P PL

M ATH

L AB

주간지

5주차
정적분의 활용

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과
박세영	홍익대학교 수학교육과

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

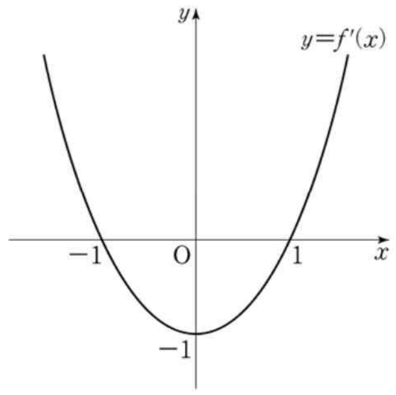
각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1. 곡선 $y=6x^2-12x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

[2018학년도 9월 나형 26번]

2. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-1$일 때, 다음 물음에 답하시오.



$f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

[2016학년도 9월 A형 14번]

3. 함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[2020학년도 9월 나형 15번]

4.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3+at^2+bt \quad (a, b\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸고, 시각 $t=3$에서 점 P의 가속도는 0이다. $a+b$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[2022학년도 6월 19번]

5. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

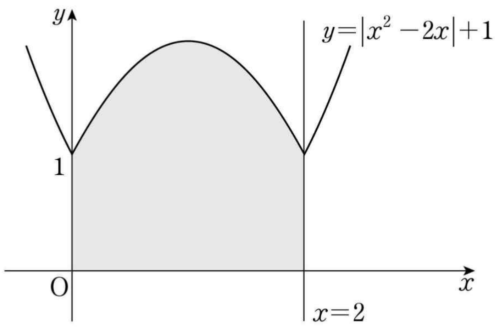
$$v_1(t)=3t^2+t,\ v_2(t)=2t^2+3t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오. [4점]

[2019학년도 9월 나형 28번]

6. 함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

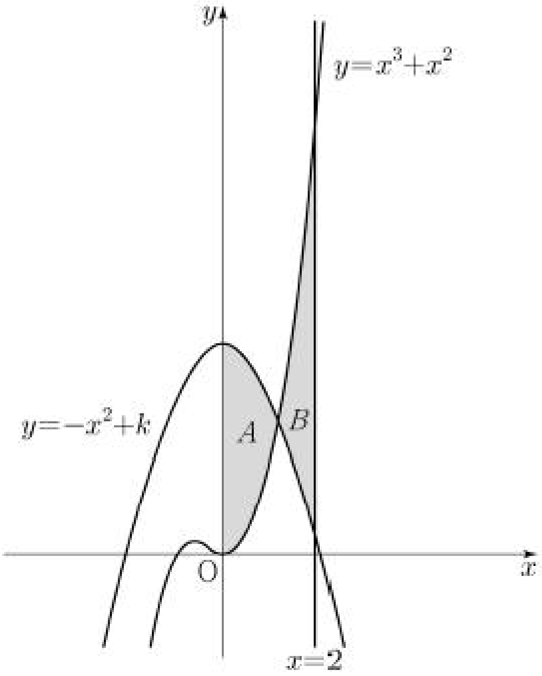
① $\frac{8}{3}$　② 3　③ $\frac{10}{3}$　④ $\frac{11}{3}$　⑤ 4



[2024학년도 고3 3월 7번]

7. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



[2023학년도 대수능 10번]

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-12t+9$이다. 점 P가 $t=0$일 때 원점을 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾼 순간의 위치를 A라 하자. 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구하시오. [4점]

[2021학년도 고3 3월 나형 27번]

9. 곡선 $y=x^3+x-3$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2019학년도 사관학교 나형 27번]

10. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^2\int_1^x f(t)dt-\int_1^x t^2 f(t)dt=x^4+ax^3+bx^2$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

[2015학년도 사관학교 나형 10번]

STEP 2

11. 상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30\times S$의 값을 구하시오. [4점]

[2023학년도 고3 9월 20번]

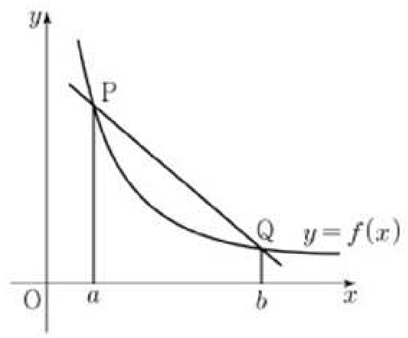
12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\infty)$에서
$f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

[2022학년도 대수능 20번]

13. 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(\mathrm{b}, \mathrm{f(b)})$를 나타낸 것이다.



