제 2 교시

수학 영역

만든 놈: crazy_hansuckwon (인스타)

5지선다형

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 이용 $(a\ge0, b\ge0)$

$a<0, b<0$ 인 경우는 '복소수' 파트에서 ㄱㄱ

1. $\sqrt{\dfrac{12}{5}}\times\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\sqrt{\frac{12}{5}\times\frac{5}{3}}=\sqrt{4}$$

$$=\boxed{2}$$

필요한 항만 뽑아서 ~ 다 전개해도 되는데 굳이?

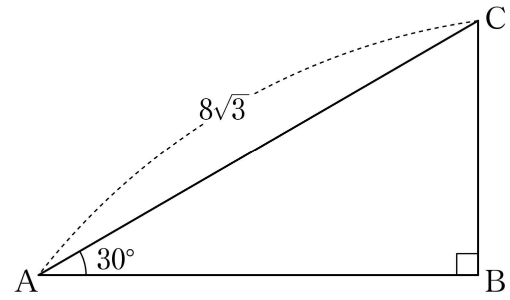
2. 다항식 $(2x+1)^2-(2x^2+x-1)$의 일차항의 계수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(2x+1)^2$ 일차항 계수 4
$(2x^2+x-1)$ 일차항 계수 1
$4-1=\boxed{3}$

이용~

3. 그림과 같이 $\overline{AC}=8\sqrt{3}$, $\angle A=30°$, $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB의 길이는? [2점]



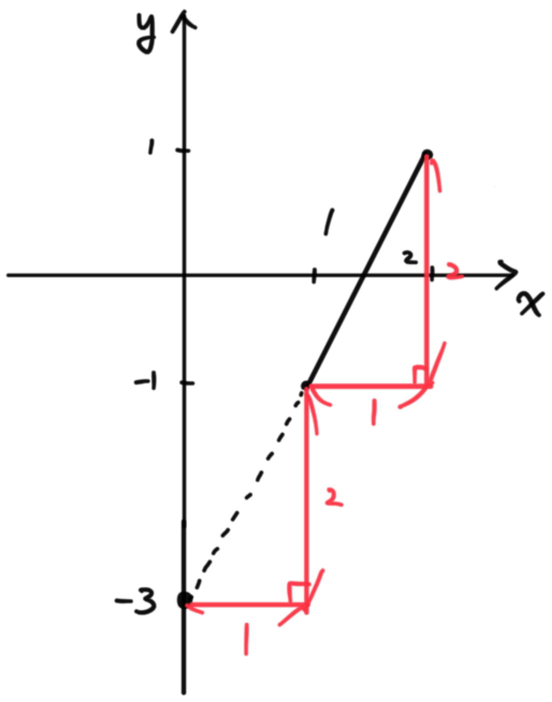
① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$\dfrac{\overline{AB}}{8\sqrt{3}}=\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\overline{AB}=\boxed{12}$

일차함수: 기울기 중요!

4. 좌표평면 위의 두 점 $(1, -1)$, $(2, 1)$을 지나는 직선의 y절편은? [3점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1



$\therefore$ y절편 $\boxed{-3}$

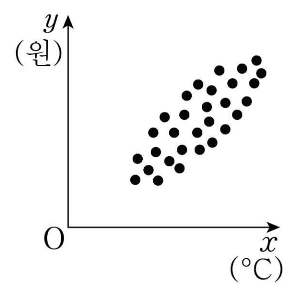
※ 무지성으로 $y=mx+n$ 잡고 $(1,-1)$, $(2,1)$ 대입해도 됨

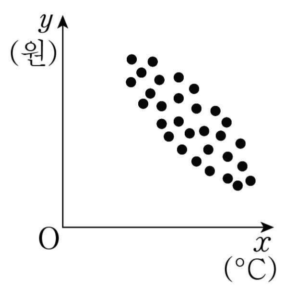
만든 놈: crazy_hansuckwon(인스타)

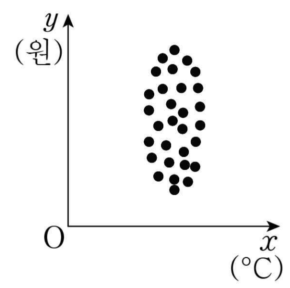
와 산점도 개오랜만

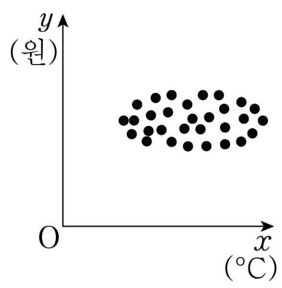
5. 어느 회사가 위치한 지역의 일일 최저 기온(℃)과 이 회사의 일일 난방비(원)를 30일 동안 조사한 결과, 일일 최저 기온이 높을수록 일일 난방비가 감소한다고 한다. 일일 최저 기온을 x℃, 일일 난방비를 y원이라 할 때, x와 y 사이의 상관관계를 나타낸 산점도로 가장 적절한 것은? [3점]

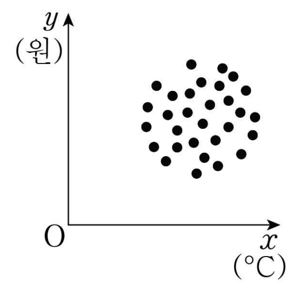
$x\Uparrow \rightarrow y\Downarrow$

①


②


③


④


⑤


중심각 = 원주각 × 2 중요! 앞으로도 계속 나옴

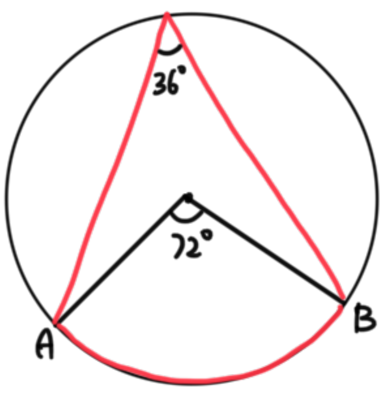
6. 원 위의 두 점 A, B에 대하여 호 AB의 길이가 원의 둘레의 길이의 $\frac{1}{5}$일 때, 호 AB에 대한 원주각의 크기는? [3점]

① 36°　② 40°　③ 44°　④ 48°　⑤ 52°

원의 호의 길이는 중심각의 크기에 비례

⇒ 호가 원주의 $\frac{1}{5}$ ⇒ 중심각도 360°의 $\frac{1}{5}$ ⇒ 72°

(부채꼴은 원의 일부일 뿐 원과 성질이 동일하다)

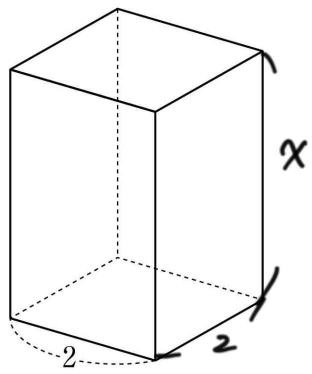


동일한 호에 대해
중심각 = 2 × 원주각이므로
원주각 = $\boxed{36°}$

오르는 건 미지수3...

