제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

모르면 이걸 풀 때가 아니라 수학(상) 다시 공부 ㄱ

1. 두 다항식

$$A = x^3 + 2x^2,\ B = 2x^3 - x^2 - 1$$

에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① $x^3 - 3x^2 - 1$ ② $x^3 + x^2 + 1$ ③ $3x^3 + x^2 - 1$
④ $3x^3 + x^2 + 1$ ⑤ $3x^3 + 3x^2 - 1$

$A+B = 3x^3+x^2-1$

음...

2. 실수 x에 대한 조건

'x는 음이 아닌 실수이다.'

의 진리집합은? [2점]

① $\{x \mid x < 0\}$ ② $\{x \mid x \le 0\}$ ③ $\{x \mid x \ne 0\}$
④ $\{x \mid x \ge 0\}$ ⑤ $\{x \mid x > 0\}$

$\{x \mid x \ge 0\}$

순열 공식 아니니?

3. ${}_5\mathrm{P}_3$의 값은? [2점]

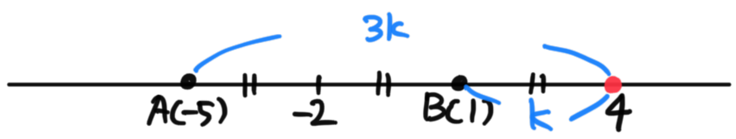
① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3$
$= \boxed{60}$

외분. 기하적으로 봐도 ㄱㅊ, 식으로 봐도 ㄱㅊ

4. 수직선 위의 두 점 A(-5), B(1)에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6



$\sqrt{음수} = \sqrt{양수}\, i$로 바꾸기

5. $(\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① $-4i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ $2i$ ⑤ $4i$

$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^2 = 2+4i-2$

$= \boxed{4i}$

곱셈공식 안 까먹었니?

6. $a+b=2$, $a^3+b^3=10$일 때, ab의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\Rightarrow 10 = 8-3ab\times 2$

$\therefore ab = \boxed{-\frac{1}{3}}$

기울기 곱 -1 : 서로 수직

7. 점 $(6,\ a)$를 지나고 직선 $3x+2y-1=0$에 수직인 직선이 원점을 지날 때, a의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

직선 $3x+2y-1=0$의 기울기 : $-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ 수직인 직선의 기울기 : $\frac{2}{3}$ ($\because$ 기울기 곱 -1)

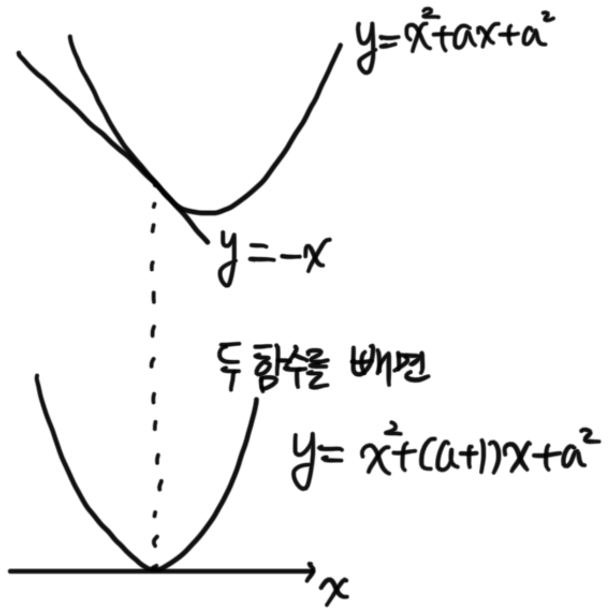
$\therefore$ 이 직선이 원점을 지나므로 $y=\frac{2}{3}x$ 이고, 이 직선은 $(6,\ a)$를 지난다.

㉮ $a=\frac{2}{3}\times 6 = \boxed{4}$

너희가 아직 미분을 못하니 ㅠ

8. 이차함수 $y=x^2+ax+a^2$의 그래프가 직선 $y=-x$에 접하도록 하는 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2



이 함수가 x축에 접하므로 $D=0$

$\Rightarrow (a+1)^2-4a^2=0$ ∴ $a=\boxed{1}$ ($\because a>0$)

$x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선: $xx_1+yy_1=r^2$

9. 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a,\ 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식이 $x-\sqrt{3}y+b=0$일 때, $a+b+r$의 값은? (단, r는 양수이고, a, b는 상수이다.) [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

원의 접선의 방정식: $ax+4\sqrt{3}y=r^2$

$\Rightarrow ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$ 에서 $x-\sqrt{3}y+b=0$과 계수를 맞추려면 $ax+4\sqrt{3}y-r^2$을 -4로 나누면 된다.

∴ $-\frac{a}{4}x-\sqrt{3}y+\frac{1}{4}r^2=x-\sqrt{3}y+b$

곧 $a=-4,\ b=\frac{1}{4}r^2$이고, $x^2+y^2=r^2$ 위에 점$(-4, 4\sqrt{3})$가 존재하므로 $16+48=r^2$ ∴ $r=8$ $(r>0)$이다.

$\Rightarrow a=-4,\ b=16,\ r=8$

㉠ $a+b+r=\boxed{20}$

켤레근의 존재여부

10. 삼차방정식 $x^3+2x-3=0$의 한 허근을 $a+bi$라 할 때, a^2b^2의 값은? (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

$x^3+2x-3=0$ 의 모든 계수가 "실수"

if 계수가 허수이면 켤레근 존재 안 할수도 있음

⇒ 켤레근 존재

⇒ $a-bi$도 근.

1	1	0	2	−3
		1	1	3
	1	1	3	0

$\Rightarrow x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$

두 근 $a+bi$, $a-bi$

근과 계수의 관계
(합): $2a=-1$ ∴ $a^2=\frac{1}{4}$
(곱): $a^2+b^2=3$ ∴ $b^2=\frac{11}{4}$

㉠ $a^2b^2=\frac{1}{4}\times\frac{11}{4}=\boxed{\frac{11}{16}}$

설마 다 세보진 않겠지?

11. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 50 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$$A=\{x \mid x\text{는 30의 약수}\},\ B=\{x \mid x\text{는 3의 배수}\}$$

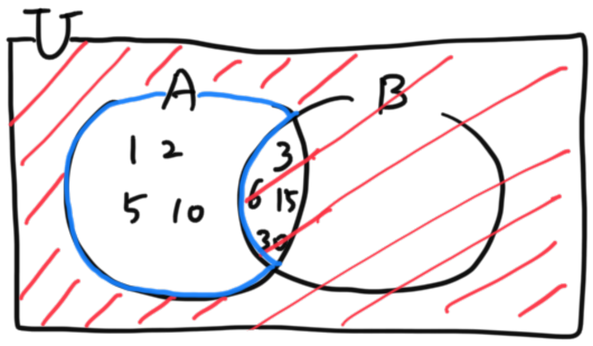
에 대하여 $n(A^C \cup B)$의 값은? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

$U=\{1,2,3,\cdots,50\}$: $n(U)=50$

$A=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$: $n(A)=8$

$B=\{3,6,9,\cdots 48\}$: $n(B)=16$



㉠ $n(A^C \cup B) = \underbrace{n(U)}_{50} - \underbrace{n(A-B)}_{4}$

$= \boxed{46}$

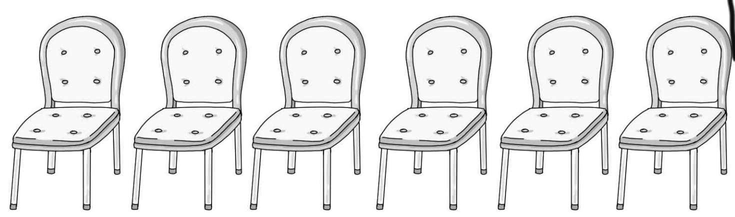
여사건 써도 되고~그냥 풀어도 되고~

12. 1학년 학생 2명과 2학년 학생 4명이 있다. 이 6명의 학생이 일렬로 나열된 6개의 의자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 앉는 경우의 수는? [3점]

(가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다.
(나) 양 끝에 있는 의자에는 모두 2학년 학생이 앉는다.

① 96 ② 120 ③ 144 ④ 168 ⑤ 192

1학년 : 1로 표시
2학년 : 2로 표시



2 _ _ _ _ 2

STEP 1. 양끝에 앉을 2학년 학생을 뽑는 경우

⇒ $_4P_2 = 12$ (사람은 모두 서로 구별된다는 것 주의)

STEP 2. 나머지 4개 자리에 남은 1학년 2명과 2학년 2명 배열

Sol 1) 1학년끼리 이웃하지 않는 경우의 수로 세기

1 2 1 2 , 1 2 2 1 ,

2 1 2 1 3가지

⇒ 3 × 2 (1학년끼리 자리 바꾸는 경우) × 2 (2 〃)

= 12

Sol 2) 1학년이 이웃하는 경우를 전체에서 빼기 (여사건)

1 1 2 2 , 2 1 1 2

2 2 1 1 3가지

⇒ 3 × 2 (1 〃) × 2 (2 〃)

= 12

어쨌든 ㉠ $12 \times 12 = \boxed{144}$

다양한 함수 용어 안 까먹었지?

13. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 f, g, h가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) f는 항등함수이고 g는 상수함수이다.
> (나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $f(x)+g(x)+h(x)=7$
> 이다.

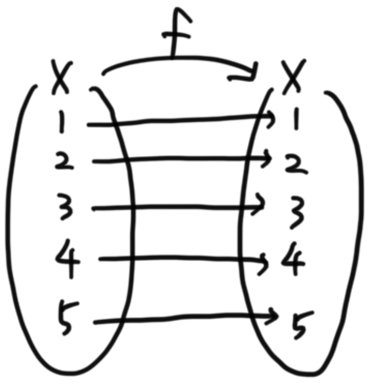
$g(3)+h(1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

항등함수 : 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$

상수함수 : 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $g(x)=c$ (c는 상수)

곧



이다.

(나) "모든" 원소 x에 대한 식이므로

$x=1$: $f(1)+g(1)+h(1) = 1+c+h(1) = 7$ $\therefore c+h(1)=6$

이 때 $g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=g(5)=c$ 이므로

㉮ $g(3)+h(1)=\boxed{6}$

부등식은 항상 음수 유의

14. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+3x-10<0 \\ ax \geq a^2 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 정수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$x^2+3x-10<0$

$\Rightarrow (x+5)(x-2)<0 \Rightarrow -5<x<2$

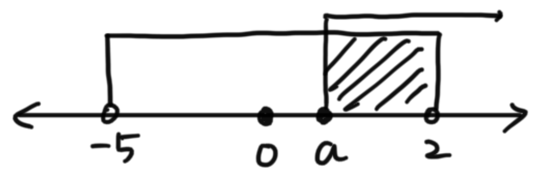
이때, $ax \geq a^2$은 그냥 $x \geq a$가 아님에 유의.

i) $a>0$ 일 때 $x \geq a$

ii) $a<0$ 일 때 $x \leq a$

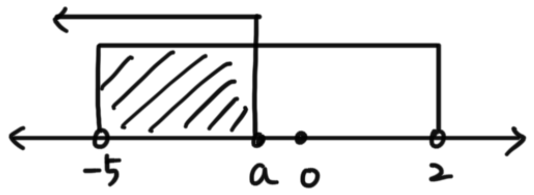
iii) $a=0$ 일 때 x는 모든 실수

i) $a>0$ 일 때 $-5<x<2$ 와의 공통범위



: $a>0$이므로 정수 x 최대 1개. 모순

ii) $a<0$ 일 때 "



: 정수 x가 4개이므로 $x=-4, -3, -2, -1$

$\rightarrow -1 \leq a < 0$

iii) $a=0$ 일 때

가능한 모든 x는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ 6개. 모순

$\therefore$ ㉮ 정수 $a=\boxed{-1}$

나머지정리. 잘 해보세요

15. 다항식 $P(x)$와 상수 a에 대하여 등식

$$x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+ax$$

가 x에 대한 항등식일 때, $P(-2)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

항등식이므로 $x=-2$ 대입해도 성립

$-8-4-6-2=-2a \quad \therefore a=10$

곧 $x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+10x$
$\Rightarrow x^3-x^2-7x-2=(x+2)P(x)$