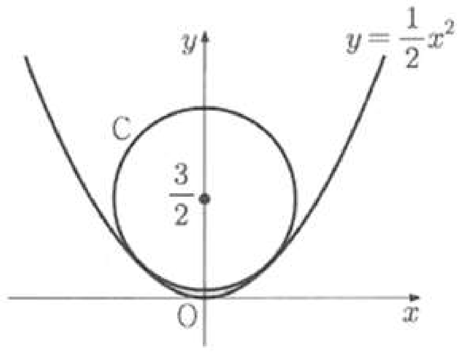
함수 $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $F(x)$는 구간 $[a, b]$에서 증가한다.
ㄴ. $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같다.
ㄷ. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}dx \le \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2005학년도 대수능 가형 8번]

14. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{A}(0, \frac{3}{2})$이고, 반지름의 길이가 $r(r<\frac{3}{2})$인 원 C가 있다. 원 C가 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원 C와 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a+b\pi$이다. $120(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



[2016학년도 고2 9월 가형 29번]

15. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=t^2-4t$, $v_2(t)=-t^2+6t$이다. 출발한 후 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은?

① $\frac{331}{3}$ ② $\frac{334}{3}$ ③ $\frac{337}{3}$ ④ $\frac{340}{3}$ ⑤ $\frac{343}{3}$

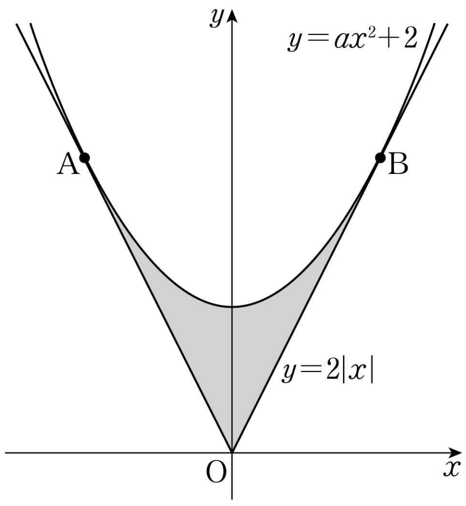
16. 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x), \qquad g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

[2020학년도 수능 나형 26번]

17. 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)
〔3점〕



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

[2021학년도 3월 가형 10번]

18. 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. 〔4점〕

[2021학년도 수능 나형 27번]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

[2022학년도 9월 9번]

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t-10$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k$ $(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[2022학년도 4월 10번]

21. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x), \quad g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[2016학년도 대수능 A형 20번]

22. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
(나) $\int_{0}^{6} f(x)\,dx=0$

함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 9　② 12　③ 15　④ 18　⑤ 21

[2019학년도 대수능 나형 17번]

23. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

[2021년 고3 10월 20번]

24. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도

$v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq t \leq 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t \geq 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

[2023학년도 대수능 20번]

25. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\leq t\leq 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2022학년도 대수능 14번]

26. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=ax^2\ \ (0\leq x<2)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이다.

$\int_1^7 f(x)\,dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)
[4점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

[2016학년도 사관학교 나형 17번]

27. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.

ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2024학년도 고3 3월 14번]

28. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x)=2x+\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt$$

$$g(x)=3x^2+\int_0^1 \{f(t)-g(t)\}dt$$

가 성립할 때, $f(1)+g(2)$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[2013학년도 사관학교 나형 15번]

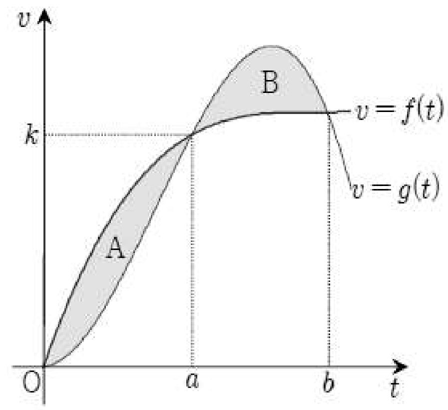
29. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \le x \le a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오. 〔4점〕

[2022학년도 사관학교 20번]

30. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도 v가 각각 $f(t)$, $g(t)$이다. 그림과 같이 두 곡선 $v=f(t)$, $v=g(t)$로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이가 각각 S_1, S_2일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? 〔4점〕



〈보 기〉

ㄱ. $S_1=S_2$이면 두 점 P, Q는 $t=b$일 때 만난다.

