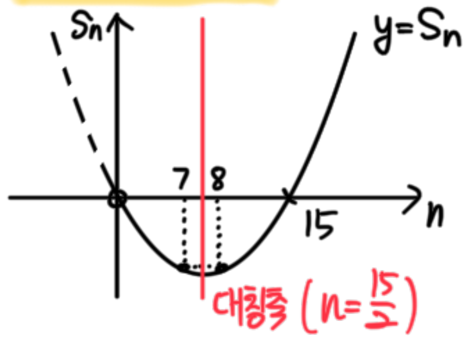
iii)


: 최솟값 존재 X

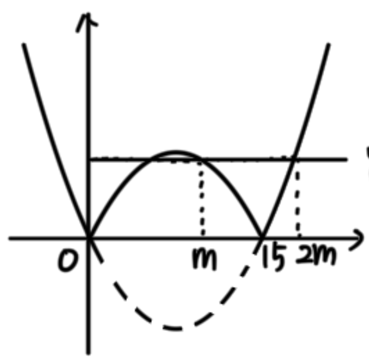
iv)


최솟값 존재 O

곧 $n=7, 8$에서 최솟값을 갖는 S_n은 이차함수의 대칭성에 의해 $(0,0)$, $(15,0)$을 지난다.



(나) 조건을 해석해보면 $m>8$ 이므로 $2m>16$ 이고, $m\ge15$ 이면 S_n은 증가함수이기 때문에 $|S_m|\neq|S_{2m}|$
곧 $8<m\le15$ 이고, 가능한 경우는 다음과 같다.



$\therefore y=S_n$은 $\begin{cases}(m,-162)\\(2m,162)\end{cases}$를 지난다.

$S_n=pn(n-15)$로 두면 $\begin{cases}S_m=pm(m-15)=-162\\S_{2m}=2pm(2m-15)=162\end{cases}$

$\Rightarrow pm=-\frac{162}{m-15}$에서 $(m\neq15)$ S_{2m}과 연립때리면 $m=9$

$\therefore S_n=3n(n-15)$

㉠ $a_{13}=S_{13}-S_{12}=\boxed{30}$

⊕ 도함수의 정적분 = 원함수의 함숫값 차!!

요즘 21번은 원주각이 패시브인 듯

원래함수와 도함수 자유자재로 넘나들 수 있어야 함

21. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

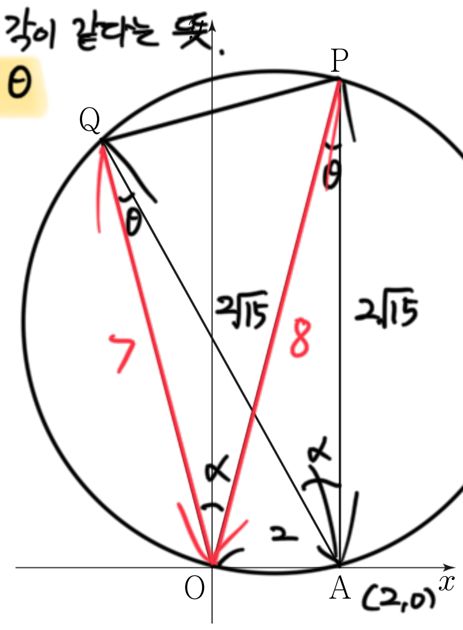
> (가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

cos값은 $0<\theta<\pi$ 에서 감소한다.

⇒ cos값이 같다는 것은 각이 같다는 뜻.

⇒ $\angle OPA=\angle OQA=\theta$



$\triangle OAQ$에서 cos Law

$\overline{OQ}=x$로 두면 $4=x^2+60-4\sqrt{15}\cos\theta\, x$

⇒ $x^2-15x+56=0$ 이므로 $x=7$ or 8

이 때 $\triangle OAQ$와 $\triangle OAP$ 모두 동일한 cos Law가 적용되므로

$\overline{OQ}=7$, $\overline{OP}=8$ ($\overline{OQ}<\overline{OP}$)

여기서 $\triangle OAP$의 외접원을 생각하면 $\angle OPA=\angle OQA=\theta$이서 이를 호 OA에 대한 원주각으로 생각가능 ⇒ 점 Q도 $\triangle OAP$의 외접원 위의 점.

⇒ $\angle QOP$와 $\angle QAP$ 모두 호 $\overline{PQ}$의 원주각이므로 $\angle QOP=\angle QAP=\alpha$

$\triangle OPQ$과 $\triangle APQ$에 동일한 cos Law를 적용하면

$7^2+8^2-2\times7\times8\times\cos\alpha=(2\sqrt{15})^2+(2\sqrt{15})^2-2\times2\sqrt{15}\times2\sqrt{15}\cos\alpha=\overline{PQ}^2$

이를 계산하면 $\cos\alpha=\dfrac{7}{8}$이다.

⊕ $\square OAPQ=\triangle OAP+\triangle OPQ$

$\frac{1}{2}\times7\times8\times\sin\alpha$

$=\frac{7}{2}\sqrt{15}$ ($\because \cos\alpha=\frac{7}{8}$이서 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$)

$\overline{OA}^2+\overline{AP}^2=\overline{AP}^2$ 이므로 직각△

⇒ $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{15}$

$=\sqrt{15}$

$\therefore \square OAPQ=\dfrac{7\sqrt{15}}{2}+\sqrt{15}$

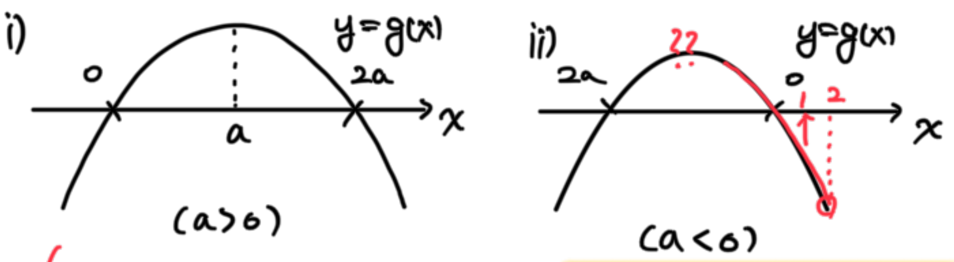
$=\dfrac{11\sqrt{15}}{2}$ 이므로 $pq=\boxed{22}$

22. 두 상수 a, $b\,(b\neq1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\displaystyle\int_0^x(-t+a)dt$이고
>
> $|x|\geq2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

(나) 조건에서 $|x|<2$일 때 $g(x)=-\frac{1}{2}x(x-2a)$



⇒ $g'(1)=0$이 불가능하므로 모순

$2a=2$일 때 $g'(1)=0$ 만족

왜? $a\leq2$이면

에서 $a=1$임.

$a>2$이면

에서 $g'(1)=0$ 불가능하므로 모순

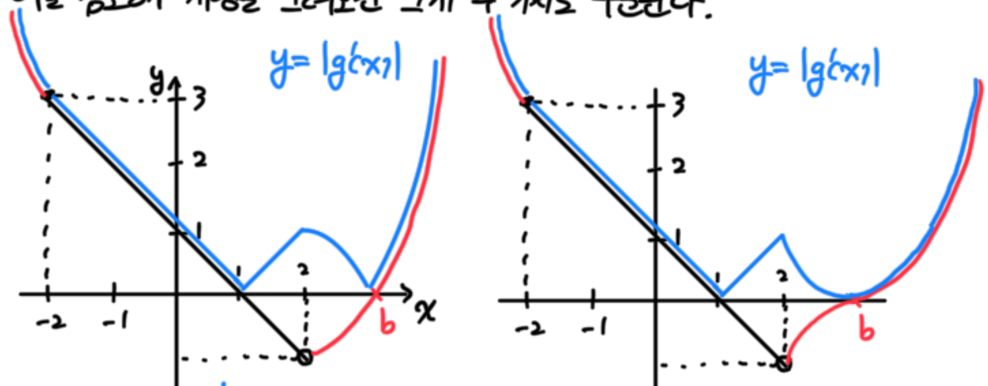
이제 $|x|\geq2$를 관찰해보자.

① $|g'(x)|=f(x)$에서 $f(x)$는 모든 실수에서 $f(x)\geq0$임을 알 수 있다.

⇒ $f(x)$의 최고차항 계수 양수

② $g(x)$는 $x=b$에서 극값을 가지므로 $g'(x)$는 $x=b$에서 부호변동

⇒ 이를 참고해 개형을 그려보면 크게 두 가지로 구분된다.