7. 한 변의 길이가 2인 정사각형을 밑면으로 하는 직육면체의 부피가 12일 때, 이 직육면체의 겉넓이는? [3점]

① 24　② 26　③ 28　④ 30　⑤ 32



부피가 12 : $2\times2\times x = 12$　∴ $x=3$

겉넓이 : $2\times(2\times2) + 4\times(2\times x)$

$= 8+8x$ 이므로 $x=3$에서

⑦ $\boxed{32}$

만든 놈: crazy_hansuckwon (인스타)

키가 좀 많이 큰 반이네요..

8. 다음은 어느 학급 학생 25명을 대상으로 키를 조사하여 나타낸 도수분포표이다.

키(cm)	학생 수(명)
150 이상 ~ 160 미만	a
160 ~ 170	8
170 ~ 180	b
180 ~ 190	6
합계	25

이 학생들 중에서 키가 170cm 미만인 학생 수가 조사한 학생 수의 40%일 때, 키가 170cm 이상 180cm 미만인 학생 수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

총 조사한 학생의 40%

$\Rightarrow 25\times\frac{2}{5} = 10$ ∴ 150~170 10명

곧 $a+8=10$에서 $a=2$이고, ㉠ $b=\boxed{9}$

그저 교점 → 대입

9. 두 일차방정식 $ax+2y-b=0$, $2ax+by-3=0$의 그래프의 교점의 좌표가 $(2, 1)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$ax+2y-b=0 \xrightarrow{(2,1)\text{대입}} 2a+2-b=0$

$2ax+by-3=0 \xrightarrow{(2,1)\text{대입}} 4a+b-3=0$

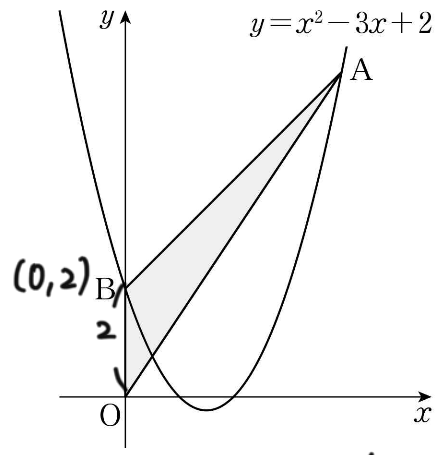
∴ $2a-b=-2$, $4a+b=3$을 연립하면

$a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{7}{3}$

㉠ $a+b=\boxed{\frac{5}{2}}$

무엇을 밑변으로 둘 것인가?

10. 그림과 같이 제1사분면 위의 점 A(a, b)는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위에 있다. 이 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점 B에 대하여 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

B(0,2)에 대해 $\overline{OB}=2$를 밑변으로 생각

$\Rightarrow \triangle OAB = \frac{1}{2}\times\overline{OB}\times$ 높이 $=4$ 에서 높이 $=4$이고 이는 A의 x좌표이다.

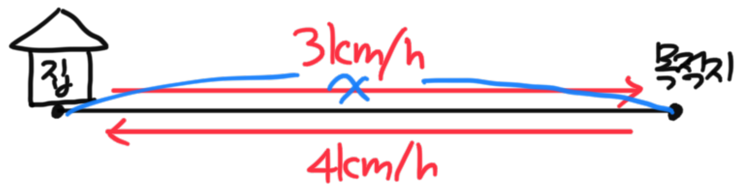
∴ A(4,6)이므로 (∵ 점 A는 $y=x^2-3x+2$ 위의 점)

㉠ $a+b=\boxed{10}$

거리, 속도, 시간 사이의 관계

11. 어느 학생이 집에서 출발하여 갈 때는 시속 3km로, 집으로 돌아올 때는 같은 경로를 시속 4km로 이동하려고 한다. 이동한 전체 시간이 2시간 이하가 되도록 할 때, 이 학생이 집에서 출발하여 집으로 돌아올 때까지 이동한 거리의 최댓값은? [3점]

① $\frac{45}{7}$km ② $\frac{48}{7}$km ③ $\frac{51}{7}$km ④ $\frac{54}{7}$km ⑤ $\frac{57}{7}$km



시간 = $\frac{거리}{속도}$ 이서 거리를 x로 두면 (단위: km)

① 가는데 걸린시간 : $\frac{x}{3}$

② 오는데 걸린시간 : $\frac{x}{4}$

$\frac{x}{3}+\frac{x}{4} \le 2$

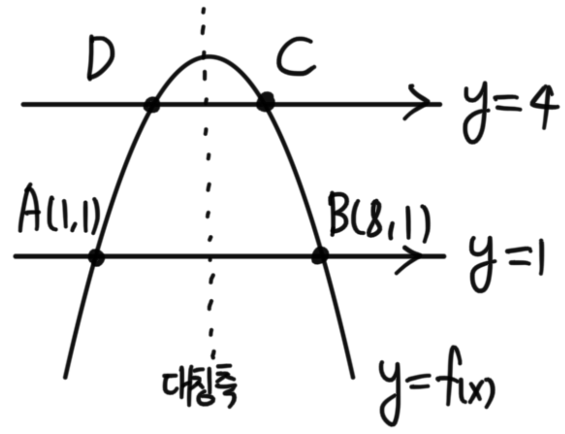
⇒ $x \le \frac{24}{7}$ 이므로 집까지 돌아온 거리까지 계산하면

㉠ $2x \le \boxed{\frac{48}{7}}$

이차함수의 대칭성. 굳이 이차함수 식부터 구하려고 하지좀 마라

12. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 서로 다른 네 점 $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(8,1)$, $\mathrm{C}(6,4)$, $\mathrm{D}(a,b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} /\!/ \overline{\mathrm{CD}}$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9



인데

대칭성에 의해 $\frac{1+8}{2}=\frac{6+a}{2}$ ∴ $a=3$

점 D의 y좌표는 C와 동일한 4이다.

∴㉠ $a+b=\boxed{7}$

만든 놈: crazy_hansuckwon(인스타)

문제는 꼼꼼히. '자연수' a, b이다.