ㄴ. $S_1>S_2$이면 $\int_0^b f(t)dt > \int_0^b g(t)dt$

ㄷ. $S_1<S_2$이면 $\int_0^c \{f(t)-g(t)\}dt=0$을 만족시키는 c가 열린구간 (a, b)에 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2012학년도 고3 10월 나형 17번]

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	8	11번	80	21번	①
2번	④	12번	110	22번	②
3번	③	13번	③	23번	③
4번	6	14번	140	24번	②
5번	12	15번	⑤	25번	④
6번	③	16번	14	26번	③
7번	④	17번	④	27번	⑤
8번	8	18번	36	28번	②
9번	31	19번	④	29번	290
10번	①	20번	③	30번	⑤

정답 및 해설

1. 8

$y=6x(x-2)$이므로 구하고자 하는 넓이는

$\int_0^2(-6x^2+12x)dx$

$=-16+24$

$=8$

2. ④

$f(x)=\int(x^2-1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x+C$ (C는 적분상수)

그런데, $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

즉,

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$=\frac{1}{3}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{3}x^3-x\right|dx$

$=2\int_0^{\sqrt{3}}(-\frac{1}{3}x^3+x)dx$

$=2(-\frac{9}{12}+\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$

3. ③

$-f(x-1)-1$

$=-\{(x-1)^2-2(x-1)\}-1$

$=-(x^2-4x+3)-1$

$=-x^2+4x-4$

이므로 두 곡선 $y=f(x)$

$y=-f(x-1)-1$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=-x^2+4x-4$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 고선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_1^2\{(-x^2+4x-4)-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$

$=(-\frac{16}{3}+12-8)-(-\frac{2}{3}+3-4)$

$=-\frac{4}{3}-(-\frac{5}{3})$

$=\frac{1}{3}$

4. 6

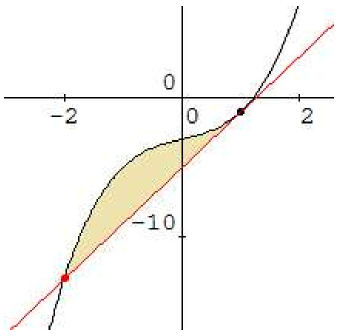
시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면
시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로
$v(t)=3t^2-4t+k$에서
$x(t)=t^3-2t^2+kt$
이때 $x(1)=-3$에서
$-1+k=-3$, $k=-2$
따라서 $x(t)=t^3-2t^2-2t$이고,
$x(3)=27-18-6=3$이다.
그러므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은 $x(3)-x(1)=3-(-3)=6$

5. 12
출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간
$v_1(t)=v_2(t)$
이므로
$3t^2+t=2t^2+3t$
$t^2-2t=0$
$t(t-2)=0$
$t>0$이므로 $t=2$
$t=2$일 때 점 P의 위치는
$0+\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2(3t^2+t)dt=10$
$t=2$일 때 점 Q의 위치는
$0+\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2(2t^2+3t)dt=\frac{34}{3}$
따라서 두 점 사이의 거리 a는
$a=\frac{34}{3}-10=\frac{4}{3}$
이므로
$9a=9\times\frac{4}{3}=12$

6. ③
구하는 부분의 넓이는
$\int_0^2(|x^2-2x|+1)dx=\int_0^2(-x^2+2x+1)dx$
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2=\frac{10}{3}$

7. ④
두 부분의 넓이가 같으므로 $\int_0^2\{x^3+x^2-(-x^2+k)\}dx=0$
$\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2=4+\frac{16}{3}-2k=0$
$2k=\frac{28}{3}$, $\therefore\ k=\frac{14}{3}$