조립제법

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -7 & -2 \\ & & -2 & 6 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-x^2-7x-2=(x+2)\underbrace{(x^2-3x-1)}_{P(x)}$

㉮ $P(-2)=4+6-1$
$=\boxed{9}$

일대일대응이려면 함수가 어때야 할까? 이정도 추론은 할 수 있잖아

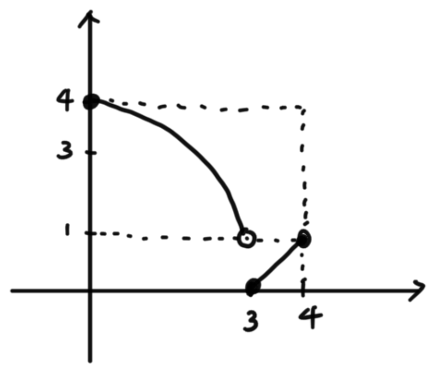
16. 집합 $X=\{x|0\le x\le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & (0\le x<3) \\ x-3 & (3\le x\le 4) \end{cases}$$

가 일대일대응일 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

일대일대응을 만족하는 f는 다음과 같은 경우뿐.



$\therefore ax^2+b$를 $g(x)$라고 두면 $g(0)=4,\ g(3)=1$

$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x^2+4x$

㉮ $g(1)=f(1)=\boxed{\frac{11}{3}}$

풀이엔 안 썼는데, (가) 방정식이 허근을 가진다 ⇒ 판별식 < 0 이거 써도 풀릴듯 ~

풀이가 길어보여도 별거없음

17. 다음 조건을 만족시키는 허수 z가 존재하도록 하는 두 정수 m, n에 대하여 $m+n$의 최솟값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

(가) $z^2+mz+n=0$
(나) $z+\bar{z}=8$

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

$z=a+bi$ 로 놓고, 허수 z이므로 $b\neq 0$ 이다.
(a, b는 "실수")

(나) 조건에서 $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)$
$=2a=8$　∴ $a=4$

곧 $z^2+mx+n=0$
$\Rightarrow (4+bi)^2+m(4+bi)+n=0$
$\Rightarrow (16-b^2+4m+n)+b(8+m)i=0$
① $b(8+m)=0$ 에서 $b\neq 0$ 이므로 $m=-8$이고,
따라서 ② $16-b^2-32+n=n-b^2-16=0$ 에서
$n=b^2+16$ 이다.
$\Rightarrow b^2>0$ ($\because b\neq 0$) 이므로 정수 n의 최솟값 : 17

㉠ $m+n$ 의 최솟값 : $-8+17$
$=\boxed{9}$

18. 실수 x에 대한 두 조건

p : $|x-k|\leq 2$,

q : $x^2-4x-5\leq 0$

이 있다. 명제 $p\rightarrow q$와 명제 $p\rightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [4점]

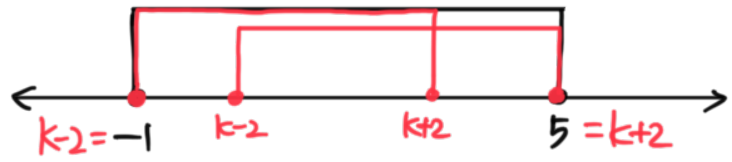
① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

p : 절댓값 : 거리 !
물론 $-2\leq x-k\leq 2$ 으로 있는 그대로 해석해도 되지만 '수직선상에서 점(k) ~ 점(x) 까지의 거리가 2 이하다' 라고 해석하면 좋음

∴ p : $k-2\leq x\leq k+2$

q : $(x-5)(x+1)\leq 0$　∴ q : $-1\leq x\leq 5$

$p\rightarrow q$: $k-2\leq x\leq k+2$ 이면 $-1\leq x\leq 5$ 이다.
대부분의 경우 거짓이므로 전체에서 참인 경우를 빼면

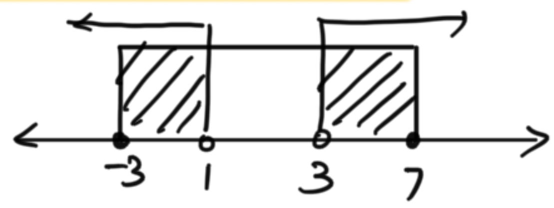


참인 경우 : $1\leq k\leq 3$ ($k-2=-1$ 인 경우 & $k+2=5$ 인 경우)
∴ $p\rightarrow q$는 $k<1$, $k>3$일 때 거짓

$p\rightarrow \sim q$: $k-2\leq x\leq k+2$ 이면 $-1>x$, $x>5$ 이다.
이 친구는 대부분의 경우 참이므로 그냥 거짓인 경우를 보면

거짓인 경우 : $-3\leq k\leq 7$ ($k+2=-1$ 인 경우 & $k-2=5$ 인 경우)
∴ $p\rightarrow \sim q$는 $-3\leq k\leq 7$ 일 때 거짓

둘의 교집합 :



∴㉠ $-3\leq k<1$, $3<k\leq 7$ 이므로
정수 k의 합 : $\boxed{16}$

※ case 분류 안하고 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ 에서 $y=f(x)$와 $y=x$의 두 교점 α, β로 보고 풀어도 아주 좋음. 지면 관계상 안 써놨는데 일하서 각자 해보시길 ㅠ

19. 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는? [4점]

매력오답: 1, 2. 부연설명의 ①과 ②중 하나만 생각하기 쉬움

(가) $\{0\} \subset A \subset \{x \mid x$는 실수$\}$

(나) $a^2-2 \notin A$이면 $a \notin A$이다.

(다) $n(A)=4$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

(가): 집합 A는 원소 0을 포함하고, 모든 원소는 실수.

(나): '$a^2-2 \notin A$이면 $a \notin A$이다'의 대우

$\Rightarrow$ $a \in A$이면 $a^2-2 \in A$

곧 $a=0$일 때도 성립 $\Rightarrow$ -2도 A의 원소

$\Rightarrow$ $a=-2$일 때도 성립 $\Rightarrow$ 2도 A의 원소

∴ 집합 A는 $0, -2, 2$를 원소로 가진다.