13. 두 자연수 a, b에 대하여 다항식 $2x^2+9x+k$가 $(2x+a)(x+b)$로 인수분해되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 4 ③ 7 ④ 10 ⑤ 13

$2x^2+9x+k \Rightarrow (2x+a)(x+b)$ 이므로

$2 \quad b$
$1 \quad a$ $\quad 2a+b=9,\ ab=k$

(물론 당연히 $(2x+a)(x+b)$ 전개해서 계수비교해도 똑같음)

$2a+b=9$를 만족하는 자연수의 순서쌍 (a, b)

$\Rightarrow (1, 7), (2, 5), (3, 3), (4, 1)$

각각의 경우 $ab=k$는 $7, 10, 9, 4$ 이므로

∴ 실수 k의 최솟값은 $\boxed{4}$

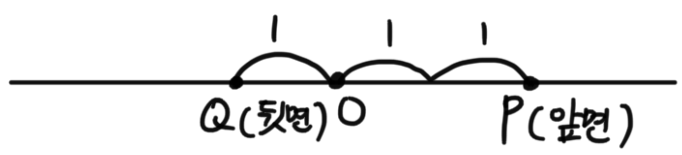
경우의 수 문제인척하는 일차방정식

14. 수직선 위의 두 점 P, Q가 원점에 있다. 동전을 한 번 던질 때마다 두 점 P, Q가 다음 규칙에 따라 이동한다.

> (가) 동전의 앞면이 나오면 점 P가 양의 방향으로 2만큼 이동한다.
> (나) 동전의 뒷면이 나오면 점 Q가 음의 방향으로 1만큼 이동한다.

동전을 30번 던진 후 두 점 P, Q 사이의 거리가 46일 때, 동전의 앞면이 나온 횟수는? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16



동전의 앞면이 나오는 횟수를 x로 두고, 뒷면을 y로 두면

$x+y=30 \cdots ①$

앞면이 나오면 두 점 P, Q 사이의 거리는 2만큼 멀어지고,
뒷면이 나오면 〃 1 〃

$\Rightarrow 2x+y=46 \cdots ②$

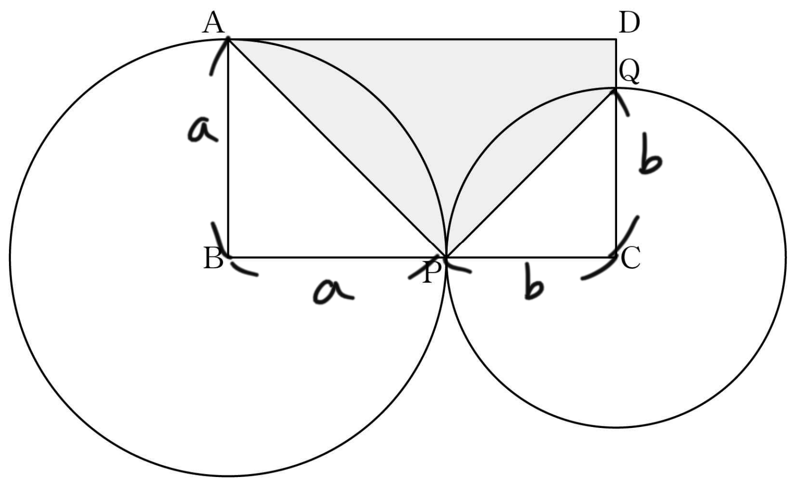
①과 ②를 연립하면 $x=\boxed{16}$

만든 놈: crazy_hansuckwon (인스타)

주어진 넓이를 어떻게 구할 것인가??

길이, 각 착실히 표기

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=a\ (4<a<8)$, $\overline{BC}=8$인 직사각형 ABCD가 있다. 점 B를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원이 선분 BC와 만나는 점을 P, 점 C를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원이 선분 CD와 만나는 점을 Q라 하자. 사각형 APQD의 넓이가 $\frac{79}{4}$일 때, a의 값은? [4점]



① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

$\overline{AB}=\overline{BP}=a$, $\overline{CP}=\overline{CQ}=b$로 두면

□APQD = □ − △ − △

$= a(a+b)-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2$

$= \frac{1}{2}a^2+ab-\frac{1}{2}b^2$

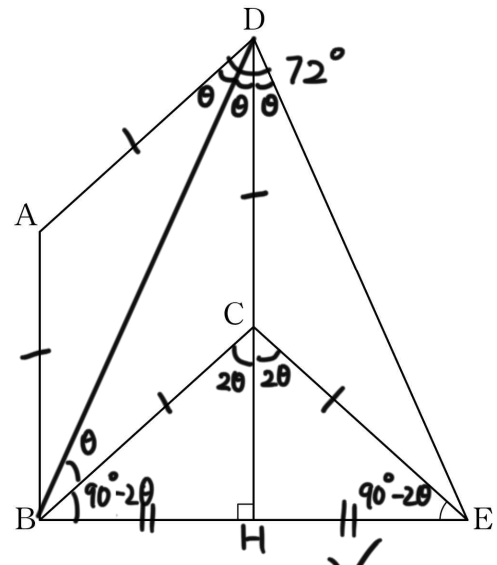
$= \frac{1}{2}(a^2+2ab-b^2)=\frac{79}{4}$

곧 $a^2+2ab-b^2=(a+b)^2-2b^2=\frac{79}{2}$ 에서 $a+b=8$이므로

$64-2b^2=\frac{79}{2}$ ∴ $b=\frac{7}{2}$ $(b>0)$

㉮ $a=8-b=\boxed{\frac{9}{2}}$

16. 그림과 같이 마름모 ABCD와 이 마름모의 외부의 한 점 E에 대하여 ∠ADE = 72°이고 직선 CD가 선분 BE를 수직이등분할 때, 각 CEB의 크기는? (단, 0° < ∠ADC < 72°) [4점]



① 39° ② 40° ③ 41° ④ 42° ⑤ 43°

C에서 $\overline{BE}$에 내린 수선이 $\overline{BE}$를 수직이등분한다. (수선의 발 H)

⇒ △CBE는 $\overline{BC}=\overline{CE}$인 이등변 △

□ABCD는 마름모이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$이고, $\overline{BC}=\overline{CE}$이므로

△ABD, △CBD, △CDE 모두 합동이다.

∴ ∠ADB = θ로 두면 ∠BDC = θ, ∠CDE = θ 이므로

3θ = 72° 에서 θ = 24°

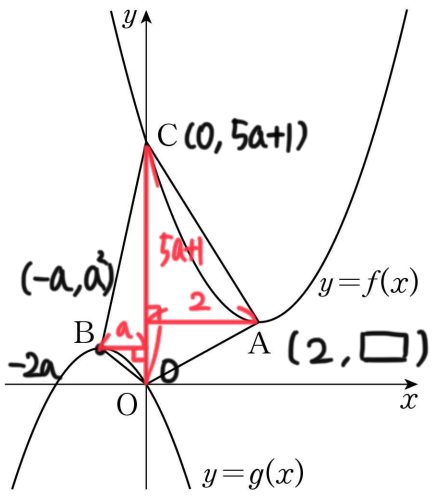
곧 ∠BCH = ∠ECH = 2θ 이고 (∵ 삼각형의 두 내각 크기 합 = 한 외각)