8. 8
점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이므로
$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$, $t=1$ 또는 $t=3$
$0\le t<1$에서 $v(t)>0$,
$1<t<3$에서 $v(t)<0$,
$t>3$에서 $v(t)>0$
이므로 점 P는 $t=1$일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=3$일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.
그러므로 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P가 $t=1$부터 $t=3$까지 이동한 거리의 2배이다.
따라서 구하는 값은
$2\int_1^3|v(t)|dt=2\int_1^3(-3t^2+12t-9)dt$
$=2\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3=8$
〔다른 풀이〕
점 P가 다시 A로 돌아올 때의 시각을 $t=a$(단, $a>1$)라 하면
$\int_1^a v(t)dt=0$이므로
$\int_1^a v(t)dt=\int_1^a(3t^2-12t+9)dt$
$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^a=a^3-6a^2+9a-4$
$=(a-1)^2(a-4)=0$
그러므로 $t=4$일 때 점 P가 다시 A로 돌아온다. 따라서
$\int_1^4|v(t)|dt=-\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 v(t)dt$
$=-\int_1^3(3t^2-12t+9)dt+\int_3^4(3t^2-12t+9)dt$
$=-\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^3+\left[t^3-6t^2+9t\right]_3^4$
$=8$

9. 31


$y=x^3+x-3$, $y'=3x^2+1$
접선은 $y=4x-5$ 이므로
$x^3+x-3=4x-5$
$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=(x-1)^3+3(x-1)^2$
$S=\int_{-2}^1(x-1)^2(x+2)dx$
$=\int_{-2}^1\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$
$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^1$
$=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}$,

$\therefore\ p+q=4+27=31$

10. ①

$$x^2\int_1^x f(t)dt-\int_1^x t^2 f(t)dt=x^4+ax^3+bx^2 \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

㉠에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\left\{2x\int_1^x f(t)dt+x^2f(x)\right\}-x^2f(x)=4x^3+3ax^2+2bx$$

$$2x\int_1^x f(t)dt=4x^3+3ax^2+2bx$$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$2\int_1^x f(t)dt=4x^2+3ax+2b \cdots\cdots ㉢$$

㉢이 모든 실수에 대하여 성립하므로

㉢에 $x=1$을 대입하면

$0=4+3a+2b$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $a=-2,\ b=1$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=8x+3a=8x-6$

$\therefore\ f(x)=4x-3$

$\therefore\ f(5)=17$

11. 80

$f(x)=x^3+x^2-x$에서

$f'(x)=3x^2+2x-1$

$\quad=(3x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값이 $f(-1)=1$, $x=\dfrac{1}{3}$에서 극솟값이 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{5}{27}$이므로 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x,\ g(x)=4|x|+k$의

그래프가 만나는 점의 개수가 2이기 위해서는

$x>0$인 부분에서 두 함수

$f(x)=x^3+x^2-x,\ g(x)=4|x|+k$의

그래프가 접해야 한다.

$x>0$일 때 $g(x)=4x+k$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=4$에서

$3x^2+2x-5=0,\ (3x+5)(x-1)=0$

즉, $x=1$이므로 접점의 좌표는 $(1,1)$이고

$g(1)=4+k=1$

따라서, $k=-3$

또한, $x<0$일 때 $g(x)=-4x-3$이므로

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-x=-4x-3,\ x^3+x^2+3x+3=0$

$(x+1)(x^2+3)=0$

$x=-1$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^0(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_0^1(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$$30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$$

12. 110

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에

$x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이므로

$b=1$

또, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로

$0\le x\le 1$에서

$f(x+1)=xf(x)+ax+1$

$\quad=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$\quad=t^2+(a-2)t+2-a$ …… ㉠

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이고,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로

$f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\le x\le 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$이다.

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2-x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

즉, $60\times\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}=110$

13. ③

ㄱ. 구간 $[a,b]$에서 $F'(x)=f(x)>0$이므로 함수 $F(x)$는 증가함수이다. (참)

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (거짓)

ㄷ. 점 Q에서 직선 PA에 내린 수선의 발을 R라 놓으면

$\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}=\triangle\mathrm{PQR}$

$\displaystyle\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(b)dx$

$\displaystyle=\int_a^b f(x)dx-\square\mathrm{QRAB}$

$\displaystyle\therefore\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx\le\frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

14. 140

두 곡선의 교점의 좌표를 각각

$\mathrm{P}(\alpha,\frac{1}{2}\alpha^2)$, $\mathrm{Q}(-\alpha,\frac{1}{2}\alpha^2)$ $(\alpha>0)$이라 하자.