($\because$ $a=2$ 대입하면 $a^2-2=2$라서 의미 ×)

(다)에서 $n(A)=4$이기 때문에 $0, -2, 2$가 아닌 원소를 하나 더 가져야 하는데 $a \neq a^2-2$이거나 $a^2-2 \neq 0, -2, 2$이면 원소가 2개 증가한다 $\Rightarrow$ $n(A) \geq 5$으로 모순

i) $a=a^2-2$인 경우 $a=-1$이고 ($\because a \neq 2$)

이 경우 $A=\{-2, -1, 0, 2\}$

ii) $a^2-2=0$인 경우 $a=\pm\sqrt{2}$이고

이 경우 $A=\{-2, -\sqrt{2}, 0, 2\}$, $\{-2, 0, \sqrt{2}, 2\}$

iii) $a^2-2=-2$인 경우 $a=0$이고

이 경우는 $A=\{-2, 0, 2\}$이므로 $n(A)=3$ ∴ 모순

iv) $a^2-2=2$인 경우 $a=\pm 2$이고

이 경우도 $n(A)=3$ ∴ 모순

∴ ㉠ A의 개수: $\boxed{3개}$

부연설명 (더 쉽게 설명)

원소가 1개 더 생기는 경우

① 이번 새로운 a를 택했을 때 $a=a^2-2$으로 같은 경우 ($a \neq -2, 0, 2$)

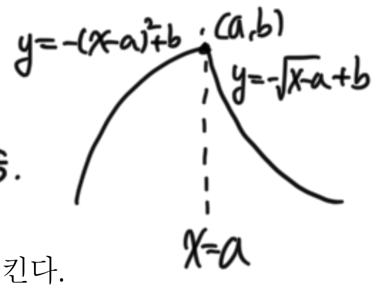
② 〃 a^2-2가 원래 원소 $-2, 0, 2$와 동일한 경우

20. 함수

(가) 조건 해석 중요. 고3에도 많이 나오는 해석

$$f(x)=\begin{cases} -(x-a)^2+b & (x \leq a) \\ -\sqrt{x-a}+b & (x > a) \end{cases}$$

(a, b) 지난다 $\Rightarrow$ $f(x)$ 연속.



와 서로 다른 세 실수 α, β, γ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 α, β, γ뿐이다.

(나) $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$

$\alpha+\beta+\gamma=15$일 때, $f(\alpha+\beta)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

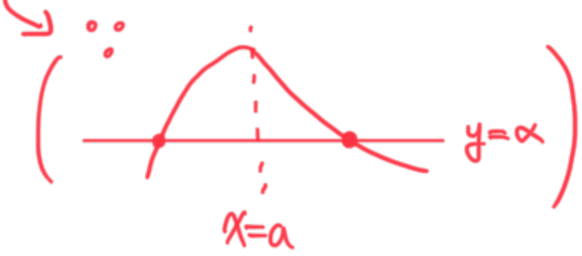
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(가) $f(x)=\alpha$ OR $f(x)=\beta$를 만족하는 x가 α, β, γ뿐

$\Rightarrow$ α가 b가 아니면 무조건 $f(x)=\alpha$을 만족하는 x는 2개

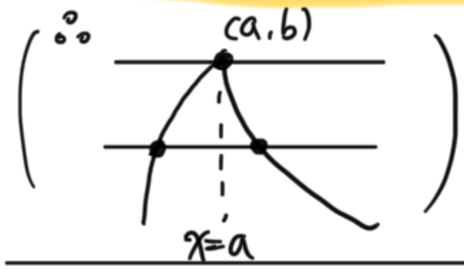
당연히 β도 마찬가지.

∵



곧 (가) 조건을 만족하려면 α와 β 둘 중 하나는 b이어야 한다.

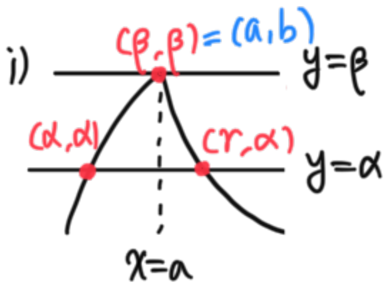
∴



↳ 조건 (나)를 반영해 α, β, γ의 위치를 정해보자.

2가지 case 나옴.

i)



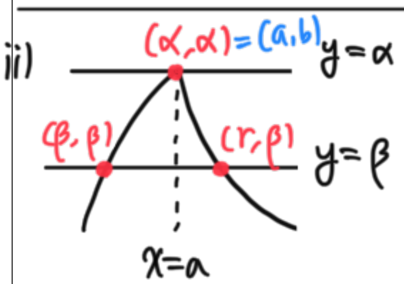
$a=b=\beta$에서 $\begin{cases} y=-(x-\beta)^2+\beta \\ y=-\sqrt{x-\beta}+\beta \end{cases}$

$\Rightarrow$ 각각에 (α, α), (γ, α) 넣어서 정리하면

$\alpha-\beta=-1$, $\gamma-\beta=1$ $\Rightarrow$ $\alpha=\beta-1$, $\gamma=\beta+1$

곧 (나) $\alpha+\beta+\gamma=3\beta=15$ ∴ $\alpha=4$, $\beta=5$, $\gamma=6$

ii)



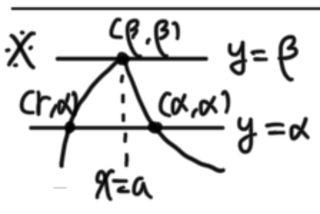
$a=b=\alpha$에서 $\begin{cases} y=-(x-\alpha)^2+\alpha \\ y=-\sqrt{x-\alpha}+\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow$ 각각에 (β, β), (γ, β) 넣어서 정리하면

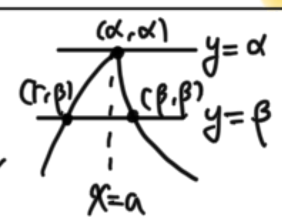
$\beta-\alpha=-1$, $\gamma-\alpha=1$ $\Rightarrow$ $\beta=\alpha-1$, $\gamma=\alpha+1$

곧 동일하게 $\alpha=5$, $\beta=4$, $\gamma=6$

※



,



은 α, β 대소관계에 모순.