⇒ 이때  모양의 이차함수 f는 불가능

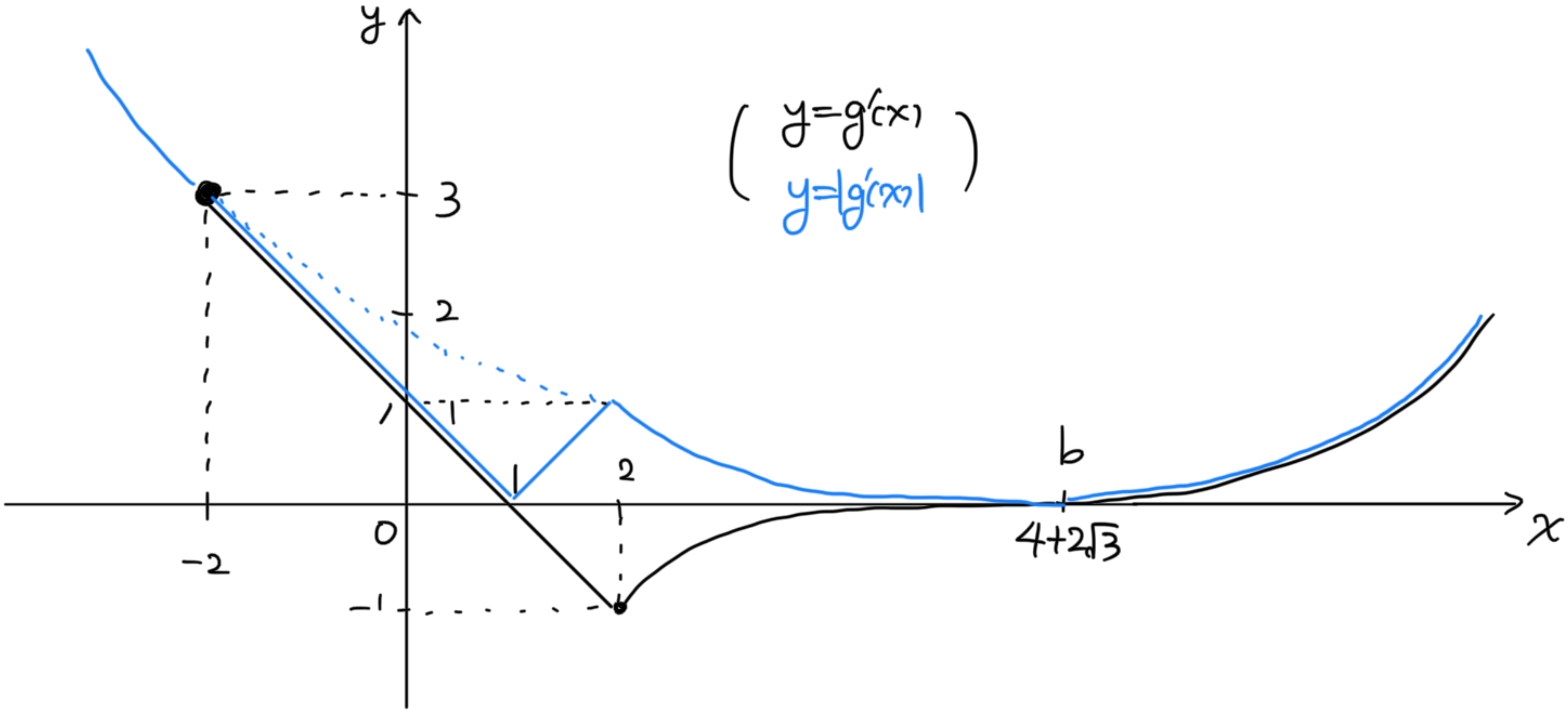
⇒ 어떻게 잘 $f(2)=1$, $f(-2)=3$이 되도록 상수를 조절하면 될 것 같다!

여백 문제로 다음 페이지에...

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

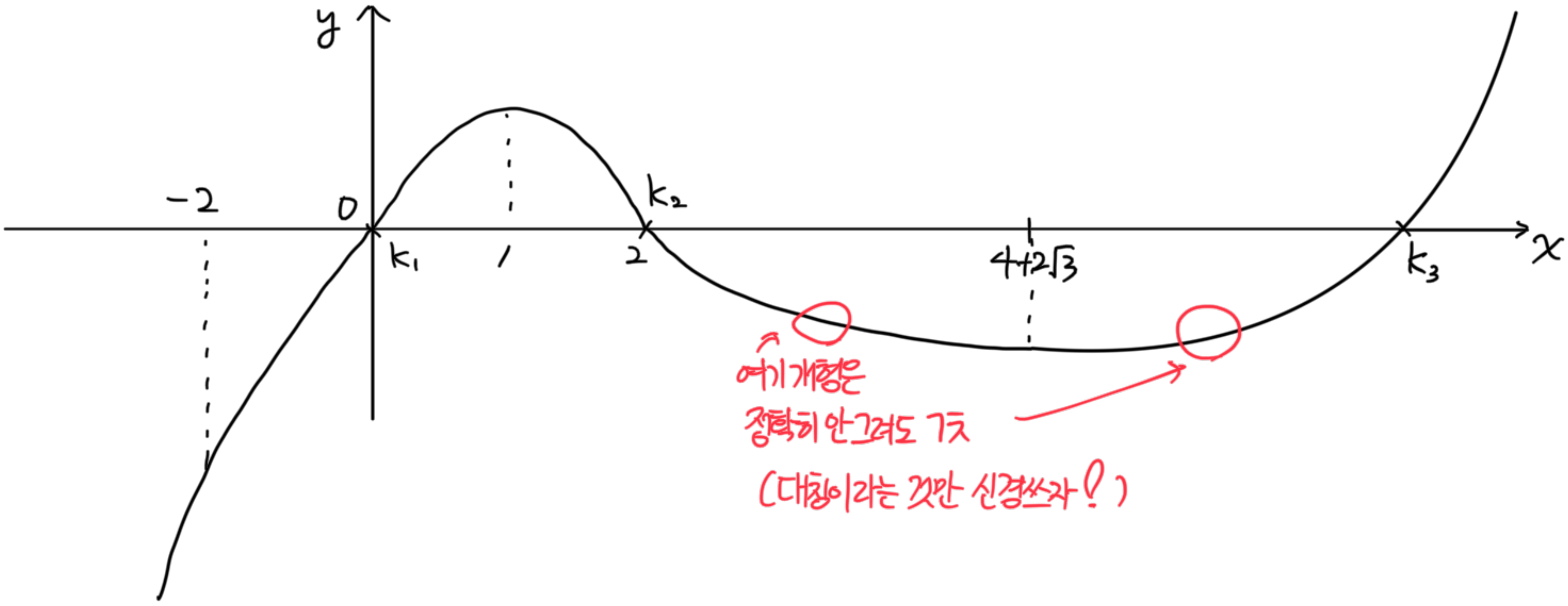


$f(x)=p(x-b)^2$으로 두면 $f(-2)=3$, $f(2)=1$에서

$$\begin{cases} p(-2-b)^2=p(2+b)^2=3 & \cdots ① \\ p(2-b)^2=1 & \cdots ② \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{①}{②}=\dfrac{(2+b)^2}{(2-b)^2}=3$ 이고, 이를 계산하면 $b=4+2\sqrt{3}$ ($\because b>2$)

곧 이를 가지고 $g(x)$를 그려보면



이 때, 중요한 것은 $f(x)$ 그래프가 $x=b$에 대칭이라는 것.

$\Rightarrow \left|\int_2^b g'(x)dx\right| = \left|\int_b^{k_3} g'(x)dx\right|$ 이다. ($\because$ 원함수의 함숫값 차 = 도함수의 정적분)

$\Rightarrow b=4+2\sqrt{3}$ 이므로 $x=2 \sim x=b$ 까지의 길이 : $2+2\sqrt{3}$

$\Rightarrow x=k_3 \sim x=b$ 까지의 길이도 $2+2\sqrt{3}$ 이므로 $k_3=(4+2\sqrt{3})+(2+2\sqrt{3})=6+4\sqrt{3}$

㉠ $k_1+k_2+k_3=0+2+6+4\sqrt{3}$
$=8+4\sqrt{3}$

$\therefore pq=\boxed{32}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

5지선다형

공식 외워야지 뭐

23. ${}_3\Pi_2 + {}_2H_3$의 값은? [2점]

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$
$${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$$
$$9+4=\boxed{13}$$

집합 입장에서 원소 뽑기 vs 원소 입장에서 들어갈 집합 고르기

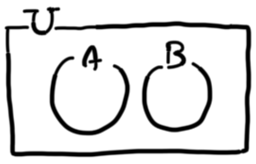
24. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=5,\ A\cap B=\varnothing$$

을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

① 168　② 174　③ 180　④ 186　⑤ 192

$A\cap B=\varnothing$
⇒ A와 B는 서로소



$(A\cup B)^c$에 들어갈 원소 1개 뽑는 경우의 수 : 6

원소마다 A 또는 B 선택가능 ⇒ 2^5

∴ $2^5\times 6=\boxed{192}$

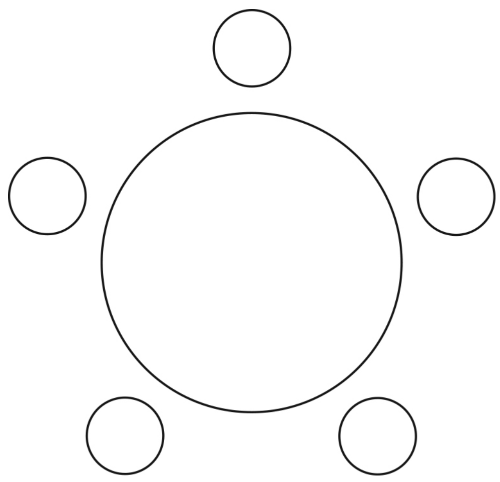
만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

수학 영역(확률과 통계)

아주 기본적인 원순열

25. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다. 이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168



A, B, C를 제외한 4명 중 2명을 뽑는 경우

$\Rightarrow {}_4C_2 = 6$

원순열 $(5-1)! = 4!$

$\therefore 6 \times 4! = \boxed{144}$

결국 조건이 "강하게" 들어가 있는 것 기준으로 case 분류

26. 방정식 $3x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

x기준으로 보자!

i) $x=1$

$y+z+w=8$ $(y \geq 1, z \geq 1, w \geq 1)$

$\Rightarrow y-1=y'$, $z-1=z'$, $w-1=w'$로 두면

$y'+z'+z'=5$ $(y' \geq 0, z' \geq 0, w' \geq 0)$

${}_3H_5 = {}_7C_2 = 21$

ii) $x=2$

$y+z+w=5$ $(y \geq 1, z \geq 1, w \geq 1)$

마찬가지 방법으로 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

iii) $x=3$

$y+z+w=2$ 는 불가능.