함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프의 접점 P에서 접선의 기울기는

$f'(\alpha)=\alpha$이고 이 접선은 직선 AP와 수직이다.

즉 $\dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}}{\alpha-0}=-\dfrac{1}{\alpha}$에서 $\alpha^2=1$이므로

$\mathrm{P}(1,\frac{1}{2})$, $\mathrm{Q}(-1,\frac{1}{2})$

직선 AP는 $y=-x+\frac{3}{2}$

$\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$, 원의 반지름은 $\sqrt{2}$, 구하는 넓이를 S라 하면

$\displaystyle S=2\left\{\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\frac{\pi}{4}\right\}$

$\displaystyle=2\left\{\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1-\frac{\pi}{4}\right\}$

$=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$120(a+b)=140$

15. ⑤

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$이므로

$\displaystyle x_1(t)=\int_0^t v_1(t)dt$

$\displaystyle=\int_0^t(t^2-6t)dt$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2\right]_0^t$

$=\frac{1}{3}t^3-3t^2$

$=\frac{1}{3}t^2(t-9)$

$\displaystyle x_2(t)=\int_0^t v_2(t)dt$

$\displaystyle=\int_0^t(-t^2+8t)dt$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}t^3+4t^2\right]_0^t$

$=-\frac{1}{3}t^3+4t^2$

$=-\frac{1}{3}t^2(t-12)$

출발 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$\frac{1}{3}t^2(t-9)=-\frac{1}{3}t^2(t-12)$에서

$\frac{1}{3}t^2(2t-21)=0$

$t>0$이므로

$t=\frac{21}{2}$

$0<t\le\frac{21}{2}$에서 두 점 P, Q사이의 거리를

$f(t)$라 하면

$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|=x_2(t)-x_1(t)$

$=-\frac{1}{3}t^2(t-12)-\frac{1}{3}t^2(t-9)$

$=-\frac{1}{3}t^2(2t-21)$

$f'(t)=-\frac{2}{3}t(2t-21)-\frac{2}{3}t^2$

$=-2t(t-7)$

$f'(t)=0$에서

$t=7$

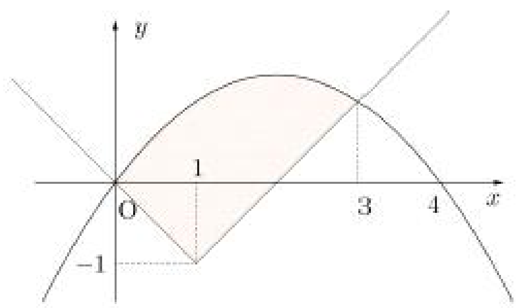
따라서 $f(t)$는 $t=7$에서 극대이면서 최대이므로

$f(t)$의 최댓값은

$f(7)=\frac{343}{3}$

16. 14

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$의 그래프는 다음과 같다.



$x<1$일 때, $g(x)=-x$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서 $x=0$

$x\ge1$일 때, $g(x)=x-2$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$에서

$4x-x^2=3x-6$,

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$

$x=3$

따라서 구하는 넓이는

$S=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx+\int_1^3\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3$

$=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\}$

$=\frac{7}{2}$

이므로

$4S=14$

17. ④

$x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=-2x$의 그래프가 접하므로

$ax^2+2=-2x$, 즉 $ax^2+2x+2=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-2a=0$

$a=\frac{1}{2}$이므로 접점 A의 x좌표는 -2이다.

점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로 접점 B의 x좌표는 2이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\times\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx$

$=2\times\left[\frac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

18. 36

$x^2-7x+10=-x+10$에서 $x=0,6$

구하는 넓이는 $\int_0^6(x^2-6x)dx=36$

19. ③

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=-4t^3+12t^2$ 이므로

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$k=1$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$이므로

$3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이다.