㉮ ∠CEB = 90° − 2θ = $\boxed{42°}$

10번이랑 비슷함. 낼게 별로 없었나봄

17. 두 이차함수 $f(x)=ax^2-4ax+5a+1$, $g(x)=-x^2-2ax$ 의 그래프의 꼭짓점을 각각 A, B라 하자. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y축과 만나는 점 C에 대하여 사각형 OACB의 넓이가 7일 때, 양수 a 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$



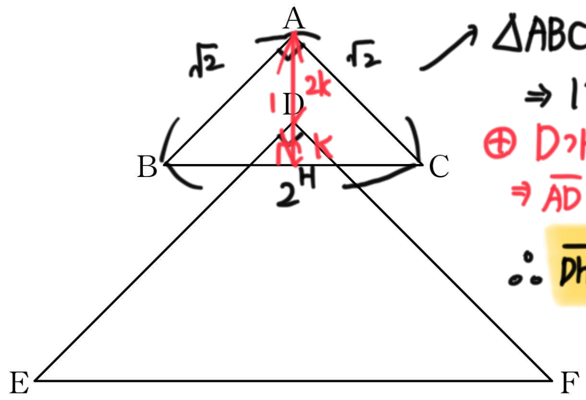
OC를 밑변으로 생각하면 □OACB의 넓이는 △OBC + △OAC로 생각할 수 있고, |B의 x좌표|, |A의 x좌표|를 각각 높이로 생각가능.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times(5a+1)\times a+\frac{1}{2}\times(5a+1)\times 2$

$=\frac{1}{2}(5a+1)(a+2)=7$ 이므로 $a=\boxed{\frac{4}{5}}$ $(a>0)$

닮음 열심히 이용~

18. [그림1]과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{2}$, $\angle CAB=90°$ 인 삼각형 ABC의 무게중심 D에 대하여 $\overline{DE}=\overline{DF}=2\sqrt{2}$, $\angle FDE=90°$ 이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{EF}$ 인 삼각형 DEF가 있다.



[그림1]

→ △ABC는 직각이등변 △

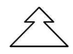
⇒ 1 : 1 : √2 비율 ⇒ $\overline{BC}=2$

⊕ D가 △ABC의 무게중심

⇒ $\overline{AD}:\overline{DH}=2:1$

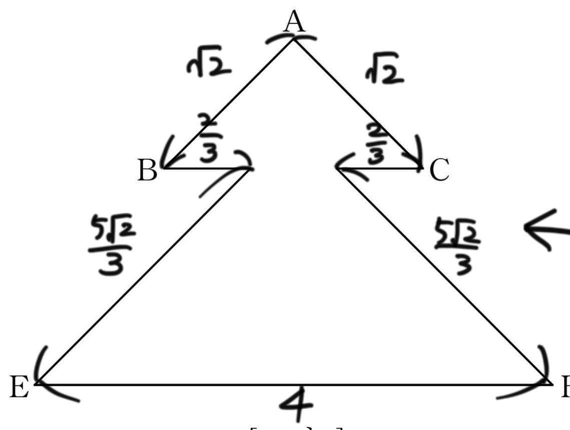
∴ $\overline{DH}=\frac{1}{3}$

[그림2]와 같이 두 삼각형 ABC와 DEF로 만들어지는

 모양 도형의 둘레의 길이는? (단, 점 A는 삼각형 DEF의 외부에 있다.) [4점]

∴ 길이 다 더하면

$\boxed{\frac{16+16\sqrt{2}}{3}}$

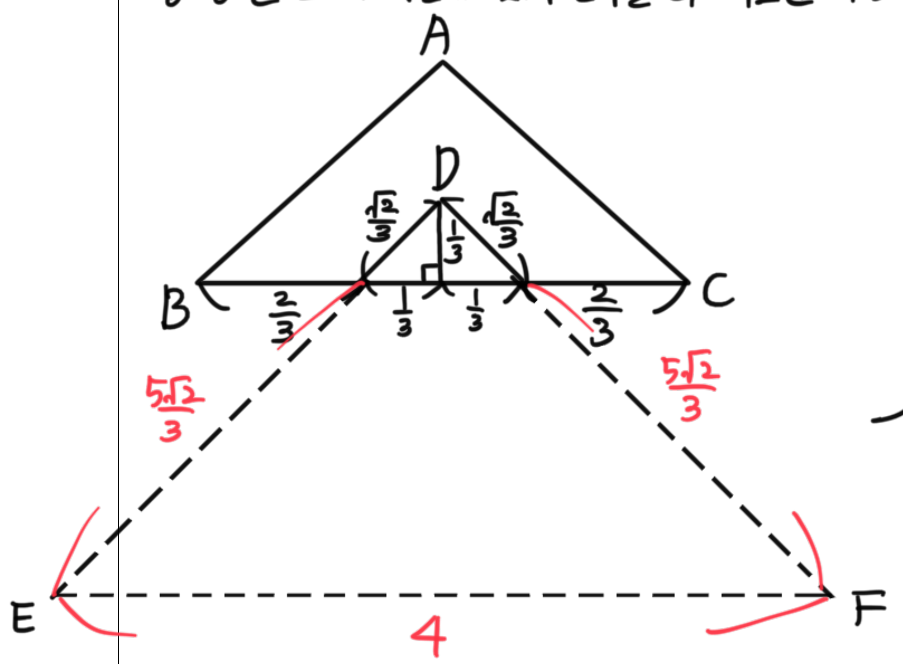


[그림2]

① $\frac{16+16\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{17+16\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{16+17\sqrt{2}}{3}$

④ $\frac{17+17\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{18+17\sqrt{2}}{3}$

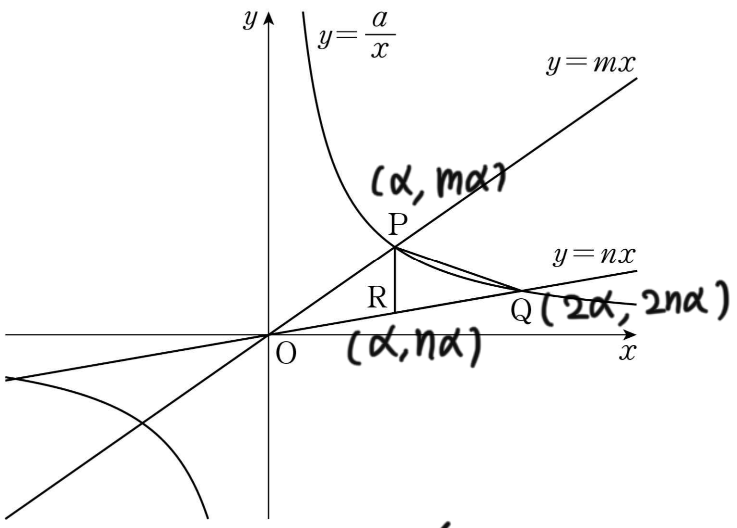
∴ 곧 △의 비율에 맞춰 길이를 다 써보면 다음과 같다.