$\therefore 21+6 = \boxed{27}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

고1 수학이 갑자기? f(x) 계수 총합 = f(1) ~ 번외편: f(0) = 상수항

27. 양수 a에 대하여 $\left(ax-\dfrac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합이 1일 때, $\dfrac{1}{x}$의 계수는? [3점]

① 70 ② 140 ③ 210 ④ 280 ⑤ 350

f(x) 계수의 총합 : f(1)

$\left(ax-\frac{2}{ax}\right)^7$을 f(x) 처럼 생각하면 계수의 총합은 $\left(a-\frac{2}{a}\right)^7$이다.

$\Rightarrow \left(a-\frac{2}{a}\right)^7=1$ 에서 $a-\frac{2}{a}=1$

$\Rightarrow a^2-a-2=0$ 이므로 $a=2$ ($\because a>0$)

곧 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$ 항은

$${}_7C_3\cdot(2x)^3\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^4 = 35\cdot 8x^3\cdot\frac{1}{x^4}$$
$$=\frac{280}{x}$$

$\therefore$ ㉠ $\frac{1}{x}$의 계수 : $\boxed{280}$

열심히 조건해석 ⊕ 선택 ⊕ 나열

28. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 264 ② 268 ③ 272 ④ 276 ⑤ 280

1 1 2 2 2 3 3 4

2장의 곱 짝수 : 둘 중 하나만 짝수면 됨

$\Rightarrow$ 홀수는 모두 따로 떨어져 있어야 함

i) 홀수 4개 / 짝수 3개 뽑는 경우 $\Rightarrow$ 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀

① 1133222

∨ 2 ∨ 2 ∨ 2 ∨ 각각에 1, 1, 3, 3 배열 $\Rightarrow \frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

② 1133224

∨ 2 ∨ 2 ∨ 4 ∨ 각각에 1, 1, 3, 3 배열 × 2, 2, 4 자리바꾸기

$\Rightarrow \frac{4!}{2!\cdot 2!}\times 3 = 18$

ii) 홀수 3개 / 짝수 4개 뽑는 경우 $\Rightarrow$ ∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 짝 ∨

① 1132224

∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 짝 ∨ 홀수 들어갈 3곳 결정 × 홀수배열 × 짝수배열

$\Rightarrow {}_5C_3\times 3\times 4 = 120$

② 1332224 ①과 동일 $\Rightarrow$ 120

㉠ $120\times 2+24$
$=\boxed{264}$

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

단답형

열심히 써보시길 추천드립니다 ^^ 중복조합 쓰기엔 좀 귀찮음.

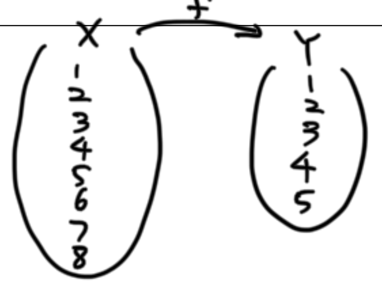
29. 두 집합

$$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(4)=f(1)+f(2)+f(3)$
> (나) $2f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

㉮ $10+105+408 = \boxed{523}$



결국 조건이 동시에 걸려있는 $f(4)$ 기준으로 생각!

i) $f(4)=3$ ($f(4)=1$ OR 2는 $f(1)+f(2)+f(3)\geq 3$ 에서 불가능)

$f(1)+f(2)+f(3)=3$
$1+1+1$ → 1가지

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=6$
$1+1+1+3$ → 자리 바꾸기 4가지
$1+1+2+2$ → 〃 $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$가지

10 → $10\times1=10$

ii) $f(4)=4$

$f(1)+f(2)+f(3)=4$
$1+1+2$ → 〃 3가지

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=8$
$1+1+1+5$ → 〃 4가지
$1+1+2+4$ → 〃 $\frac{4!}{2!}=12$가지
$1+1+3+3$ → 〃 $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$가지
$1+2+2+3$ → 〃 $\frac{4!}{2!}=12$가지
$2+2+2+2$ → 〃 1가지

35 → $3\times35=105$

iii) $f(4)=5$

$f(1)+f(2)+f(3)=5$
$1+1+3$ → 〃 3가지
$1+2+2$ → 〃 3가지
6

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=10$
$1+1+3+5$ → 〃 12가지
$1+1+4+4$ → 〃 6가지
$1+2+2+5$ → 〃 12가지
$1+2+3+4$ → 〃 24가지
$1+3+3+3$ → 〃 4가지
$2+2+2+4$ → 〃 4가지
$2+2+3+3$ → 〃 6가지

68 → $6\times68=408$

조건이 이것저것 들가있어서 주관식 특성상 실수할 확률 개높은듯??

30. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

> (가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.
> (나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, $baaacca$, $ccbbaaa$는 조건을 만족시키는 문자열이고 $aabbcca$, $aaabccc$, $ccbaaaa$는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. [4점]

당연히 a 개수따라 case 분류.

i) $\boxed{a\ 5개}$

aaaaabb
- aaa/aa → ˇbˇbˇ 에 배열 → ${}_3P_2=6$
- aaa/a/a → ˇbˇbˇ 에 배열 → 3

9개

cc → bb랑 동일 : 9개

bc → bb랑 동일하지만 b와 c 순서바꾸는 경우 2가지
→ $9\times2=18$개

⇒ $18+9+9=36$

ii) $\boxed{a\ 4개}$

aaaabbb → aaa/a → ˇbˇbˇbˇ 에 배열 → ${}_4P_2$ 에서
주의! aaa과 a가 모두 양끝에 오면 aaabbba 처럼 b 3개 연속
⇒ aaabbba, abbbaaa 2가지 빼주면 ${}_4P_2-2=10$개

ccc → bbb랑 동일 : 10개

bbc → bbb랑 동일하지만 b, b, c 순서바꾸는 경우 3가지
⊕ 동일한 문자 3개가 a 외에 존재하지 않아 주의! 파트를 고려할 필요 X → $3\times{}_4P_2=36$개

bcc → bbc와 동일 : 36개

⇒ $10\times2+36\times2=92$

iii) $\boxed{a\ 3개}$

aaabbbb → aaa를 한 묶음 A로 생각하면 Abbbb를 배열
→ b가 3개 이상 이웃하지 않게 배열 : bbAbb 1개

cccc → bbbb와 동일 : 1개

bbbc → Abbbc를 배열하는 경우 − ABc를 배열하는 경우 (B=bbb) : $\frac{5!}{3!}-3!=14$개

bccc → bbbc와 동일 : 14개

bbcc → Abbcc를 배열하면 됨 : $\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$개

⇒ $1\times2+14\times2+30=60$

㉮ $36+92+60=\boxed{188}$

※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

제 2 교시

5지선다형

부정형 그 이상 그 이하도 X

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

주어진 값은 ∞ − ∞ 꼴이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2+1})(\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1})}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+3n)-(4n^2+1)}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

초월함수 미분 ⊕ 곱의 미분

24. 함수 $f(x)=e^x(2\sin x+\cos x)$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$f'(x)=e^x(2\sin x+\cos x)+e^x(2\cos x-\sin x)$$

$$=e^x(\sin x+3\cos x)$$

$$\therefore f'(0)=\boxed{3}$$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수면제, 오르비: 한석원의눈물

급수가 수렴? 일반항 극한값 0

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

급수가 수렴: $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}=2$로 수렴하므로

수렴하는 극한값의 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

곧 ㉠ $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+10}{1}$

$=\boxed{12}$

로피탈 써도 상관없긴 함

26. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=2\log_b x$에 대하여

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}=0$

일 때, $a\times b$의 값은? (단, a와 b는 1보다 큰 상수이다.) [3점]

① $e^{\frac{1}{e}}$ ② $e^{\frac{2}{e}}$ ③ $e^{\frac{3}{e}}$ ④ $e^{\frac{4}{e}}$ ⑤ $e^{\frac{5}{e}}$

분모 = 0 이므로 극한값이 존재하려면 분자 = 0

$\therefore f(e)=g(e)$

곧, $a^e=2\log_b e=\frac{2}{\ln b}$ 이다.

또한 $f(e)=g(e)$ 이므로 식을 $\lim_{x\to e}\frac{(f(x)-f(e))-(g(x)-g(e))}{x-e}$

으로 변형하면 f와 g 모두 미분가능한 함수이므로 $f'(e)-g'(e)$가

된다. $\therefore f'(e)=g'(e)$

곧, $f'(x)=a^x\ln a$, $g'(x)=\frac{2}{x\ln b}$ 에서 $a^e\ln a=\frac{2}{e\ln b}$ 이다.