따라서 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_3^4|v(t)|dt=\int_3^4|-4t^3+12t^2|dt$

$=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt$

$=\left[t^4-4t^3\right]_3^4$

$=0-(-27)=27$

20. ③

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와

점 P의 시각 $t=k$ $(k>1)$에서의 위치가 서로 같으므로

시각 $t=1$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

$\int_1^k v(t)dt=\int_1^k(4t-10)dt$

$=\left[2t^2-10t\right]_1^k$

$=(2k^2-10k)-(2-10)$

$=2k^2-10k+8$

$=2(k-1)(k-4)=0$

따라서 $k=4$

21. ①

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 다항함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

$\int_{-3}^3(xh'(x)+5h'(x))dx$

$=2\int_0^3 5h'(x)dx$

$=10\left[h(x)\right]_0^3$

$=10(h(3)-h(0))$

$10(h(3)-h(0))=10$에서

$h(3)=h(0)+1=0+1=1$

22. ②

$a=\int_0^1|f(t)|dt$라 하면 $a>0$이고,

$f(x)=x^3-4ax$

$f(1)=1-4a>0$에서 $a<\frac{1}{4}$

따라서 $0<a<\frac{1}{4}$이다.

$f(x)=x(x^2-4a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm2\sqrt{a}$

$0<x<2\sqrt{a}$일 때 $f(x)<0$이고 $x\ge 2\sqrt{a}$일 때 $f(x)\ge 0$이다.

$0<a<\frac{1}{4}$에서 $2\sqrt{a}<1$이므로

$a=\int_0^{2\sqrt{a}}\{-f(t)\}dt+\int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt$

$=\int_0^{2\sqrt{a}}(-t^3+4at)dt+\int_{2\sqrt{a}}^1(t^3-4at)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{4}t^4-2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$

$=8a^2-2a+\frac{1}{4}$

$8a^2-3a+\frac{1}{4}=0$에서

$32a^2-12a+1=0$, $(4a-1)(8a-1)=0$

$0<a<\frac{1}{4}$ 이므로 $a=\frac{1}{8}$ 이고

$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$

이때 $f(2)=2^3-\frac{1}{2}\times 2=7$

23. ③

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)

(나)에서 $C-\int_0^1(t^2+2at+C)dt=\frac{2}{3}$

$C-\left(\frac{1}{3}+a+C\right)=\frac{2}{3}$ 에서 $a=-1$

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$에서 $\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$

즉, $C=-\frac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$

따라서 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

24. ②

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_a^b|f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$

$=-\left(\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\right)$

$=-\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right)$

$=\frac{9}{2}$

25. ④

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a+0$

이므로

$f(1)=2+4a$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_1^0 f(t)\,dt$

즉,

$0=3a-\int_0^1 f(t)\,dt$

이므로

$\int_0^1 f(t)\,dt=3a$ …… ㉢

$f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$이므로 ㉡, ㉢에서

$2+4a=3a$

즉, $a=-2$, $f(1)=-6$

㉠의 양변을 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$

이므로

$f'(x)=6x+2a=6x-4$

따라서

$f(x)=\int f'(x)dx=3x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=3-4+C=-6$에서

$C=-5$

따라서

$f(3)=27-12-5=10$

이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

26. ③

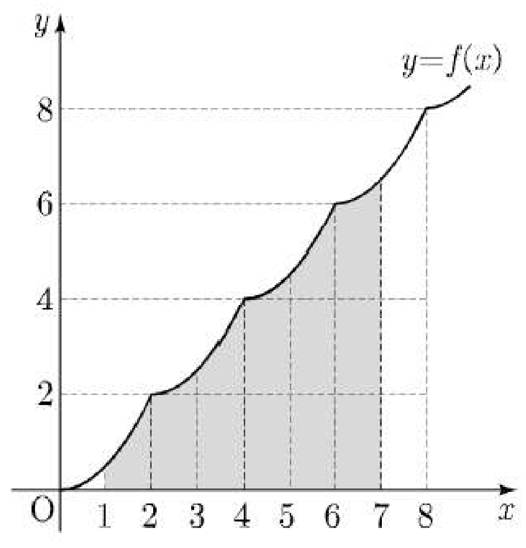
조건 (가)에 의하여 $f(0)=0$

조건 (나)에 의하여 $f(2)=f(0)+2=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-0} f(x)=f(2)$에서 $4a=2$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$