만든 놈: crazy_hansucktwon (인스타)

알 수 있는 좌표 & 관계식 다 쓰다보면 언젠가 풀림

19. 그림과 같이 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}\,(a>0)$의 그래프가 두 정비례 관계 $y=mx$, $y=nx$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 y축과 평행한 직선이 정비례 관계 $y=nx$의 그래프와 만나는 점 R에 대하여 삼각형 PRQ의 넓이가 $\frac{3}{2}$이다. 점 Q의 x좌표가 점 P의 x좌표의 2배일 때, 실수 a의 값은? (단, $m>n>0$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$P(\alpha, m\alpha)$로 두면 이 점은 $y=\frac{a}{x}$ 위의 점이므로 $m\alpha=\frac{a}{\alpha}$

$\Rightarrow m\alpha^2=a$ ⋯①

R은 $\overline{PR}$이 y축에 평행하므로 $R(\alpha, n\alpha)$로 둘 수 있고, Q의 x좌표는 P의 두 배이므로 $Q(2\alpha, 2n\alpha)$로 둘 수 있다.

$\Rightarrow$ 마찬가지로 $y=\frac{a}{x}$ 위의 점이므로 $2n\alpha=\frac{a}{2\alpha}$

$\Rightarrow 4n\alpha^2=a$ ⋯②

곧 $m\alpha^2=4n\alpha^2=a$에서 $m=4n$이다.

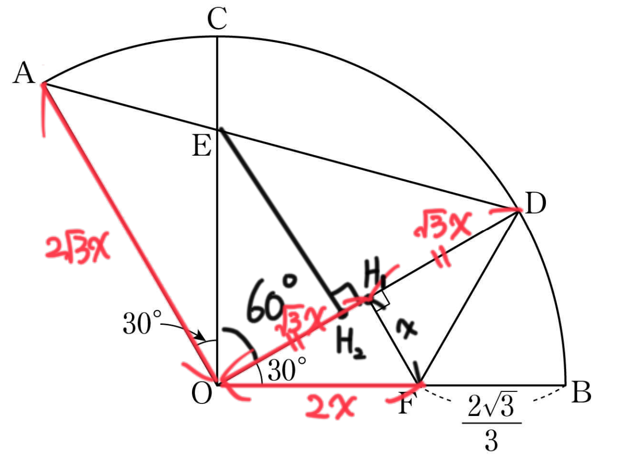
$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times(m\alpha-n\alpha)\times\alpha=\frac{3}{2}$에서 $\alpha^2(m-n)=3$이고, $m=4n$이므로 $\alpha^2(m-n)=\alpha^2\cdot 3n=3$

$\therefore n\alpha^2=1$ ⋯③

결국 ②에 ③을 대입하면 ㉠ $a=\boxed{4}$

삼각형에서 수선의 중요성! 문제 그大로 읽은듯

20. 그림과 같이 중심이 O이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 OAB가 있다. ∠AOC=∠DOB=30°인 호 AB 위의 두 점 C, D에 대하여 선분 OC와 선분 AD가 만나는 점을 E라 하자. 선분 OD의 수직이등분선과 선분 OB가 만나는 점 F에 대하여 $\overline{BF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 삼각형 ODE의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

길이를 알고 있는 것이 거의 없으니 적당한 값 x로 두자.

$\overline{FH_1}=x$로 두면 $\triangle OFH_1$에서 $\angle H_1OF=30°$이므로 $\overline{OH_1}=\sqrt{3}x$

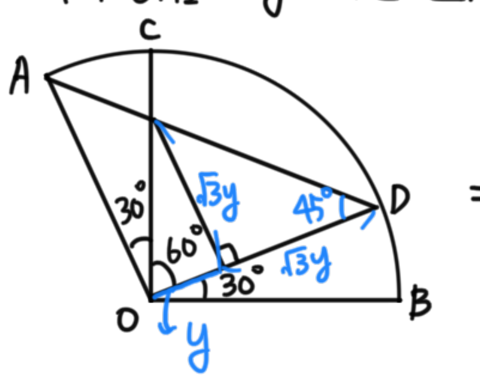
$\overline{OD}$의 수직이등분선과 $\overline{OD}$의 교점이 H_1이므로 $\overline{OH_1}=\overline{H_1D}=2\sqrt{3}x$

$\therefore$ 부채꼴의 반지름: $2\sqrt{3}x$

이 때 $\triangle OFH_1$에서 $\overline{OF}=2x$이므로 $\underbrace{2x+\frac{2\sqrt{3}}{3}}_{\overline{OF}+\overline{FB}}=\underbrace{2\sqrt{3}x}_{\text{반지름}}$

$\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

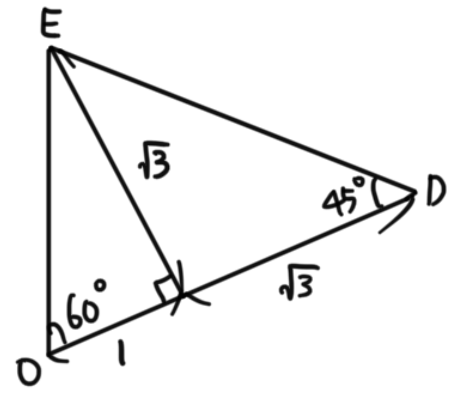
이제 $\overline{OH_2}=y$로 두면 $\triangle AOD$이 직각이등변$\triangle$이므로 $\angle ADO=45°$



$\Rightarrow$ $\overline{OD}=(\sqrt{3}+1)y$이므로 $(\sqrt{3}+1)y=2\sqrt{3}x=\sqrt{3}+1$이다.

$\therefore y=1$

결국 ㉠



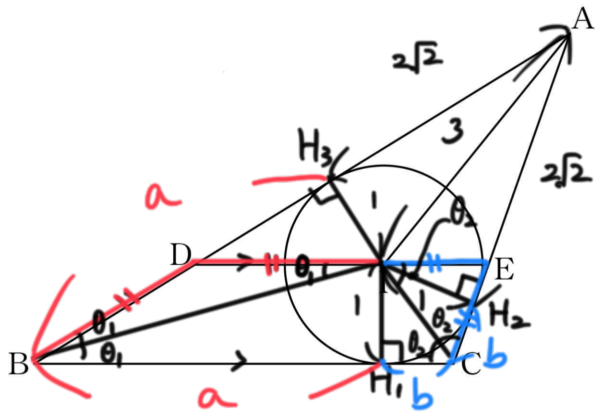
$\triangle ODE$
$=\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}$
$=\boxed{\frac{\sqrt{3}+3}{2}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon(인스타)

보통 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제는 ㄱ이 ㄴ풀때 도움되고, ㄴ이 ㄷ 풀때 도움되는 경우가 많음. 이 문제도 똑같음

⊕ 보조선...