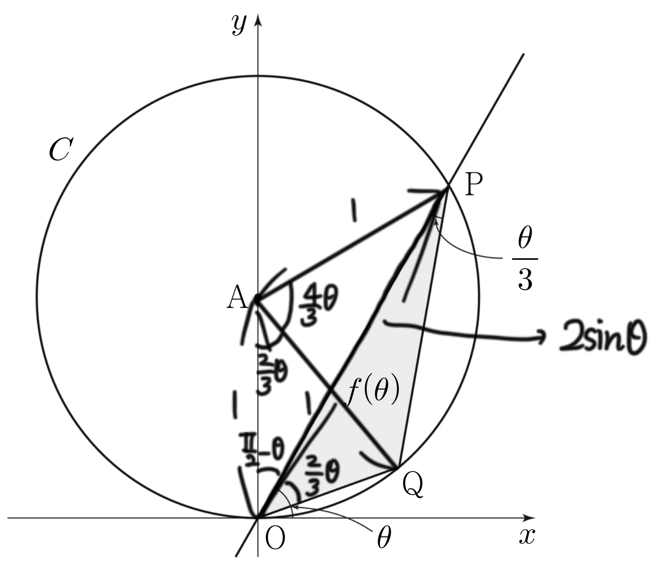
$\begin{cases} a^e=\frac{2}{\ln b} \\ a^e\ln a=\frac{2}{e\ln b}\end{cases}$ 를 연립하면 $\ln a=\frac{1}{e}$ 이고, $a=e^{\frac{1}{e}}$이다.

$\therefore a=e^{\frac{1}{e}}$, $b=e^{\frac{2}{e}}$ 이므로 ㉠ $ab=\boxed{e^{\frac{3}{e}}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

허구한 날 원주각 ㅠㅠ

27. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A$(0, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 원 C와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 호 OP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{OPQ} = \frac{\theta}{3}$가 되도록 잡는다. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, 점 Q는 제1사분면 위의 점이고, $0 < \theta < \pi$이다.) [3점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

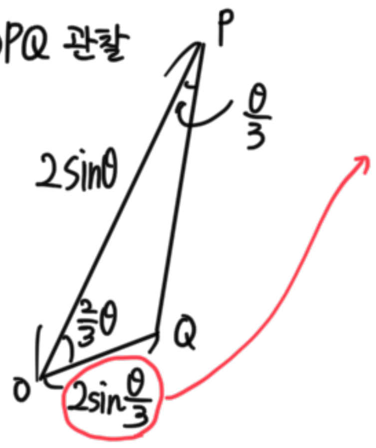
△OAP 관찰

그림에서 △OAP는
⇒ $\overline{OA} = \overline{AP} = 1$ 인 이등변△이고
$\angle AOP = \angle APO = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로
$\angle OAP = 2\theta$ ∴ $\overline{OP} = 2\sin\theta$

$\overline{AQ}$를 그으면 $\angle OPQ$는 호 OQ의 원주각 ⇒ $\angle OAQ$는 중심각
∴ $\angle OAQ = 2\angle OPQ = \frac{2}{3}\theta$ 이고, $\angle OAP = 2\theta$ 이므로 $\angle PAQ = \frac{4}{3}\theta$

마찬가지로, $\angle PAQ$는 호PQ에 대한 중심각으로 생각할 수 있고
곧 $\angle POQ$는 그것의 절반인 $\frac{2}{3}\theta$ 이다.

⇒ △OPQ 관찰



∵ △OAQ 관찰하면

(물론 $2\sin\frac{\theta}{3}$를 구할때 △OPQ에서 sin Law 사용해도 가능)

㉮ $f(\theta) = \frac{1}{2} \times 2\sin\theta \times 2\sin\frac{\theta}{3} \times \sin\frac{2}{3}\theta = 2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{2\sin\theta\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta^3} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

28번 맞음? 대충 풀면 쉬운데 논리적으로 완벽히 풀기가 좀 빡셈.

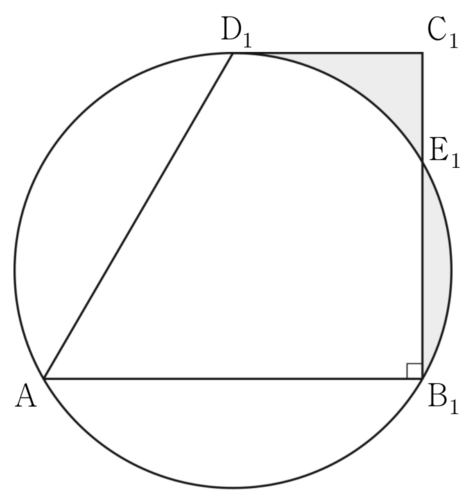
28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}} = 1$이고 $\angle \mathrm{C_1B_1A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 세 점 A, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{E_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{C_1E_1}$과 호 $\mathrm{E_1D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{B_1E_1}$과 호 $\mathrm{B_1E_1}$로 둘러싸인 부분인 ⌉ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

→ $\overline{AB_1} \,//\, \overline{C_1D_1}$ 이므로 $\angle B_1C_1D_1 = \frac{\pi}{2}$!

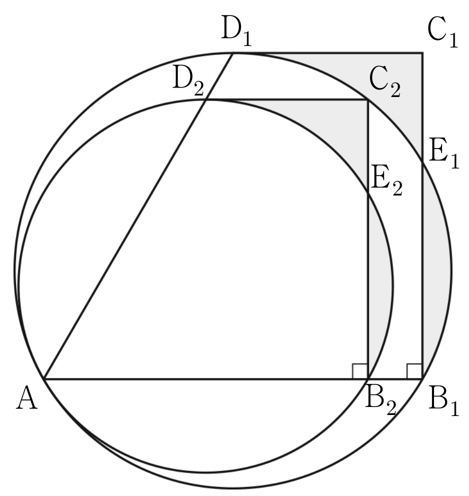
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{E_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{B_2C_2}} : \overline{\mathrm{C_2D_2}} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle \mathrm{C_2B_2A} = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 $\mathrm{E_2}$를 잡고, 사다리꼴 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 ⌉ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



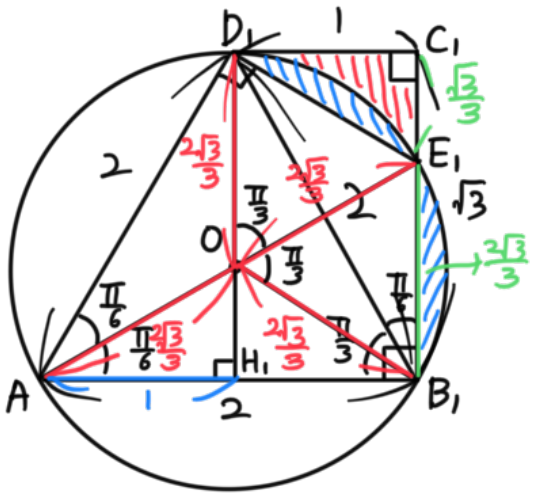
R_2



⋮ ⋮

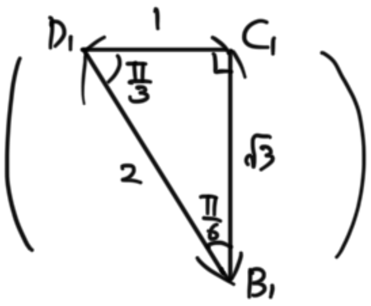
① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$ ④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

여백 문제로 다음 페이지에…



STEP 1) 초항 구하기

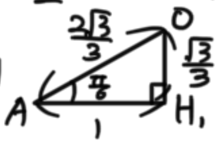
$\triangle B_1C_1D_1$ 에서 $\overline{C_1D_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{B_1D_1}=2$



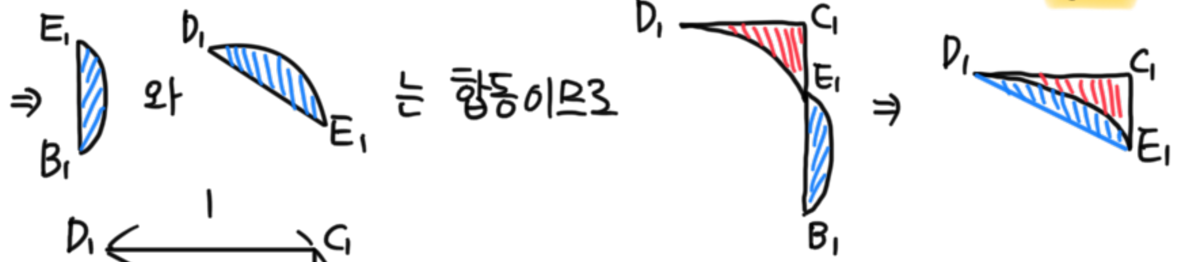
$\angle AB_1D_1 = \frac{\pi}{2} - \angle C_1B_1D_1 = \frac{\pi}{3}$

$\overline{AB_1} = \overline{B_1D_1} = 2$ 이고, $\angle AB_1D_1 = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\triangle AB_1D_1$ 는 정$\triangle$

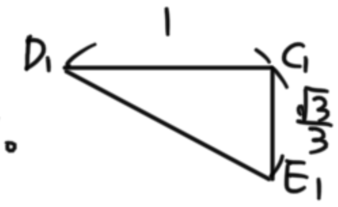
또한, $\angle AB_1E_1 = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{AE_1}$ 는 원의 지름이고, 곧 원의 중심은 $\overline{AE_1}$ 의 중점이다.