함수 $f(x)$가 연속함수이므로 임의의 실수 n에 대하여

$\int_{n+2}^{n+4} f(x)dx=\int_n^{n+2} f(x+2)dx$

$=\int_n^{n+2}\{f(x)+2\}dx$

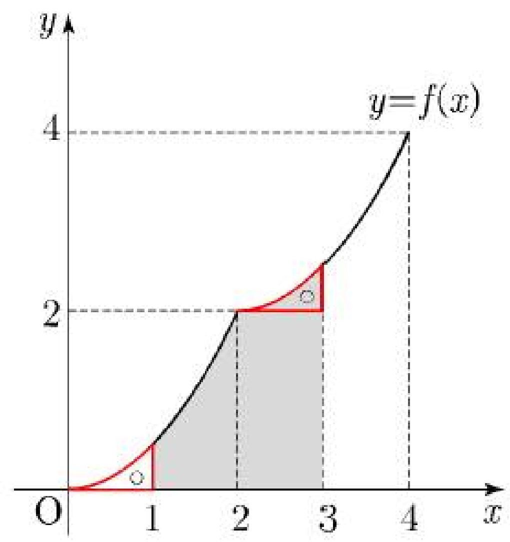
$=\int_n^{n+2} f(x)dx+4$

가 성립한다. 따라서

$\int_1^7 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$

$= \int_1^3 f(x)dx + \left(\int_1^3 f(x)dx + 4\right) + \left(\int_1^3 f(x)dx + 8\right)$

$= 3\int_1^3 f(x)dx + 12$



위 그림에서

$\int_1^3 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx + 2 = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + 2 = \frac{10}{3}$

$\therefore\ \int_1^7 f(x)dx = 3 \times \frac{10}{3} + 12 = 22$

27. ⑤

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 미분가능하다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$f(k) = \lim_{x \to k-} f(x) = ak$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$f'(k) = \lim_{x \to k-} \frac{f(x)-f(k)}{x-k} = \lim_{x \to k-} \frac{ax-ak}{x-k} = a$

ㄱ. $f'(k)=a$이고 $a=1$이므로 $f'(k)=1$이다. (참)

ㄴ. $g(x) = -x^2+4bx-3b^2$이라 하자.

직선 $y=ax$는 원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 양수인 접선 중 하나이고, 접점의 좌표는 $(k, g(k))$이다.

$g'(x) = -2x+4b$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-k^2+4bk-3b^2) = (-2k+4b)(x-k)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-(-k^2+4bk-3b^2) = (-2k+4b)(0-k)$

$k^2-3b^2=0$

$k>0,\ b>0$이므로 $k=\sqrt{3}b$

$k=3$이므로 $b=\sqrt{3}$이고

$a=g'(k) = -2k+4b = (4-2\sqrt{3})b$

$= -6+4\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서

$f(x) = \begin{cases} (4-2\sqrt{3})bx & (x < \sqrt{3}b) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \ge \sqrt{3}b) \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} (4-2\sqrt{3})b & (x < \sqrt{3}b) \\ -2x+4b & (x \ge \sqrt{3}b) \end{cases}$

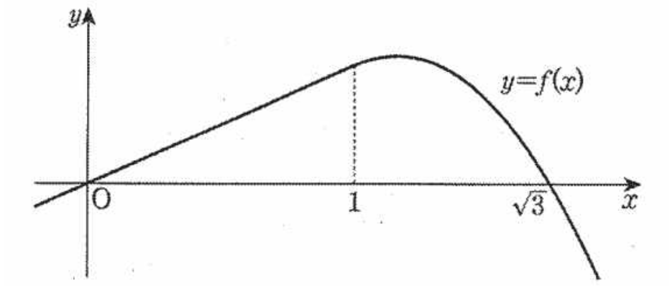
$f(k) = f'(k)$에서 $f(\sqrt{3}b) = f'(\sqrt{3}b)$이므로

$-3b^2+4\sqrt{3}b^2-3b^2 = -2\sqrt{3}b+4b$

따라서 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$이고

$f(x) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x<1) \\ -x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1 & (x \ge 1) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 $x=0,\ x=\sqrt{3}$에서 만나므로 구하는 넓이는