21. 그림과 같이 삼각형 ABC의 내심 I를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. $\overline{AI}=3$이고, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 1이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{2}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



< 보 기 >

ㄱ. $\angle BID = \angle IBD$

ㄴ. 삼각형 ADE의 둘레의 길이는 $7\sqrt{2}$이다.

ㄷ. $\overline{DE}=2\sqrt{2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\overline{BC} // \overline{DE}$ 이므로 $\angle DIB$와 $\angle IBH_1$은 엇각이다.

$\Rightarrow \angle DIB = \angle IBH_1$ 이고, $\overline{BH_3}$과 $\overline{BH_1}$ 모두 내접원에 그은 접선이므로 $\triangle IBH_3$와 $\triangle IBH_1$은 합동이다.

$\Rightarrow \angle IBD = \angle IBH_1$

$\therefore \angle BID = \angle IBH_1 = \angle IBD$

$\Rightarrow \boxed{\angle BID = \angle IBD}$

ㄴ. ㄱ 선지에 의해 $\overline{DB}=\overline{DI}$ 이고, 마찬가지 논리를 $\triangle ICE$에도 적용가능 $\Rightarrow \overline{IE}=\overline{CE}$ 이다.

곧 $\triangle ADE$의 둘레의 길이 : $\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{DE}$ 에서

$\Rightarrow \overline{AD}+\overline{AE}+\overline{DI}+\overline{IE}$

$\Rightarrow \overline{AD}+\overline{AE}+\overline{DB}+\overline{CE} = \overline{AB}+\overline{AC}$

$\overline{AB}$　$\overline{AC}$

이 때 한 변의 길이가 각각 a, b, c이고 내접원의 반지름이 r인 $\triangle$의 넓이 : $\frac{1}{2}r(a+b+c)$ 이므로 $5\sqrt{2} = \frac{1}{2}\times 1 \times ((2\sqrt{2}+a)+(2\sqrt{2}+b)+(a+b))$

$\therefore a+b=3\sqrt{2}$ 이고, ㉠ $\overline{AB}+\overline{AC} = (2\sqrt{2}+a)+(2\sqrt{2}+b)$

$= 4\sqrt{2}+a+b$

$= \boxed{7\sqrt{2}}$

단답형

그저 대입 T

22. 이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 한 근이 $x=3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

그냥 $x=3$ 대입

$\Rightarrow 9-6a+5a=0$

$\Rightarrow a=\boxed{9}$

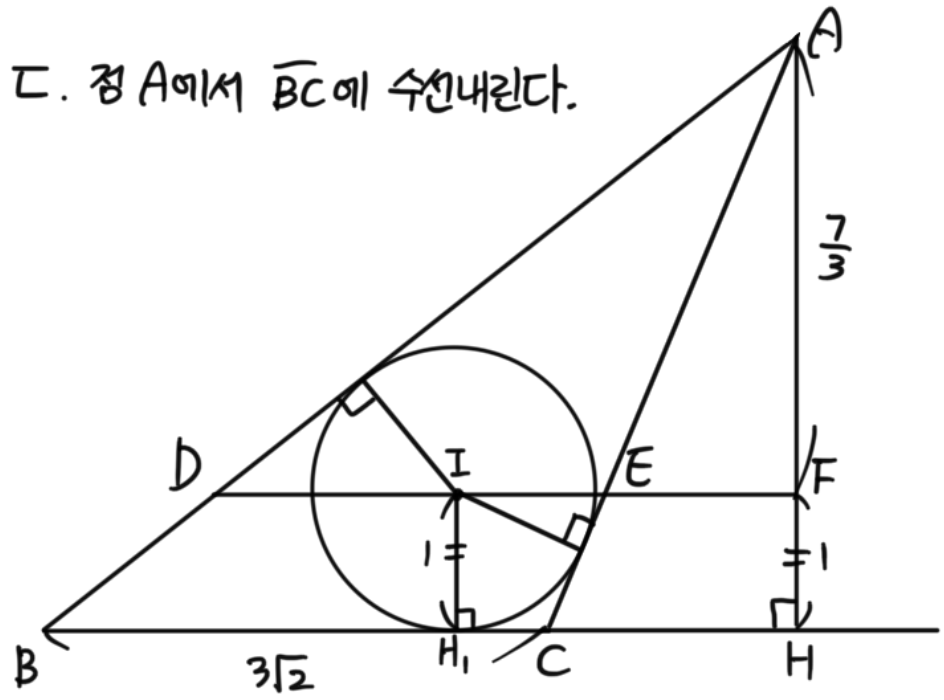
연립해보자 ~

23. 연립일차방정식 $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=11 \end{cases}$ 의 해가 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

두 식을 더하면 $3x=15$　$\therefore x=5, y=1$

㉠ $a+b=\boxed{6}$

ㄷ. 점 A에서 $\overline{BC}$에 수선내린다.



ㄴ에서 $a+b=\overline{BC}=3\sqrt{2}$ 이므로

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH} \Rightarrow 5\sqrt{2} = \frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\overline{AH}$

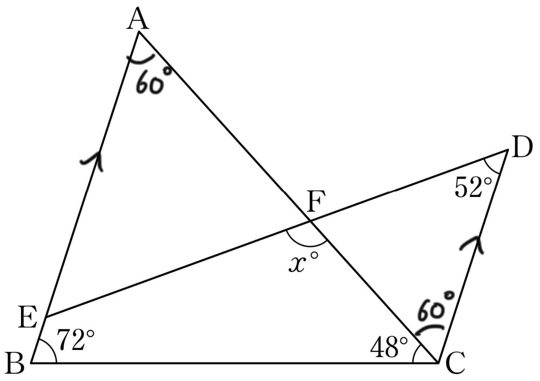
$\therefore \overline{AH}=\frac{10}{3}$ 이고, $\overline{IH_1}=\overline{FH}=1$ 이므로 $\overline{AF}=\frac{7}{3}$

곧 $\overline{AF}:\overline{AH} = \frac{7}{3}:10 = 7:10$ 이고, 이는 $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$ 길이 비와 동일 $\Rightarrow \overline{DE}:\overline{BC} = 7:10$

$\overline{BC}=3\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{DE}=\frac{7}{10}\times 3\sqrt{2}$　$\therefore$ ㉠ $\boxed{\frac{21}{10}\sqrt{2}}$

평행선 → 엇각/동위각 등등 염두해 주시길!

