2023 MINIRING CURRICULUM

SECOND STORY

미적분

두번째 이야기. 2022학년도 기출

“

고양이는 사실
액체로 구성되어 있다

”

STORY 02

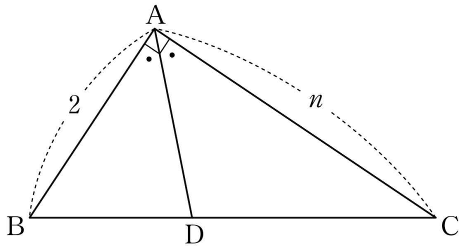
2022학년도 교육청 & 평가원 기출문제

이번주 띵언 | 고양이는 사실 액체인 것이다

001 [2021학년도 3월 미적분 28번]

자연수 n에 대하여 $\angle \mathrm{A}=90°$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{CA}}=n$인 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n-a_n)$의 값은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

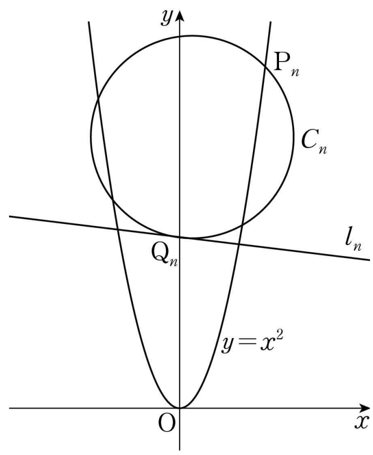


PICK

결국 어떤 방식으로든 극한을 구하려면 식을 구해야 한다.
점의 위치 변화 양상을 관찰하고 식을 세워보자.

002 [2021학년도 3월 미적분 29번]

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n, 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0, 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]



PICK

지수로 된 극한은 밑이 다음의 다섯 경우인 경우로 나뉜다.
$a>1$, $a=1$, $-1<a<1$, $a=-1$, $a<-1$
불연속인 점을 지날 때 빠먹는 경우가 없는지 확인하자.

003 **[2021학년도 3월 미적분 30번]**

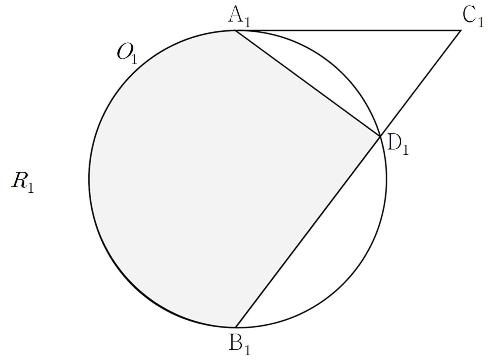
자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

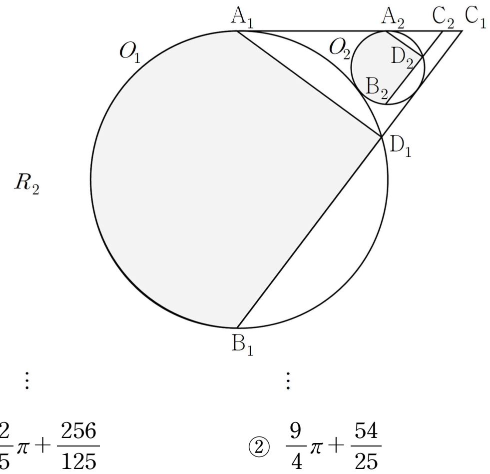
PICK

극한 $f(n)+g(n)$을 구할 때는 도형을 붙이고 떼는 방법, $f(n)-g(n)$을 구할 때는 겹치는 부분을 포함해서 생각하는 방법이 있다.
O, Q_n, H_n으로 둘러싸인 부분을 포함하여 $f(n)-g(n)$의 넓이를 구하는 방법을 고찰해보자.