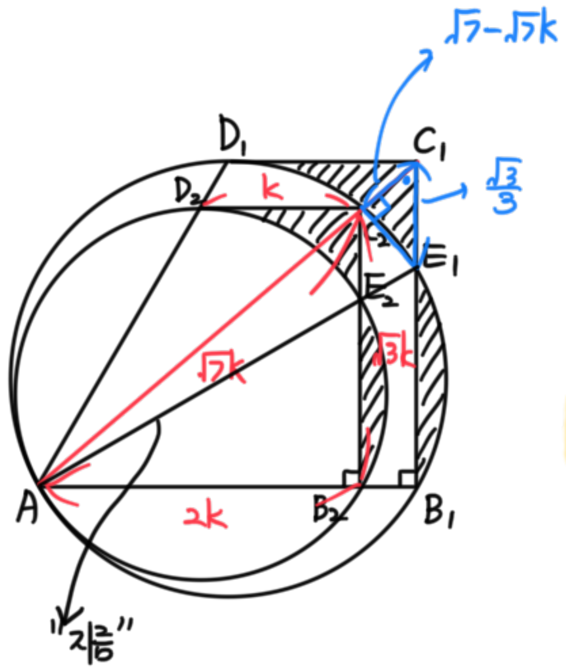
$\triangle OAH_1$ 에서  이고, 곧 원의 반지름 $\overline{OA}=\overline{OB_1}=\overline{OD_1}=\overline{OE_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

곧 각도 (OR 길이) 계산하면 부채꼴 OD_1E_1 와 OE_1B_1 는 합동. (중심각 $\frac{\pi}{3}$)



$\Rightarrow$ 와 는 합동이므로 $\Rightarrow$

$\therefore$  넓이: $\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ $\longrightarrow$ 초항



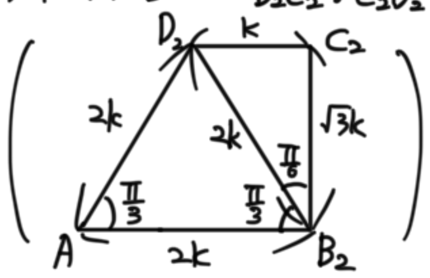
STEP 2) 공비 구하기

물론 시험장에선 시간이 없으니 이렇다 싶으면 그냥 ㄱㄱ

그림에서는 점 A, C_2, C_1가 한 직선 위의 점인 것처럼 보이지만, 실제로 그런지 확인필요!

$\Rightarrow$ 조건에서 점 D_2는 $\overline{AD_1}$ 위의 점, 점 B_2는 $\overline{AB_1}$ 위의 점이고 $\overline{B_2C_2}:\overline{C_2D_2}=\sqrt{3}:1$ 이므로

$\overline{B_2C_2}=\sqrt{3}k$, $\overline{C_2D_2}=k$로 두면 $\overline{B_2D_2}=2k$이다.



$\Rightarrow \angle C_2B_2D_2=\frac{\pi}{6}$ 이므로 $\angle AB_2D_2=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \angle B_2AD_2=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\triangle AB_2D_2$는 정$\triangle$

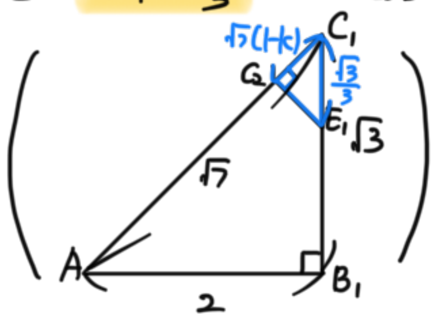
$\Rightarrow \overline{AB_2}=2k$이고, $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=\overline{AB_1}:\overline{B_1C_1}=2:\sqrt{3}$ 이므로 점 C_2는 $\overline{AC_1}$ 위의 점.

이때, $\overline{C_2E_1}$을 그어보면 $\overline{AE_1}$가 원의 지름임을 알고 있기에 $\angle AC_2E_1=\frac{\pi}{2}$이다. (원주각)

곧 $\angle C_1C_2E_1=\frac{\pi}{2}$이고, $\triangle C_1C_2E_1$은 $\triangle C_1B_1A$와 닮음이다. ($\because$ 공통각 AC_1B_1 존재)

$\overline{AC_1}=\sqrt{7}$, $\overline{AC_2}=\sqrt{7}k$ 에서 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{7}(1-k)$임을 알고 $\overline{C_1E_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 닮음비를 이용하면

$\frac{\sqrt{3}}{3}:\sqrt{7}(1-k)=\sqrt{7}:\sqrt{3}$ $\quad\therefore k=\frac{6}{7}$



곧 길이비가 $1:k=1:\frac{6}{7}$ 이므로 넓이비는 $1:\frac{36}{49}$ $\quad\therefore$ 공비 $=\frac{36}{49}$

⑦ $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{36}{49}}=\boxed{\frac{49}{78}\sqrt{3}}$

만든 놈: crazy_hansudcwon

수만휘, 오르비: 한석원의눈물

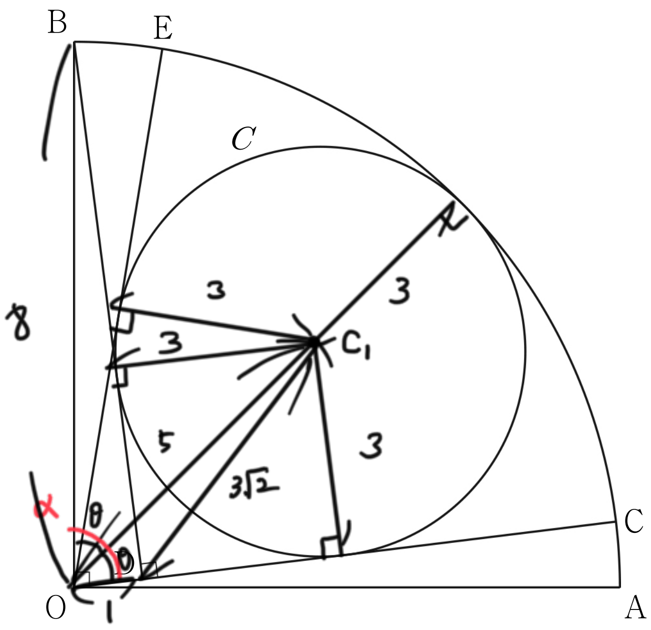
만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

이번 미적 킬러 난이도 좀 애매한데 ... 차근차근 해봅시다

단답형

△OC_1D를 얼마나 빠르게 찾는지가 관건!

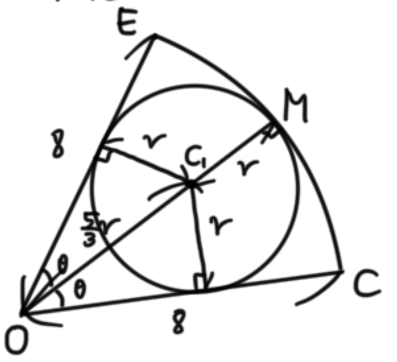
29. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 선분 BD, CD와 호 BC에 동시에 접하는 원을 C라 하자. 점 O에서 원 C에 그은 접선 중 점 C를 지나지 않는 직선이 호 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\cos(\angle\mathrm{COE})=\frac{7}{25}$이다.
$\sin(\angle\mathrm{AOE})=p+q\sqrt{7}$일 때, $200\times(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이고, 점 C는 점 B가 아니다.) [4점]



STEP 1)

원과 접선 등장 → 당연히 중심과 연결!

부채꼴 OCE를 중심으로 보라.



부채꼴 OCE의 반지름은 부채꼴 OAB와 동일하므로 8이고, 중심을 점 C_1으로 하는 원이 중심을 점 M으로 하는 원에 내접하는 형태이므로 점 O, 점 C_1, 점 M은 한 직선 위에 있다.

이 때, $\cos(\angle COE)=\frac{7}{25}$이므로 $\angle COE$를 2θ,
즉 $\angle C_1OC=\angle C_1OE=\theta$로 두면

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$
$=2\cos^2\theta-1=\frac{7}{25}$ 이므로 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$

곧 그림에서 중심이 C_1인 원의 반지름을 r로 두면
$\overline{C_1M}=r$이고 $\overline{OC_1}=\frac{5}{3}r$이므로 $\frac{8}{3}r=8$ (반지름)

$\therefore r=3$

나머지는 여백 문제로 다음 page에

30. $x\geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0\leq x\leq 1) \\ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x\leq 2)\end{cases}$

$\rightarrow f'(x)=2^x\ln 2$
$\rightarrow f'(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\ln 2$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

$x>0$에서 정의된 함수 $g(x)$를

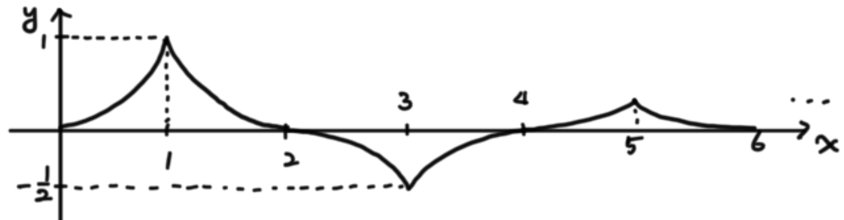
$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=\frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가), (나)에 의해 $f(x)$를 그려보면



$g(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=f'(x+)+f'(x-)$으로 이해할 수 있다.