24. 그림과 같이 $\angle B = 72°$, $\angle C = 48°$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 위의 점 D와 선분 AB 위의 점 E에 대하여 $\angle CDE = 52°$ 이다. 선분 DE와 선분 AC의 교점을 F라 할 때, $\angle EFC = x°$ 이다. x의 값을 구하시오. (단, $\angle BCD > 90°$ 이고, 점 E는 점 A가 아니다.) [3점]



$\angle BAC = 66°$ ($\triangle ABC$의 내각의 합 $180°$)

$\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 평행하므로 $\angle BAC$와 $\angle ACD$는 엇각 ⇒ $\angle ACD = 60°$

△의 두 내각의 합 = 한 외각의 크기 = $x°$ 이므로

㉠ $x° = 60° + 52°$

$= \boxed{112°}$

케이스분류해서 열심히! 세보시면 됩니다

25. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $a+b$가 14의 약수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [3점]

14의 약수 : 1, 2, 7, 14

여기서 두 눈의 합은 (1, 1)일 때 2로 최소, (6, 6)일 때 12로 최대

⇒ 2인 경우, 7인 경우만 check.

i) 합 2인 경우 : (1, 1) → 1가지

ii) 합 7인 경우 : (1, 6), (2, 5), ⋮, (6, 1) → 6가지

㉠ $\boxed{7가지}$

이거도 쉽나 오랜만인데… 중앙값이 6.5라는 것의 의미는?

26. 세 실수 a, b, c에 대하여 다음 자료의 중앙값이 6.5, 평균이 6, 최빈값이 c일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점]

9, 5, 6, 4, 8, 1, a, b

알려져 있는 숫자를 작은 것부터 배열해보면

1 4 5 6 8 9 ⊕ a, b

① 평균이 6이므로 $\dfrac{1+4+5+6+8+9+a+b}{8} = 6$

∴ $a+b=15$

② 중앙값이 6.5이므로 6보다 큰 수 중 가장 작은 수는 7이다.

(∵ 총 변량의 개수 8개인데 6보다 작은 변량이 이미 3개.
⇒ 만약 6보다 작은 변량이 a, b 중 있으면 중앙값 6.5 불가능)

곧 a, b 둘 중 하나는 7이고, $a+b=15$이므로 나머지는 8이다.

∴ 1, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9

최빈값 : 8

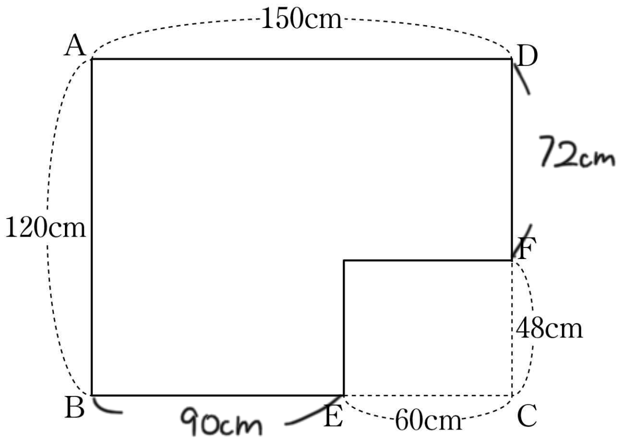
㉠ $a+b+c = 15+8$

$= \boxed{23}$

만든 놈: crazy_hansuckwon (인스타)

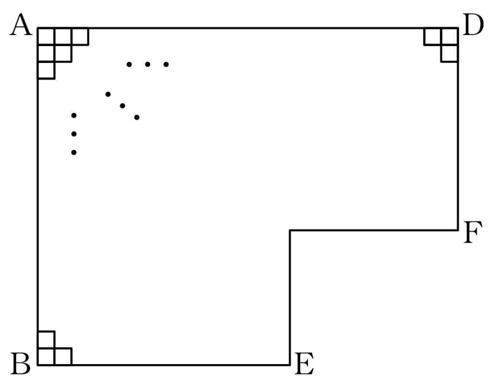
마지막 계산 너무 역겨워요 선생님들 ㅠㅠ 조건해석 잘 해보시길

27. 가로의 길이가 150 cm, 세로의 길이가 120 cm인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. [그림1]과 같이 $\overline{CE}=60$ cm인 선분 BC 위의 점 E와 $\overline{CF}=48$ cm인 선분 CD 위의 점 F에 대하여 두 선분 CE, CF를 변으로 하는 직사각형 모양의 종이를 잘라내고 남은 ⌐ 모양의 종이를 만들었다.



[그림1]

[그림2]와 같이 ⌐ 모양의 종이의 내부에 한 변의 길이가 자연수이고 모두 합동인 정사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않고 빈틈없이 붙이려고 할 때, 붙일 수 있는 종이의 개수의 최솟값을 구하시오. [4점]



[그림2]

종이를 빈틈없이 붙이려면

① 90cm의 길이를 빈틈없이 덮어야 함 → 한 변의 길이 90의 약수

② 72 〃 → 〃 72의 약수

③ 48 〃 → 〃 48의 약수

④ 60 〃 → 〃 60의 약수

곧 90, 72, 60, 48의 최대공약수를 생각해볼 수 있다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 90 & 72 & 60 & 48 \\ \hline & 15 & 12 & 10 & 8 \end{array}$$

최대공약수

⇒ 당연한 소리겠지만 6은 150, 120의 약수이므로 조건에 부합한다.

∴ 종 도형 넓이: $150\times120-60\times48$

$=2^4\times3^2\times5^3-2^6\times3^2\times5$

$=2^4\times3^2\times5\times(5^2-2^2)$ 이고, 이를 한 변의 길이 6인 정사각형으로 채우므로

㉠ □의 개수: $2^4\times3^2\times5\times21\div36$ $2^2\times3^2$

$=2^2\times5\times21$

$=\boxed{420}$

적당한 소인수분해 ⊕ 눈치가 빠르면 시간단축 가능

28. $p<q$인 두 소수 p, q에 대하여 $p^2q<n\le pq^2$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 308일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

$p^2q<n\le pq^2$ 인 자연수의 개수 : pq^2-p^2q

$\Rightarrow pq(q-p)=308$!

이제 뭐… 308 소인수분해해서 적당히 p랑 q 찾으면 되는데

$$\begin{array}{r|l} 2 & 308 \\ \hline 2 & 154 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

⇒ $2^2\times7\times11$. 여기서 전 걍 $p=7$, $q=11$로 두면 $11-7=4$니까 $pq(q-p)=308$을 만족시킨다고 보고 넘어갔는데 제대로 해설을 나름 써보면

문제에서 p, q는 모두 소수이지만 pq는 당연히 소수가 아닙니다.