004 **[2021학년도 4월 미적분 28번]**

그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle B_1A_1C_1=\frac{\pi}{2}$, $\overline{A_1B_1}:\overline{A_1C_1}=4:3$이 되도록 점 C_1을 잡고 두 선분 A_1C_1, B_1C_1을 그린다. 원 O_1과 선분 B_1C_1의 교점 중 B_1이 아닌 점을 D_1이라 하고, 점 D_1을 포함하지 않는 호 A_1B_1과 두 선분 A_1D_1, B_1D_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 호 A_1D_1과 두 선분 A_1C_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 A_1C_1과 원 O_2의 교점을 A_2, 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 점 D_2를 포함하지 않는 호 A_2B_2와 두 선분 A_2D_2, B_2D_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



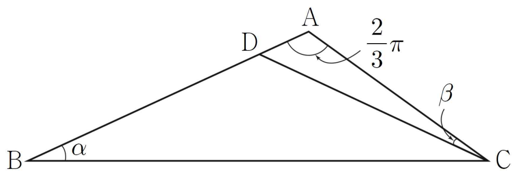


⋮　　　　⋮

① $\frac{32}{15}\pi+\frac{256}{125}$　② $\frac{9}{4}\pi+\frac{54}{25}$
③ $\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$　④ $\frac{9}{4}\pi+\frac{108}{25}$
⑤ $\frac{8}{3}\pi+\frac{128}{25}$

005 [2021학년도 4월 미적분 29번]

그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{CBD}=\alpha$, $\angle \mathrm{ACD}=\beta$라 하자. $\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3}\times\tan\beta$의 값을 구하시오. [4점]



PICK

외접원의 반지름은 결국 사인법칙을 쓰라는 의미이다.
그럼 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이도 구할 수 있고, m_1, m_2을 구할 수 있다.
각 B, 각 C이 어떤지 잘 관찰해보자.

006 [2021학년도 4월 미적분 30번]

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2} \quad (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

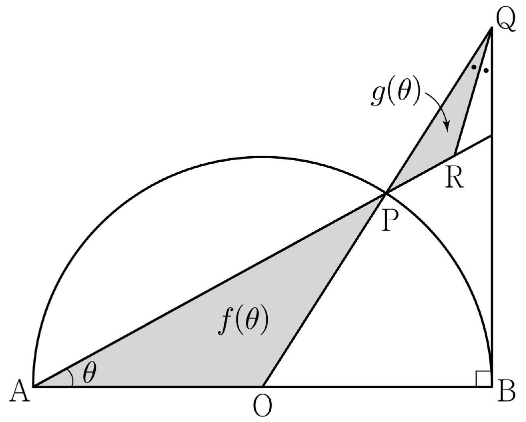
라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다. $k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오. [4점]

PICK

극한값이 존재한다는 것 역시 출제자가 파 놓은 숨은 조건임을 유의하자. 아무렇지 않아 보여도 은근히 중요하다.
어떤 방정식의 해가 $x=\alpha$일 때, $x=-\alpha$도 해가 될 수 있다.
이러한 조건은 매우 강력한 요소가 되므로 주의하자.

007 [2022학년도 6월 미적분 28번]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{OAP}=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

PICK

$x=k$에서 불연속 이라는 말은 그 점만 보라는 것이 아니다. $x=k$를 제외한 나머지 모든 점에서 연속이라는 점도 주목해야 한다. 또한, 실근의 개수는 특수한 케이스에 주의해야 한다. 접할 때, 변곡점에서의 접선 위를 지날 때는 특히 실근의 개수가 달라지는 주된 지점이므로 이에 유의하여 원하는 함수를 구해야 한다.

008 [2022학년도 6월 미적분 29번]

$t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

PICK

문제를 푸는데 필요한 각도를 모두 표시하고, 더 이상 각도를 구할 수 없으면 그 때는 길이를 표시하면 된다.

닮음비, 각의 이등분선 정리, 이등변삼각형, 사인법칙, 코사인법칙

등을 활용하여 내가 원하는 길이를 모두 구한 뒤, 삼각형 넓이 공식을 이용하면 된다.

009 [2022학년도 6월 미적분 30번]

$t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$과 직선 $y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

PICK

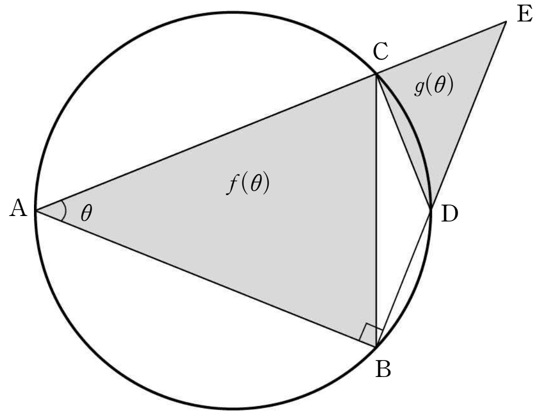
$g(5) \neq \lim_{t\to5} g(t)$라는 사실은 굉장히 중요하다.