즉, x를 기준으로 각 $f(x)$의 우미분계수와 좌미분계수를 더한 값 : $g(x)$

이 때, $\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)$를 모든 "자연수" n에서 관찰하는 것이 문제이므로 $n=$홀수, $n=$짝수로 case 분류해보자.

i) n이 홀수 ($2k-1$ 꼴)

① $\lim_{t\to 0+}g(n+t)$은 n의 우극한이므로 그냥 에서의 우미분계수와 좌미분계수를 더하면 된다. ⇒ $g(n+t)$는 첨점, 즉 $x=n$을 포함X 곧 미분가능한 함수의 좌미계+우미계이므로 $2\boxed{f'(n)}$로 계산가능.
n을 기준으로 오른쪽에 위치하는 f (이하 f_2)

② $\lim_{t\to 0+}g(n-t)$은 n의 좌극한이므로 그냥 에서의 우미계+좌미계 ⇒ 동일한 논리로 $2\boxed{f'(n)}$로 계산가능
n을 기준으로 왼쪽에 위치하는 f (이하 f_1)

③ $g(n)$은 n을 기준으로 좌미분계수+우미분계수를 구하면 되는데 $f(x)$가 $x=n$에 대해 선대칭이므로 미분계수는 절댓값 같고 부호반대 → 우미계+좌미계 $=0$
$\therefore g(n)=0$

이때 ③에서 적용한 논리로 ①과 ② 각각의 $f'(n)$또한 더하면 0임을 알 수 있다.

※ 확인 사항 $\therefore f_1'(n)=-f_2'(n)$이므로 $2f_2'(n)-2f_1'(n)=4f_2'(n)$
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. 곧 $\lim_{t\to 0+}\{g(n+t)-g(n-t)\}+2g(n)=2f_2'(n)-2f_1'(n)+2\cdot 0$
○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오. $=4f_2'(n)$

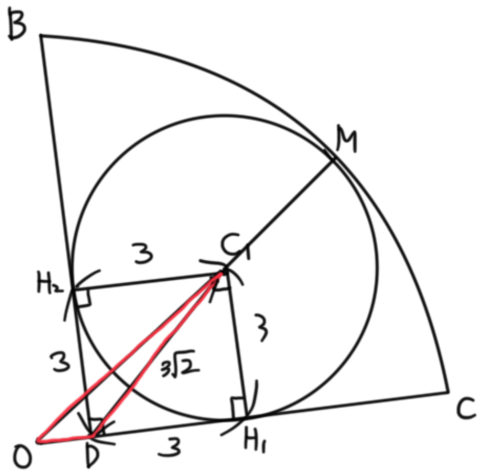
이하 다음 page

29번 이어서

만든 놈 : ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

STEP 2)

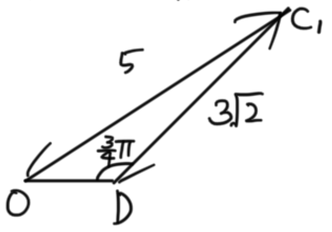
이번에는 접선 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$를 중심으로 보자.



$\angle BDC = \frac{\pi}{2}$이므로 $\square C_1H_1DH_2$는 정사각형이고,

$\overline{C_1D} = 3\sqrt{2}$임을 알 수 있다. ($\because$ 정사각형의 대각선)

이때 $\triangle OC_1D$를 관찰하면



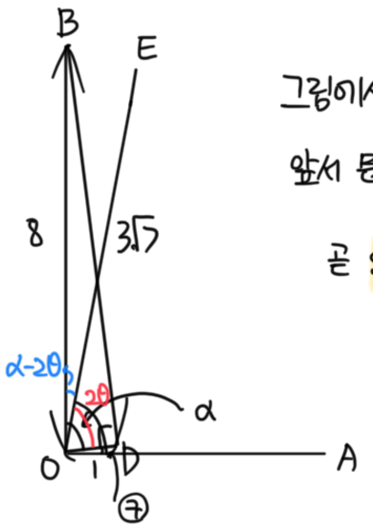
이므로 ($\because \angle ODC_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$)

$\cos$ Law를 적용하면 $5^2 = \overline{OD}^2 + 3^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times \overline{OD} \cos\frac{3}{4}\pi$

$\therefore \overline{OD} = 1$ 이다.

STEP 3)

$\triangle OBD$를 중심으로 보면



그림에서 $\angle BOD = \alpha$로 두면 $\cos\alpha = \frac{1}{8}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ 인데

앞서 문제 조건에서 $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ 이므로 $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$ 이고

곧 $\sin(\angle AOE) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - 2\theta)\right) = \cos(\alpha - 2\theta)$

$$\therefore \cos(\alpha - 2\theta) = \cos\alpha\cos 2\theta + \sin\alpha\sin 2\theta$$
$$= \frac{1}{8} \times \frac{7}{25} + \frac{3\sqrt{7}}{8} \times \frac{24}{25}$$
$$= \frac{7 + 72\sqrt{7}}{200}$$

㉠ $200(p+q) = 7 + 72$
$= \boxed{79}$

30번 이어서

앞에서도 계속 " ′ "이라는 기호를 써왔지만, 원래는 미분계수가 아니므로 " ′ "를 사용하면 안되지만 편의상... 우미계정도로 이해 ㄱㄱ 앞에다 써주려고 했는데 여백 문제가 ㅠㅠ

앞 page 에서

2^x-1의 꼴을 한 $f(x)$: $f_1(x)$

$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$의 꼴을 한 $f(x)$: $f_2(x)$

으로 두었을 때 n=홀수이면 $\lim_{t\to0+}\{g(n+t)+g(n-t)\}+2g(n)=4f_2'(n)$임을 구했다.

이때 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$ 이므로 구간이 오른쪽으로 2만큼 갈때마다 함숫값 $-\frac{1}{2}$배 → 미분계수도 $-\frac{1}{2}$배

$n=1$일때 $4f_2'(n)=f_2'(1)=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2}\ln2$

$=-8\ln2$

$n=3$일때 $4f_2'(n)=-8\ln2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$n=5$일때 $4f_2'(n)=-8\ln2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

⋮

$n=2k-1$일때 $4f_2'(n)=-8\ln2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ (k는 자연수)

$\therefore$ $-8\ln2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{\ln2}{2^{24}}$ 를 만족하는 $k=28$이고 그 때의 n : 55

ii) n이 짝수 ($2k$ 꼴)

동일한 논리로 생각해보자.

쉬운 예로, $n=2$를 생각해보면

$$f(x)=\begin{cases}4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1 & (1<x\le2)\cdots f_1(x)\\ -\frac{1}{2}(2^{x-2}-1) & (2<x\le3)\cdots f_2(x)\end{cases}$$

인데,

$$\begin{cases}\lim_{t\to0+}g(2+t)=2\times f_2'(2)\\ \lim_{t\to0+}g(2-t)=2\times f_1'(2)\\ 2g(2)=2(f_1'(2)+f_2'(2))\end{cases}$$

이다.

다시 한 번 말씀드리지만, $f_2'(2)$ 등과 같은 표기는 수학적으로 틀린 표현입니다 ^^...
$f_1'(2)$는 $x=2$에서의 좌미계, $f_2'(2)$는 $x=2$에서의 우미계 정도로 이해해주세요

곧 $f_1'(x)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\ln2$

$f_2'(x)=-\frac{1}{2}2^{x-2}\cdot\ln2$

$=-2^{x-3}\ln2$

$\Rightarrow \lim_{t\to0+}\{g(2+t)+g(2-t)\}+2g(2)$

$=4(f_1'(2)+f_2'(2))$

$=4(\ln2-\frac{1}{2}\ln2)$

$=2\ln2$

㉠ 구하는 모든 n은 52, 55 이므로

합 : $52+55=\boxed{107}$

마찬가지로, 구간이 2만큼 오른쪽으로 갈 때마다 함숫값이 $-\frac{1}{2}$배 → 미분계수도 $-\frac{1}{2}$배

$n=2$일때 $2\ln2$

$n=4$일때 $2\ln2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

⋮

$n=2k$일때 $2\ln2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ (k는 자연수)

$\therefore$ $2\ln2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{\ln2}{2^{24}}$ 를 만족하는 $k=26$이고 그 때의 n : 52

만든 놈 : ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

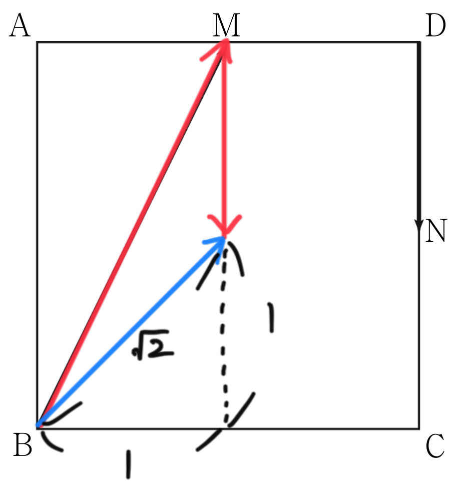
수학 영역(기하)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수면회, 오르비 : 한석원의눈물

5지선다형

그저 벡터의 기본 : 벡터는 시작 → 끝 위치관계가 중요!

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 선분 AD, CD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}|$의 값은? [2점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

그림에서 $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}$은 ↗ 와 같고,

그 길이는 $\boxed{\sqrt{2}}$이다.

쌍곡선의 점근선 방정식?