∴ i), ii) 모두 $a=b=5$이고, 구하는 값은 $f(9)$이므로

㉠ $f(\alpha+\beta)=f(9)=-\sqrt{9-5}+5$

$=\boxed{3}$

만든놈: crazy_hansuckwon

굳이 A'을 정의한 이유가 뭘지 의심하고 이용할 생각해야 함. [ㄷ보기 잘 풀어보시길]

21. 좌표평면 위에 사분원의 호 $C: x^2+y^2=25\,(x\le 0,\ y\ge 0)$과 점 A(4, 2)가 있다. 호 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q를 삼각형 APQ의 무게중심이 원점과 일치하도록 잡는다. 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

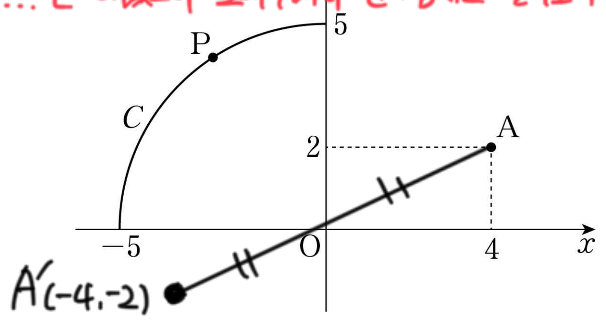
ㄱ. 선분 PQ의 중점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이다.

ㄴ. 선분 A′Q의 길이는 항상 일정하다.

ㄷ. 삼각형 A′QP의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M\times m=20\sqrt{5}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼각함수를 배웠으면 극좌표를 이용해 $P(5\cos\theta, 5\sin\theta)$ $(\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi)$로 놓고 풀었겠지만... 안 배웠으니 모래주머니 단 셈치고 풀어보자.



ㄱ. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$으로 두면 △APQ의 무게중심

$\Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2+4}{3}, \frac{y_1+y_2+2}{3}\right)=(0,0)$

$\therefore x_1+x_2=-4,\ y_1+y_2=-2$ 이므로 $\overline{PQ}$ 중점: $(-2,-1)$

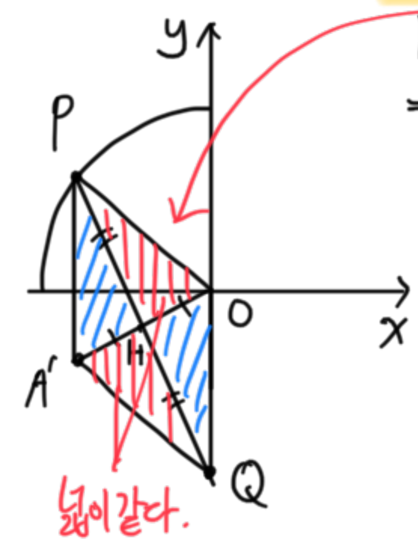
ㄴ. $x_2=-4-x_1$, $y_2=-2-y_1$ 이므로 $A'(-4,-2)$ 에

$\overline{A'Q}$를 구하면 $\overline{A'Q}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ 이고, $P(x_1,y_1)$는 $x^2+y^2=25$ 위의 점. $\Rightarrow x_1^2+y_1^2=25$ $\therefore \overline{A'Q}=5$로 일정

ㄷ. $\overline{A'Q}=5$로 일정하다는 것은 Q가 $A'(-4,-2)$를 중심으로 하고 반지름 길이가 5인 원 위의 점이라는 뜻으로 해석할 수 있지만 이 문제에서 굳이 필요하지는 X. 굳이 왜 A'을 정의했을까? 고민해봐야 함

ㄱ의 결론: $\overline{PQ}$의 중점 $(-2,-1)$, $\overline{OA'}$의 중점: $(-2,-1)$

$\Rightarrow$ 중점 일치하므로 □PA′QO는 사다리꼴! $\Rightarrow \triangle A'QP=\triangle A'OP$ ☆☆



Max: 점 P에서 $\overline{OA'}$에 내린 수선의 발을 H로 두면

$\Rightarrow \overline{OA'}$는 $2\sqrt{5}$로 일정하므로 $\overline{PH}$가 높이 역할이자 넓이에 관여하는 유일한 값. $\Rightarrow \overline{OA'}$ 기울기와 동일한 기울기의 접선을 점 P에서 가질 때가 최대 $\therefore xx_1+yy_1=25$ 에서 접선의 기울기: $-\frac{x_1}{y_1}$

$\overline{OA'}$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 $-2x_1=y_1 \Rightarrow x_1^2+y_1^2=25$에 대입

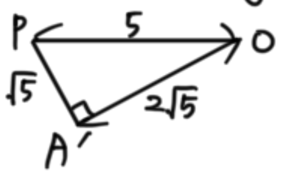
$\Rightarrow P(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$이고, 그 때의 $\overline{PH}=\frac{|-\frac{\sqrt{5}}{2}-2\sqrt{5}|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2}}=5$ ($\because \overline{OA'}: y=\frac{1}{2}x$)

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 5=5\sqrt{5}$ (Max)

(물론 최대가 될 때는 H=O 이고, $\overline{PH}$: 원의 반지름일 때로 직관적으로 봐도 무방)

min: $\overline{OA'}$의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 그에 수직인 기울기가 −2인 직선과 $x^2+y^2=25\ (x\le 0, y\ge 0)$가 처음으로 만날 때가 높이의 최솟값이고, 이 때의 P는 P(−5, 0)이다. 곧

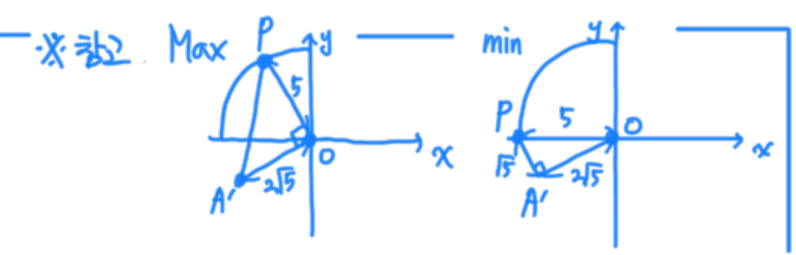
점 A′~(−5, 0)까지 기울기가 딱하게 −2!