$(5,\ f(5))$가 특징점(극점, 변곡점, 점근선 위의 점 등)이라는 의미이기 때문이다. 극한이 존재하기 위해서는 좌극한과 우극한이 같아야 하는 점에 유의하여 주어진 조건을 만족시키는 k를 찾자.

010 [2021학년도 7월 미적분 28번]

그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고, $\overline{AB} = \overline{AC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC = \theta$라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

PICK

문제를 보면 느껴지겠지만, 이렇게 적분 식만 준 문제는 부분적분이나 치환적분을 활용한 문제일 가능성이 매우 높다.

$f(x) = f(-x)$일 때, 다음이 성립함에 유의하자.

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_{0}^{x} f(t)dt \qquad \int_{-x}^{x} tf(t)dt = 0$$

반대로, $-f(x) = f(-x)$이면

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0 \qquad \int_{-x}^{x} tf(t)dt = 2\int_{0}^{x} f(t)dt$$

이다.

011 [2021학년도 7월 미적분 29번]

함수 $f(x)=x^3-x$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=ax^3+x^2+bx+1$이 있다. 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}(f\circ g^{-1})(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>1)\\ \dfrac{1}{\pi}\sin\pi x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[4점]

PICK

극한 $f(n)+g(n)$을 구할 때는 도형을 붙이고 떼는 방법이 있다. 직각삼각형 등이 있는지 꼭 확인하고, 만일 그렇지 않은 경우 다음의 넓이 공식을 활용할 수 있다.
두 변의 길이와 한 각의 사인값이 주어져 있을 때는

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

한 변의 길이와 나머지 각들의 사인값이 주어져 있을 때는

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

을 사용할 수 있다. 삼각형 내에서 길이를 구할 때는 사인법칙/코사인법칙을 적극 활용하자.

012 [2021학년도 7월 미적분 30번]

두 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+b$가 있다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\ln f(x)-\frac{1}{10}\{f(x)-1\}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=|g(t)|$와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이다.

$\displaystyle\int_0^a e^x f(x)\,dx=me^a-19$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오.

[4점]

PICK

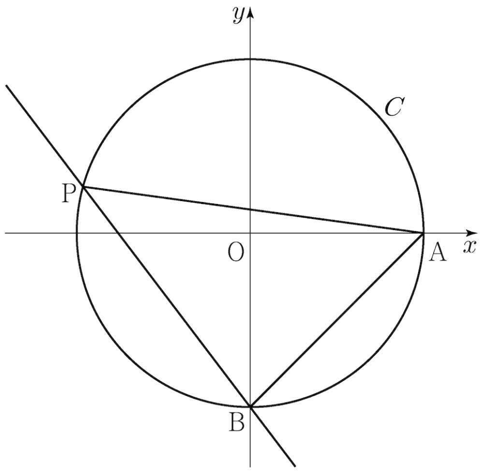
4월 모의고사 치곤 상당히 까다로운 문제이다. (정답률 : 5%)
핵심은 집합 $\{x\,|\,g(x)=k,\ x$는 실수$\}$인 원소 중에 0이 있으면 $h(k)$의 값에 영향을 미치지 않는다는 점이다.
이것이 불연속처럼 보이는 점을 연속으로 만들어 버리기 때문에 (가) 조건이 성립할 수 있다.
0이라는 숫자가 가지는 힘을 체감할 수 있는 좋은 문제이다.

013 [2022학년도 9월 미적분 28번]

좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 하자. 점 $\mathrm{Q}(0,\ 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$

④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$



PICK

문제를 푸는데 필요한 각도를 모두 표시하고, 더 이상 각도를 구할 수 없으면 그 때는 길이를 표시하면 된다.

닮음비, 각의 이등분선 정리, 이등변삼각형, 사인법칙, 코사인법칙

등을 활용하여 내가 원하는 길이를 모두 구한 뒤, 삼각형 넓이 공식을 이용하면 된다.

014 [2022학년도 9월 미적분 29번]

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

PICK

이 문제의 핵심은 변수를 잘 구분하는 것이다. 어떻게든 식 세우는 건 어렵지 않을 것이다. 다만, 이후에 식을 음함수 미분하는 과정에서 s와 t를 잘 구분해야 한다.

s도 결국 $s(t)$라는 t에 대한 함수이기 때문에 이에 유념하자.