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $2\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{11}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1$ 의 점근선 방정식 : $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{a}x$

$\therefore$ $a=2$ $(a>0)$

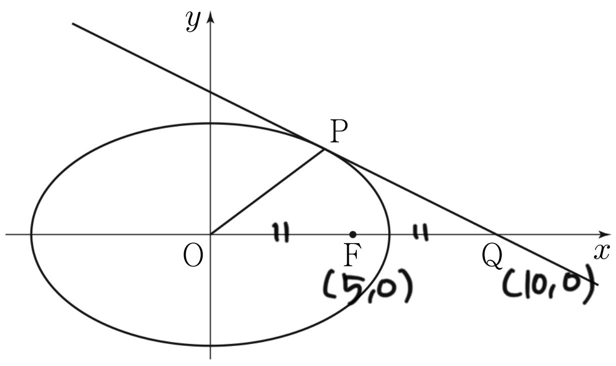
구) 두 초점 사이의 거리: $2\times\sqrt{a^2+8}$

$=\boxed{4\sqrt{3}}$

만든 놈 : ⓞ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

타원의 접선의 방정식 기본문제!

25. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 타원 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{OF}=\overline{FQ}$일 때, 삼각형 POQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]



① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

F좌표 : $F(\sqrt{40-25}, 0)$

$= F(5,0)$ 이고, $\overline{OF}=\overline{FQ}$ 이므로 $Q(10,0)$

$P(x_1, y_1)$로 두면 점 P 위에서의 접선의 방정식

$\Rightarrow \frac{xx_1}{40}+\frac{yy_1}{15}=1$ 이 $(10,0)$을 지난다.

$\therefore$ $x_1=4$ 이고, 곧 이를 타원의 방정식에 대입하면 $y_1=3$

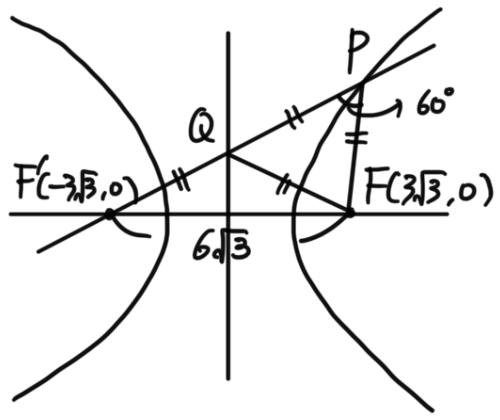
㉠ $\triangle POQ = \frac{1}{2}\times 10\times 3$

$= \boxed{15}$

이차곡선 : 정의 중요!

26. 두 초점이 $\mathrm{F}(3\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F}'(-3\sqrt{3}, 0)$인 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF′이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PQF가 정삼각형일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

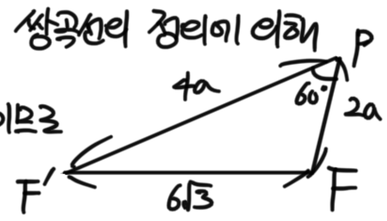


쌍곡선의 정의 이용

우선 점 Q는 y축 위의 점이므로 $\overline{F'Q}=\overline{FQ}$ 이고,

주축의 길이를 2a로 두면 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{F'P}-\overline{FP}=2a$ 이므로



이다.

Cos Law 사용

$(6\sqrt{3})^2=(4a)^2+(2a)^2-2\times 4a\times 2a\cos 60^\circ$

$\Rightarrow a=3$

㉠ $2a=\boxed{6}$

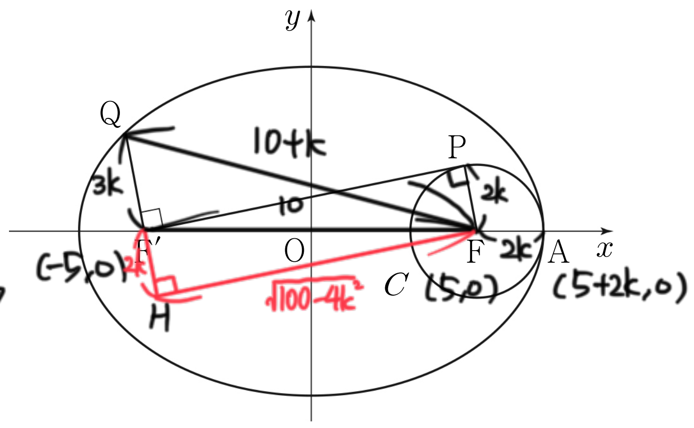
만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

PF // QF' 생각 못하면 좀 곤란할 수도 있음

27. 그림과 같이 두 점 F$(5, 0)$, F$'(-5, 0)$을 초점으로 하는 타원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 점 F를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 y좌표가 양수인 점 P와 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 PF'은 원 C에 접한다. (나) 두 직선 PF', QF'은 서로 수직이다.

$\overline{\mathrm{QF'}} = \frac{3}{2}\overline{\mathrm{PF}}$일 때, 이 타원의 장축의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{AF}} < \overline{\mathrm{FF'}}$) [3점]



이 그림 참고

① $\frac{25}{2}$ ② 13 ③ $\frac{27}{2}$ ④ 14 ⑤ $\frac{29}{2}$

<sol1> 보조선을 생각해낸다면?

(가) 조건에 의해 $\angle FPF' = \frac{\pi}{2}$이고, 곧 (나) 조건의 엇각의 크기가 같으므로 $\overline{PF} // \overline{QF'}$

$\overline{QF'} = \frac{3}{2}\overline{PF}$이므로 계산의 편의를 위해 $\overline{QF'} = 3k$, $\overline{PF} = 2k$로 두면

$\overline{FA} = 2k$이고, 곧 $A(5+2k, 0)$이다.

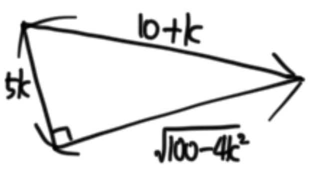
곧 장축의 길이 $= 2(5+2k)$이므로 $\overline{QF'} + \overline{QF} = 10+4k$에서

$\overline{QF} = 10+k$이다.

이때 $\overline{QF'}$에서 F' 방향으로 길이 $2k$인 연장선 $\overline{F'H}$을 그으면

□F'HFP는 직사각형이다.

⇒ $\overline{FF'} = 10$이므로 $\overline{HF} = \sqrt{100-4k^2}$이고,



에서

피타고라스 정리를 적용하면 $(5k)^2 + (\sqrt{100-4k^2})^2 = (10+k)^2$

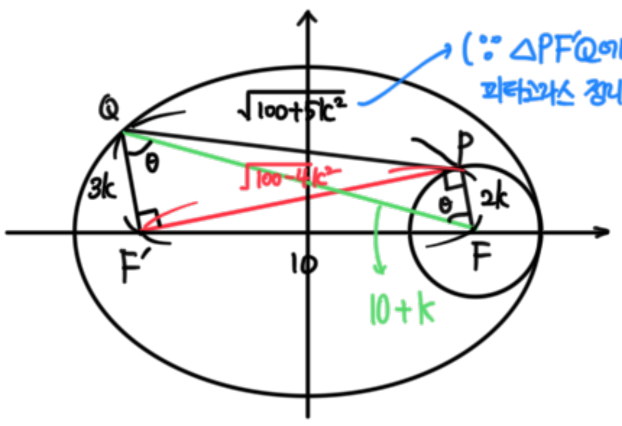
$= 20k(k-1) = 0$

$\therefore k = 1$ $(k>0)$

곧 ㉠ 장축의 길이 $10+4k = \boxed{14}$

<sol2> 보조선 떠올리지 못했을 때

길이 정보는 대충 다 알아냈다고 하고 시작하자.



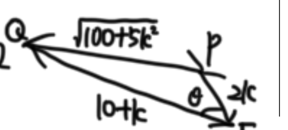
$\overline{PF} // \overline{QF'}$이므로

$\angle PFQ = \angle FQF' = \theta$ (엇각)

곧 △PFQ, △FQF'에서

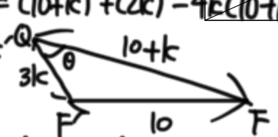
cos Law 각각 적용가능

① △PFQ



⇒ $100+5k^2 = (10+k)^2 + (2k)^2 - 4k(10+k)\cos\theta$

② △FQF'



⇒ $100 = (3k)^2 + (10+k)^2 - 6k(10+k)\cos\theta$

정리하면 $k=1$!

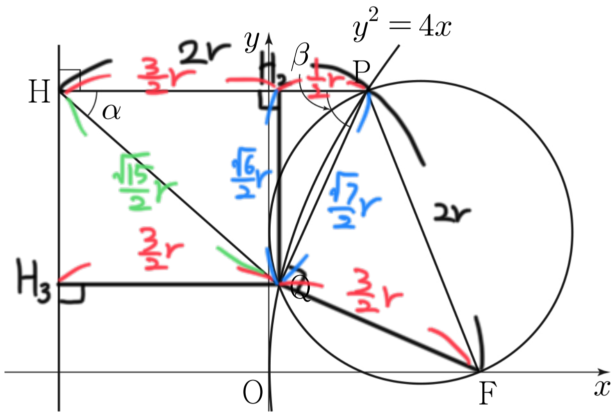
도형은 뭔가 가능해보이는데 막상 정리 말고는 별거 없음

28. 초점이 F인 포물선 $C : y^2 = 4x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 선분 PF를 지름으로 하는 원을 O라 할 때, 원 O는 포물선 C와 서로 다른 두 점에서 만난다. 원 O가 포물선 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q, 점 P에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle QHP = \alpha$, $\angle HPQ = \beta$라 할 때, $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 3$이다.