에서 $\overline{PA'}=\sqrt{5}$

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ (min)

※ 참고



㉠ $M\times m=\boxed{25\sqrt{5}}$

단답형

교집합 모르진 않지?

22. 두 집합

$A=\{-7,\ -5,\ 3\},\ B=\{-7,\ -5,\ 9\}$

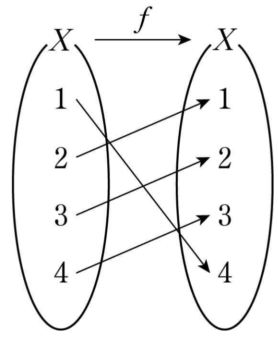
에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 곱을 구하시오. [3점]

$A\cap B=\{-7,-5\}$

㉠ $(-7)\times(-5)=\boxed{35}$

그저 합성함수의 대응관계 ⊕ 역함수

23. 그림은 함수 $f: X\to X$를 나타낸 것이다.



$(f\circ f)(1)+f^{-1}(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(f(1))=f(4)=3$

$f^{-1}(1)=k$로 두면 $f(k)=1$ $\therefore k=2$

㉠ $3+2=\boxed{5}$

만든놈: crazy_hansuckwon

나머지정리 - 나머지는 다항식에 값을 대입만 해도 알 수 있다!

24. 다항식 $P(x)$를 x^2+3으로 나눈 몫이 $3x+1$, 나머지가 $x+5$일 때, $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

$P(x)=(x^2+3)(3x+1)+(x+5)$

$P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지: $P(1)$

$\Rightarrow P(1)=4\times4+6$

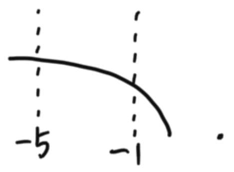
$=\boxed{22}$

무리함수의 개형 (부호 유의)

25. $-5\le x\le -1$에서 함수 $f(x)=\sqrt{-ax+1}$ $(a>0)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=\sqrt{-ax+1}$

$=\sqrt{-(ax-1)}$ 이다.

$a>0$ 이므로 $f(x)$ 개형은  .

곧 $x=-5$일 때 $f(x)$는 최댓값 4를 가지며,

$\sqrt{5a+1}=4$ $\therefore$ ㉠ $a=\boxed{3}$

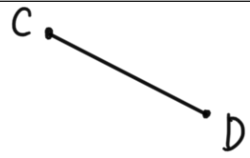
직선의 기울기, 별거아님

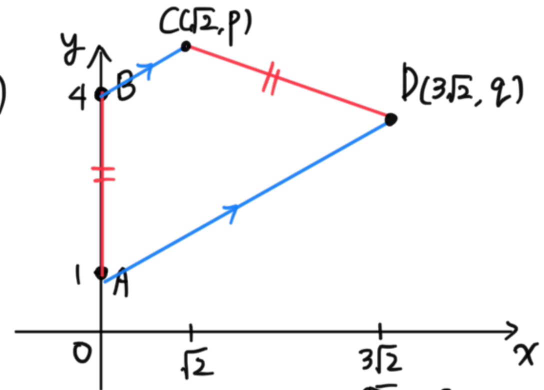
26. 좌표평면 위의 네 점

A(0, 1), B(0, 4), C($\sqrt{2}$, p), D($3\sqrt{2}$, q)

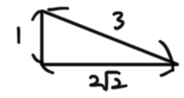
가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 직선 CD의 기울기는 음수이다.
(나) $\overline{AB}=\overline{CD}$이고 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이다.

(가)  $\Rightarrow p>q$

(나) 

이므로

① $\overline{AB}=3$ 에서 $\overline{CD}=3$  $\therefore p=q+1$

② $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{AD}$ 에서 $\dfrac{p-4}{\sqrt{2}-0}=\dfrac{q-1}{3\sqrt{2}-0}$ $\therefore 3(p-4)=q-1$

$\Rightarrow 3p-q=11$

곧 $p=q+1$과 $3p-q=11$을 연립하면

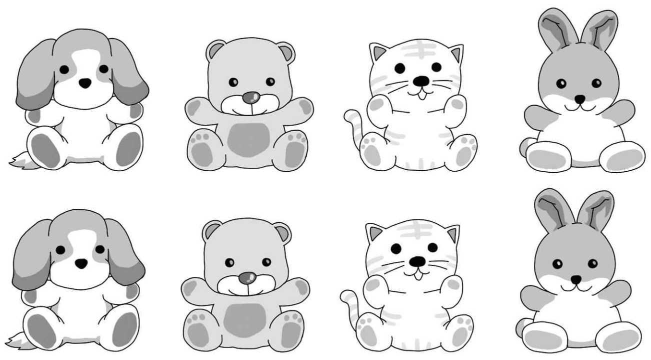
$p=5,\ q=4$

$\therefore$ ㉠ $p+q=\boxed{9}$

만든놈: crazy_hansuckwon

인형끼리 서로 구별안된다는 게 ㄹㅇ 개꿀

27. 서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있다. 이 8개의 인형 중에서 5개를 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 인형끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]



i) 3종류의 인형 고르기 ⇒ (2, 2, 1)

STEP 1. 2개씩 고를 인형 종류 정하는 경우의 수 : ${}_4C_2 = 6$

STEP 2. 나머지 2종류 인형 중 1개를 뽑는 경우의 수 : 2

⇒ $6 \times 2 = 12$

ii) 4종류의 인형 고르기 ⇒ (2, 1, 1, 1)