$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$

$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4\sqrt{3}-6}{3} + \int_1^{\sqrt{3}} \left(-x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$

$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28. ②

$\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt = C_1,\ \int_0^1 \{f(t)-g(t)\}dt = C_2$라 하면

주어진 조건에 의해서 $f(x)=2x+C_1,\ g(x)=3x^2+C_2$

$f(x)+g(x) = 3x^2+2x+C_1+C_2$이므로

$\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt$

$= \int_0^1 \{3t^2+2t+C_1+C_2\}dt$

$= \left[t^3+t^2+(C_1+C_2)t\right]_0^1$

$= C_1+C_2+2 = C_1$

$\therefore\ C_2 = -2$

$\int_0^1 \{f(t)-g(t)\}dt$

$= \int_0^1 \{3t^2-2t+C_1-C_2\}dt$

$= \left[t^3-t^2+(C_1-C_2)t\right]_0^1$

$= C_1-C_2 = C_2$

$\therefore\ C_1 = 2C_2 = -4$

$\therefore\ f(x)=2x-4,\ g(x)=3x^2-2$

$\therefore\ f(1)+g(2) = (-2)+(10) = 8$

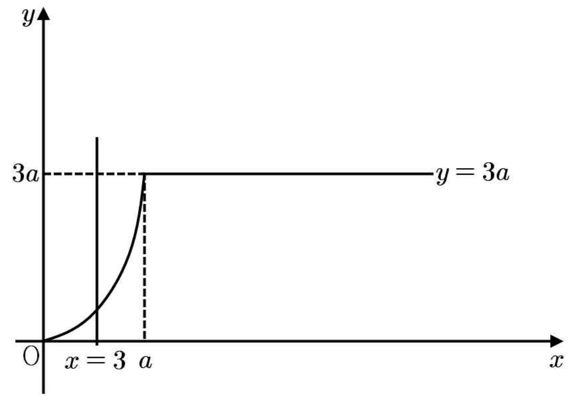
29. 290

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \le x \le a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a) \end{cases}$

의 그래프는 y축 대칭함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 8이면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 4이다.

$x \ge 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

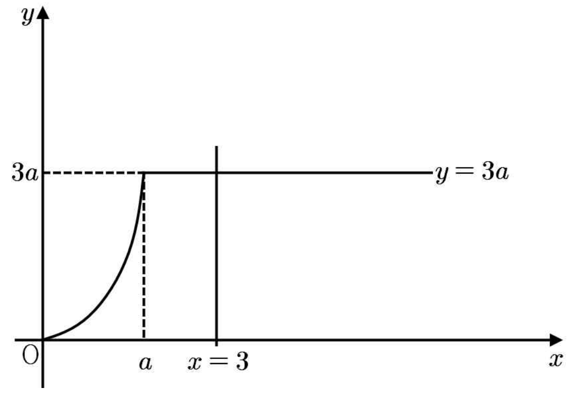
(ⅰ) $a \ge 3$일 때



$\int_0^3 \frac{3}{a}x^2dx=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3=\frac{27}{a}=4$

$\therefore\ a=\frac{27}{4}$

(ⅱ) $0<a<3$일 때



$\int_0^a \frac{3}{a}x^2dx+(3-a)\times 3a$

$=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a+9a-3a^2$

$=-2a^2+9a$

$=4$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$ ($\because\ 0<a<3$)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 만족하는 a는 $\frac{27}{4}$, $\frac{1}{2}$이므로 모든 a 값의 합 S는 $S=\frac{29}{4}$

$\therefore\ 40S=40\times\frac{29}{4}=290$

30. ⑤

ㄱ. $S_1=S_2$이면 P, Q의 이동거리가 같으므로 $t=b$에서 만난다.

ㄴ. $S_1>S_2$이면 P의 이동거리가 Q의 이동거리보다 크므로 $\int_0^b f(t)dt>\int_0^b g(t)dt$이다.

ㄷ. $S_1<S_2$이면 P가 Q보다 빨리 가다가 Q가 P를 추월하여 지나가므로 이동거리가 같은 지점이 반드시 생긴다. 그 때의 시간을 $t=c$라 하면 $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$ 안에 존재한다.