$\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? [4점]

① $\frac{4\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{3\sqrt{11}}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{102}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{105}}{7}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{7}$



$\overline{PF}$가 지름이라는데 주목!

⇒ 원 O의 반지름을 r로 두면 $\overline{PF} = 2r$이고 $\angle PQF = \frac{\pi}{2}$이다.

$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 3$ 조건을 해석하기 위해 점 Q에서 $\overline{PH}$에 수선의 발을 내리고

그 점을 H_2로 두면 $\tan\alpha = \frac{\overline{H_2Q}}{\overline{HH_2}}$, $\tan\beta = \frac{\overline{H_2Q}}{\overline{PH_2}}$에서

$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\frac{\cancel{\overline{H_2Q}}}{\overline{PH_2}}}{\frac{\cancel{\overline{H_2Q}}}{\overline{HH_2}}} = \frac{\overline{HH_2}}{\overline{PH_2}} = 3$이고, 포물선의 정의에 의해

$\overline{PF} = \overline{PH} = 2r$이므로 $\overline{HH_2} = \frac{3}{2}r$, $\overline{PH_2} = \frac{1}{2}r$이다.

이때 점 Q에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H_3으로 두면

$\overline{HH_2} = \overline{QH_3} = \frac{3}{2}r$이고, 포물선의 정의에 의해 $\overline{FQ} = \frac{3}{2}r$이다.

곧 △PQF에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{7}}{2}r$이고,

차례대로 $\overline{QH_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}r$, $\overline{QH} = \frac{\sqrt{15}}{2}r$이다. (전부 피타고라스 정리 순차적용)

㉠ $\frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}r}{\frac{\sqrt{7}}{2}r} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{\sqrt{105}}{7}}$

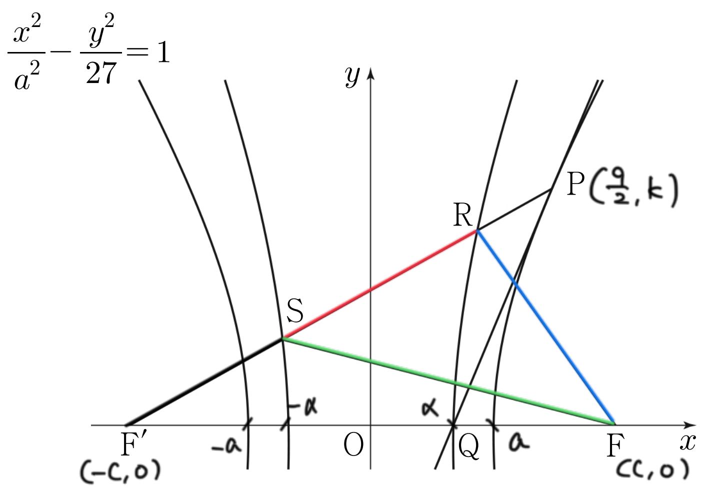
만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

솔직히 27번이 30번보다 오래걸렸음... 꽤 쉬움!

단답형

기출 많이 풀어봤으면 쉽게 풀었을 듯?

29. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2}, k\right)(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선이 선분 PF′과 만나는 두 점을 R, S라 하자. $\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SF}}=\overline{\mathrm{RF}}+8$일 때, $4\times(a^2+k^2)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이고, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 크다.) [4점]



결국 쌍곡선의 정의 가지고 이것저것 식 주물럭하다보면 답 나옴.

새롭게 그린 쌍곡선을 중심으로 보라.
점Q의 x좌표를 α로 두면 주축의 길이 : 2α

$\Rightarrow \overline{SF}-\overline{SF'}=2\alpha$, $\overline{RF'}-\overline{RF}=2\alpha$, $\overline{RF'}-\overline{SF'}=\overline{RS}$

문제 조건에서
$\overline{RS}+\overline{SF}=\overline{RF}+8$ 이므로 식을 변형하면
$(\cancel{\overline{RF'}}-\cancel{\overline{SF'}})+(\cancel{\overline{SF'}}+2\alpha)=(\cancel{\overline{RF'}}-2\alpha)+8$ $\therefore \alpha=2$

곧 포물선 위의 점 $P(\frac{9}{2}, k)$가 $(2,0)$을 지나므로
접선의 방정식 $\dfrac{9x}{2a^2}-\dfrac{ky}{27}=1$ 에 $(2,0)$을 대입하면 $a=3$

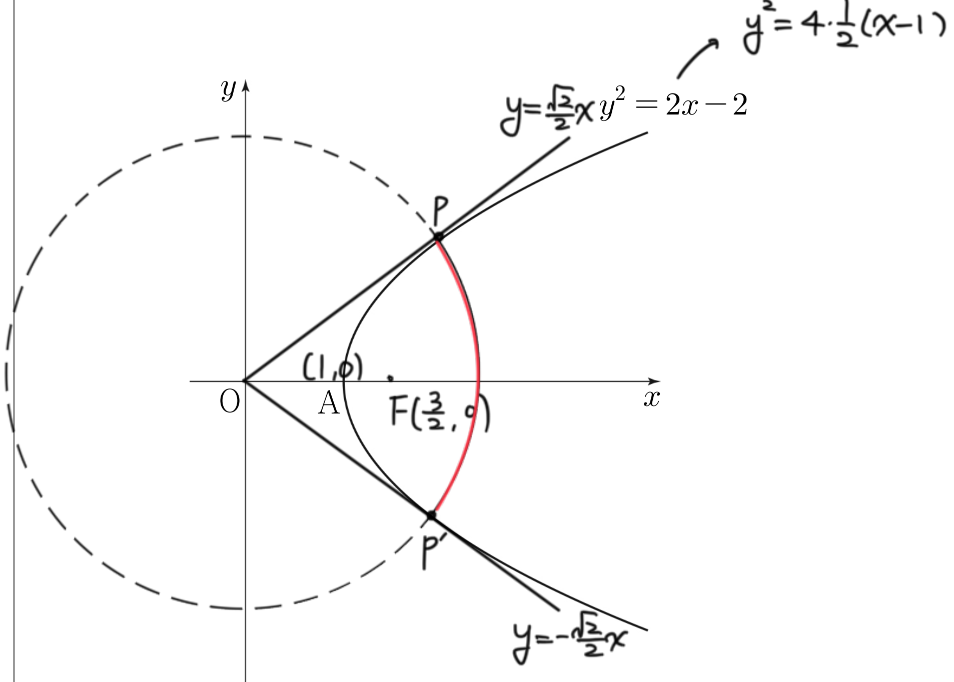
$\therefore$ 쌍곡선의 방정식 : $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 이므로 $(\frac{9}{2}, k)$을 대입하면 $k^2=\dfrac{135}{4}$

㉮ $4(a^2+k^2)=4(9+\frac{135}{4})$
$=36+135$
$=\boxed{171}$

30. 좌표평면에서 포물선 $y^2=2x-2$의 꼭짓점을 A라 하자. 이 포물선 위를 움직이는 점 P와 양의 실수 k에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 C라 하자. 도형 C가 포물선 $y^2=2x-2$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



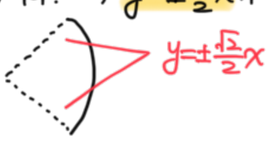
우선 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$ 의 의미 파악이 최우선!

① $y^2=2x-2$: $y^2=4\cdot\frac{1}{2}(x-1)$ 이므로 $A(1,0)$ 이고, $\overrightarrow{OA}=(1,0)$이다.

② $\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}\cdot k$: $\overrightarrow{OP}$ 방향의 단위벡터에 k배한 벡터

곧 $\overrightarrow{OP}$는 호, 즉 부채꼴과 관련있을 것이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 구하기 위해 $(0,0)$에서 포물선에 그은 접선을 생각하자. (접선일 경우가 부채꼴이 가질 수 있는 최대 중심각) (그림에서는 부채꼴 OPP′)

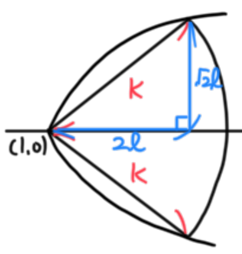
원점에서 포물선에 그은 접선은 $yy_1=2\left(\dfrac{x+x_1}{2}\right)-2$ ((x_1,y_1)는 P의 좌표) 이고, $(0,0)$을 대입하면 $P(x_1,y_1)=(2,\sqrt{2})$이다. 즉 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$가 접선임을 알 수 있다.

곧 $\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$가 나타내는 개형은 

이고, 따라서 문제 조건인 $\overrightarrow{OA}+\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}\cdot k$ 가 포물선과 두 점에서 만나는 상황은

"점 A(1,0)을 중심으로 하고, 기울기가 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$이며 길이가 k인 선분으로 만든 부채꼴이 포물선과 두 점에서 만난다"

이고, 이를 그림으로 표현하면



이다.

곧 $(2l+1, \sqrt{2}l)$을 $y^2=2x-2$에 대입하면
$2l^2=4l$ 에서 $l=2$이고,
$k=\sqrt{(2l)^2+(\sqrt{2}l)^2}$
$=\sqrt{16+8}$
$=2\sqrt{6}$ 이며 이때가 k의 최소. (k가 더 커져도 두 점에서 만남)

$\therefore$ ㉮ $m^2=\boxed{24}$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.