STEP 1. 2개씩 고를 인형 종류 정하는 경우의 수 : 4

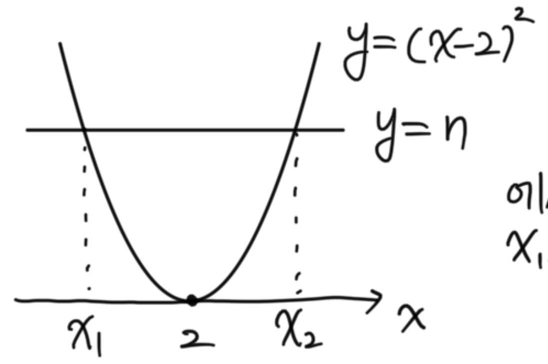
STEP 2. 나머지 인형들은 하나씩 고르면 되므로 1가지

⇒ $4 \times 1 = 4$

㉠ $12 + 4 = \boxed{16}$

절댓값 나왔다고 던지지 말고 차근차근 case 분류

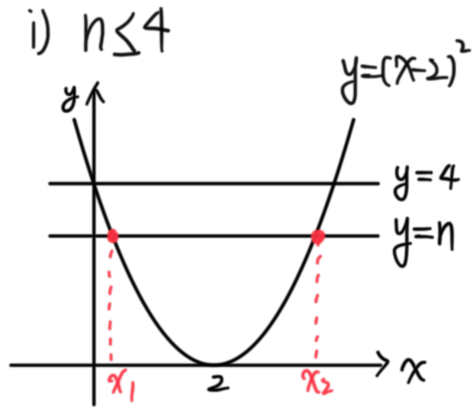
28. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자. $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]



에서 $x_2 > 2$ 이므로 x_1과 0의 대소비교만 하면 된다.

$y=(x-2)^2$에 $x=0$을 대입하면 $y=4$이고, 따라서 $y=4$를 기준으로 상황이 달라짐을 알 수 있다.

i) $n \le 4$

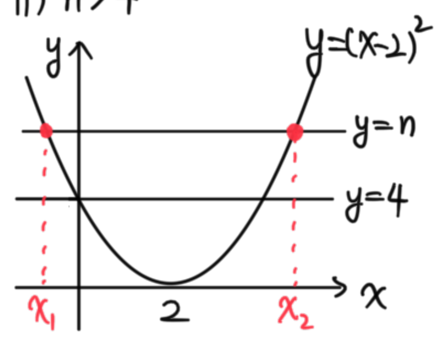


$\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2} = \dfrac{x_1+x_2}{2}$: 대칭성에 의해 n의 값에 관계없이

∴ $x_1+x_2=4$ 이므로 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=2$

⇒ 자연수! ∴ $n=1, 2, 3, 4$

ii) $n > 4$



$\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2} = \dfrac{-x_1+x_2}{2}$: 마찬가지로 대칭성에 의해서 $x_1+x_2=4$

⇒ $x_1 = 4 - x_2$ 이므로 $\dfrac{-x_1+x_2}{2} = x_2 - 2$

x_2-2이 자연수인데, $x_1<0$ 이므로 $x_2>4$이고, 곧 $x_2=5$일 때부터 보자.

$x_2=5$일 때 $n=(5-2)^2=3^2$이고, $x_2=6$일 때 $n=(6-2)^2=4^2$

$\cdots$ $x_2=12$일 때 $n=(12-2)^2=10^2$

∴ 가능한 n : $3^2, 4^2, \cdots 10^2$ 총 8개

㉠ n의 개수 : $4+8=\boxed{12}$

살짝 기하 같기 느낌도 좀 나는것 같기도 하고... 그냥 $y=\frac{4}{3}x+n$ 으로 두고 풀어도 됨.

결국은 특수한 경우가 답임.

만든놈: crazy_hansuckwon

29. 원 $(x-6)^2+y^2=r^2$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고, 점 Q를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점의 좌표를 (x_2, y_2)라 하자. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 최솟값이 0이고 최댓값이 $\frac{4}{3}$일 때, $|r+k|$의 값을 구하시오. (단, $x_1 \neq x_2$이고, r는 양수이다.) [4점]

① $(x-6)^2+y^2=r^2 \xrightarrow{y=x\text{대칭}} (x_1,y_1)$

⇒ (x_1,y_1)은 원 $(x-6)^2+y^2=r^2$을 $y=x$ 대칭한 $x^2+(y-6)^2=r^2$ 위의 점

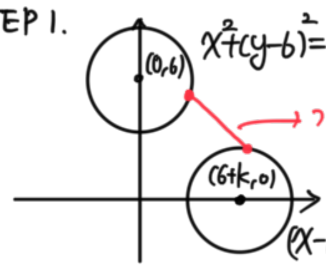
② $(x-6)^2+y^2=r^2 \xrightarrow{x\to k\text{ 평행이동}} (x_2,y_2)$

⇒ (x_2,y_2)은 마찬가지로 $(x-(6+k))^2+y^2=r^2$ 위의 점

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ 이은 직선의 기울기 ⇒ 최솟값이 0이라는 조건?

⇒ (x_1,y_1), (x_2,y_2) 어떤 점을 잡아도 두 점을 이은 직선의 기울기 음수 X

STEP 1.



$x^2+(y-6)^2=r^2$

기울기음수 : 모순.

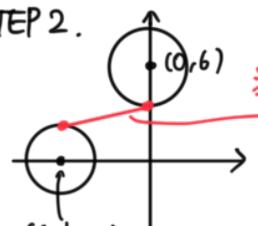
"언제 모순이 안 생길까?"

⇒ 일단 $6+k$이 많이 왼쪽으로 가야하지 않을까?

$(x-(6+k))^2+y^2=r^2$

($(x-(6+k))^2+y^2=r^2$의 모든 점이 $x^2+(y-6)^2=r^2$의 모든 점보다 왼쪽에 있어야 한다!)

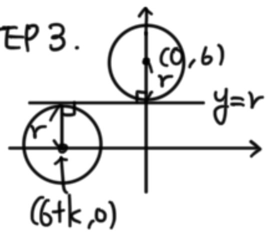
STEP 2.



최솟값 양수 : 모순

⇒ $x^2+(y-6)^2=r^2$ 위의 점 중 가장 아래에 있는 점, $(x-(k+6))^2+y^2=r^2$ 위의 점 중 가장 위에 있는 점 → y좌표 동일!

STEP 3.