따라서 $pq=2, 7, 11$은 불가능하고, 2^2, 2×7, 2×11, 7×11인데

i) $pq=2^2 \Rightarrow p=q=2$ (모순)

ii) $pq=2\times7 \Rightarrow p=2, q=7$ ∴ $q-p=5$ (모순)

iii) $pq=2\times11 \Rightarrow p=2, q=11$ ∴ $q-p=9$ (모순)

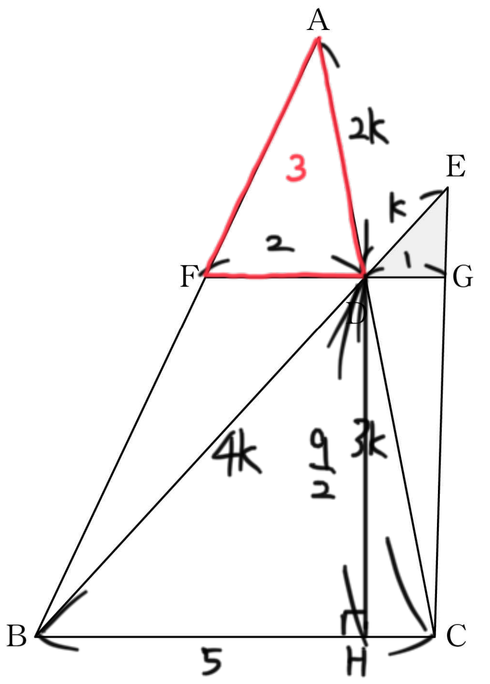
iv) $pq=7\times11 \Rightarrow p=7, q=11$ ∴ $q-p=4$ ☆

∴ ㉠ $p+q=\boxed{18}$

만든 놈: crazy_hansuckwon (인스타)

닮음... 닮음... 또 닮음

29. 그림과 같이 삼각형 ABC의 선분 AC 위의 점 D와 직선 BD 위의 점 E에 대하여 $\overline{DE}:\overline{DA}:\overline{DB}=1:2:4$이다. 점 D를 지나고 직선 BC와 평행한 직선이 두 선분 AB, EC와 만나는 점을 각각 F, G라 할 때, $\overline{FD}=2$, $\overline{DG}=1$이고 삼각형 AFD의 넓이가 3이다. 삼각형 EDG의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 E는 삼각형 ABC의 외부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\overline{DE}:\overline{DA}:\overline{DB}=1:2:4$ 이므로

$\overline{DE}$: k, $\overline{DA}$: 2k, $\overline{DB}$: 4k 로 두자.

닮음 덩어리임★

① $\overline{FG}$와 $\overline{BC}$이 서로 평행하므로 △EDG와 △EBC는 닮음

⇒ 닮음비가 1:5 이므로 $\overline{BC}=5$

② 마찬가지로 △AFD와 △ABC는 닮음

⇒ 닮음비가 2:5 이므로 $\overline{DC}=3k$

곧 △AFD와 △ABC의 넓이비는 닮음비의 제곱이므로

$4:25 = 3:\triangle ABC$

⇒ △ABC의 넓이는 $\frac{75}{4}$ 이고, □FDCB = △ABC − △AFD

⇒ $\frac{63}{4}$

□FDCB의 넓이: $\frac{1}{2}\times(2+5)\times\overline{DH}=\frac{63}{4}$

∴ $\overline{DH}=\frac{9}{2}$ (□FDCB는 사다리꼴)

따라서 □DGCB의 높이: $\frac{9}{2}$ 에서 △EDG의 높이는 $\frac{1}{4}\times\frac{9}{2}=\frac{9}{8}$

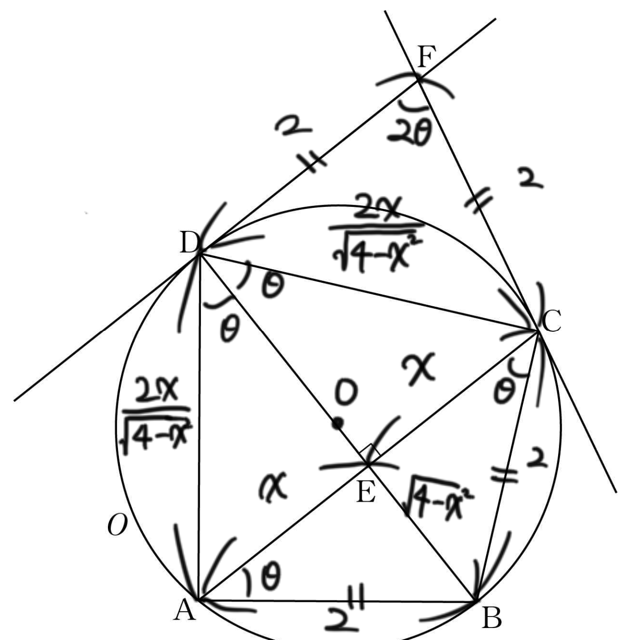
(∵ △EDG와 △EBC 닮음비 1:5)

㉠ $\triangle EDG=\frac{1}{2}\times\frac{9}{8}\times1=\frac{9}{16}$ ∴ $p+q=\boxed{25}$

사각형에 외접하는 원: 원주각 성질 폭탄. 원주각 개많이 나옴

30. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 B를 지나고 직선 AC에 수직인 직선이 원 O와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 선분 AC와 선분 BD가 만나는 점을 E라 하자. 원 O 위의 점 C에서의 접선과 점 D에서의 접선이 만나는 점을 F라 할 때, $\overline{FD}=2$이다.

$\overline{AE}=\frac{a+b\sqrt{17}}{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]



① 한 점에서 원에 그은 접선의 길이는 같다.

⇒ $\overline{FD}=\overline{FC}=2$

② 이등변△의 두 내각의 크기는 같다.

⇒ △ABC가 이등변△ 이므로 ∠BAC = ∠BCA = θ로 두자.

③ 원주각의 성질에 의해 ∠BAC = ∠BDC = θ, ∠BCA = ∠ADB = θ

이때, $\overline{FD}$와 $\overline{FC}$은 접선이므로 원의 중심과 이루는 각이 90° 인데,

$\overline{AC}$을 원의 현으로 생각하면 그 현을 수직이등분하는 선은 원의 "중심"을 무조건 지난다. ⇒ $\overline{BD}$는 원의 지름이고, 그 위 어딘가에 중심이 있다.

⇒ ∠FDE = ∠FDO = 90°, ∠FCE = ∠FCO = 90° 이므로

∠FDC = ∠FCD = 90° − θ 이고, 곧 ∠DFC = 2θ 이므로

△FDC와 △DAC는 닮음

또한, △DAE와 △ABE도 한 내각의 크기가 같은 직각△ 이므로 닮음.

⇒ 변들의 길이를 비례식을 이용해 쓸 수 있다.

$\overline{AE}=x$로 두면 피타고라스 정리에 의해 $\overline{BE}=\sqrt{4-x^2}$ 이고,

$\overline{AB}:\overline{BE}=\overline{DA}:\overline{AE}$ 이므로 $2:\sqrt{4-x^2}=\overline{DA}:x$ ∴ $\overline{DA}=\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$

결국 △FDC와 △DAC에서 $\overline{FD}:\overline{DC}=\overline{DA}:\overline{AC}$

$=2:\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}:2x$

⇒ $x^2+x-4=0$ 이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

㉠ $a^2+b^2=\boxed{2}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.