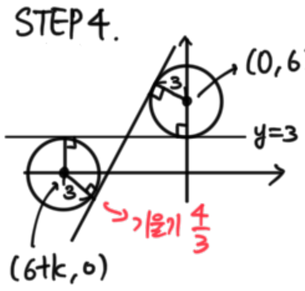


에서 $6-r=r$ ∴ $r=3$

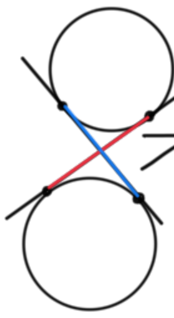
⇒ "최댓값이 $\frac{4}{3}$이라는 조건 어떻게 해석?"

⇒ 두 점을 이은 직선의 기울기 최대가 될 때 생각

STEP 4.



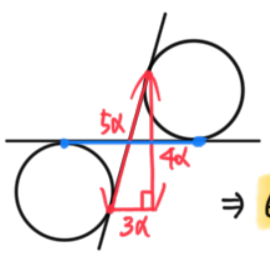
에서



"길이같음"

성질을 이용하면 좋다!

사실 이 문제는 꼭 필요하진 않긴 함 ㅋㅋ...



으로 두면 ― 도 위 성질에 의해 5α이다.

⇒ $6+k=-5\alpha$ 이고, 에서 •의 좌표는 $(-\frac{5}{2}\alpha, 3)$

곧 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선(두 원의 공통접선)이 $(-\frac{5}{2}\alpha,3)$을 지나므로 $y=\frac{4}{3}(x+\frac{5}{2}\alpha)+3$

⇒ y축 위의 원의 중심 $(0,6)$까지 이르는 거리 $r=3$

∴ 점과 직선 사이의 거리 : $\frac{|-6+\frac{10}{3}\alpha+3|}{\sqrt{(\frac{4}{3})^2+(-1)^2}}=3$ ∴ $\alpha=\frac{12}{5}$ $(\alpha>0)$

곧 $6+k=-5\alpha$ 에서 $k=-18$ 이고, ㉠ $|r+k|=\boxed{15}$

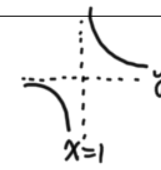
30. 두 실수 $a\,(a<1)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-a}{x-1}+2 & (x\le a)\\ bx(x-a)+1 & (x>a)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 a, b의 모든 순서쌍이 (a_1, b_1), (a_2, b_2)일 때, $-40\times(a_1+b_1+a_2+b_2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(-2)$이다. (나) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

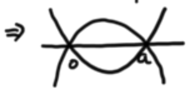
$f(x)=\begin{cases}\frac{1-a}{x-1}+2 & (x\le a)\\ bx(x-a)+1 & (x>a)\end{cases}$:



$y=2$ (∵ $a<1$ 이므로 $1-a>0$)

$x=1$

⇒

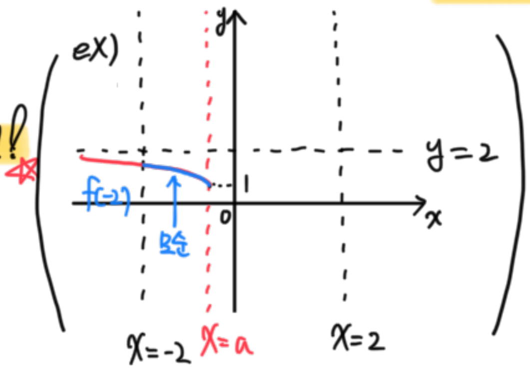


$y=1$

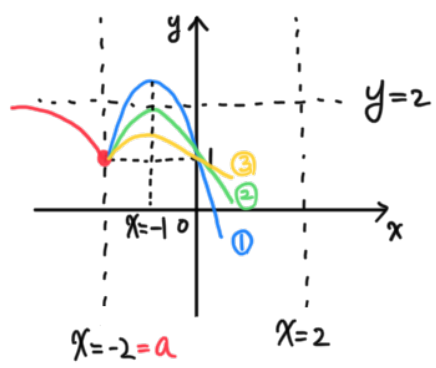
일단 각 함수에 $x=a$을 대입하면 둘 다 $(a,1)$을 지난다. ⇒ 연속한다.

(가) 조건을 해석하기 위해 $f(x)\ge f(-2)$에 집중해보면 $x\le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값을 가진다 ⇒ $a>-2$이면 불가능! ⇒ $a\le -2$이다.

ex)



i) $a=-2$일 때 $y=bx(x-a)+1$은 $(a,1)$, $(0,1)$을 지나므로 b의 값에 따라



3가지로 분류되는데 ($b>0$이면 (가) 조건 위배)

①의 경우인 $|f(x)|=2$의 실근 3개 : 모순

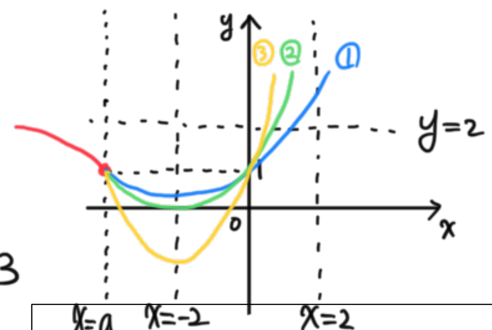
②의 경우 $|f(x)|=2$의 실근 2개

③의 경우 $|f(x)|=2$의 실근 1개 : 모순

∴ $y=bx(x-a)+1$은 $(-1,2)$를 지나고, $a=-2$이므로 $b=-1$이다. ⇒ $(a_1,b_1)=(-2,-1)$

(물론 $b=0$일 때는 (나) 조건 만족 X)

ii) $a<-2$일 때 마찬가지로 b의 값에 따라 case 분류되고 $x=-2$에서 최소여야 한다.



3가지로 분류되는데 ($b<0$이면 (가) 조건 위배)

①은 $|f(x)|=2$ 실근 1개

②도 $|f(x)|=2$ 실근 1개

③은 정확히 $(-2,-2)$를 지날때 $|f(x)|=2$ 실근 2개

∴ $y=bx(x-a)+1$은 $(-2,-2)$를 지나고, 대칭성에 의해 $\frac{a+0}{2}=-2$ 이므로 $a=-4$이다.

⇒ $b=\frac{3}{4}$이다. ⇒ $(a_2,b_2)=(-4,\frac{3}{4})$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

㉠ $-40(a_1+a_2+b_1+b_2)=\boxed{250}$