015 [2022학년도 9월 미적분 30번]

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$

(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.
$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,

$\int_0^5 x\,g(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

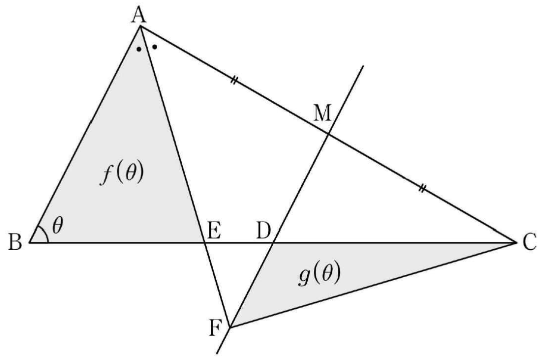
PICK

도함수는 값보다도 그 부호가 더욱 중요하다. 이러한 관점에서 보면 (나) 조건이 생각보다 엄청난 것을 시사한다는 점을 알 수 있다. 종합하여 $f(x)$를 구하고, $g(x)$를 적분하면 된다.
(이걸 일일이 $f(x)$ 미분하고 대입하는 짓은 안 했길 기원한다.)

016 [2021학년도 10월 미적분 28번]

그림과 같이 AB$=1$, BC$=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle$BAC의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자.
$\angle$CBA$=\theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [4점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2



PICK

변곡점은 말 그대로 볼록의 방향이 바뀌는 부분이다. 식으로 해석하는 것도 나쁘지 않은 선택이긴 하지만, 그래도 그림만으로 직관적으로 판단하는 것이 실전에서는 훨씬 빠른 선택이다.

017 **[2021학년도 10월 미적분 29번]**

함수 $f(x)=\sin(ax)$ $(a\neq0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)\,dx \ge \frac{1}{2}$
>
> (나) $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여
>
> $$\int_0^{3\pi} |f(x)+t|\,dx = \int_0^{3\pi} |f(x)-t|\,dx$$
>
> 이다.

PICK

어렵기보다는 복잡하고 계산이 많은 문제에 가깝다.
원래 하던대로 넓이 더할 건 더하고 쪼갤 건 쪼개서 원하는 식을 구하면 된다. 유념하자. 각도를 먼저 다 구한 다음에 길이를 구하는 것이 훨씬 정확하다. 이 문제는 빨리 푸는 게 관건인 문제가 아니라 정확하게 푸는 것이 관건인 문제이다.

018 **[2021학년도 10월 미적분 30번]**

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(2)=h(0)$
>
> (나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

PICK

본능에 충실하면 된다. 필요한 각도 싹 다 구하고, 나머지 길이만 차근차근 구하면 그냥 끝나는 문제이다. 마찬가지로 그냥 복잡하기만 할 뿐 난이도가 결코 어려운 문제는 아니다.

019 **[2022학년도 수능 미적분 28번]**

함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

PICK

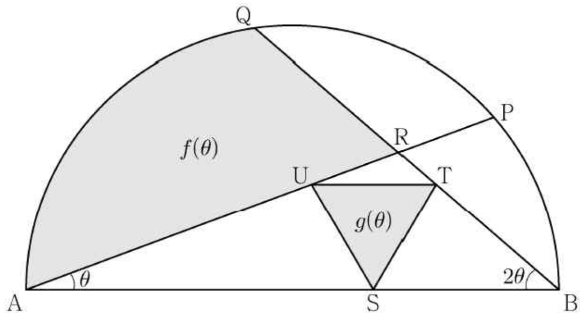
정말 역대급으로 쉬운 29번이었다. 그냥 아는 대로 풀면 된다.

020 **[2022학년도 수능 미적분 29번]**

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB위에 두점 P, Q를 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$, $\angle\mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB위의 점 S, 선분 BR위의 점 T, 선분 AR위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



PICK

정말 역대급으로 쉬운 29번이었다. 그냥 아는 대로 풀면 된다.

021 [2023학년도 수능 미적분 30번]

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_{1}^{2} f(x)dx=\frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$

$\int_{1}^{8} xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

PICK

28번과 29번이 쉬웠음에도 1컷 84를 만들었던 장본인이다.
$g(x)$ 자체로는 판단이 어렵기 때문에 $f(x)$를 가지고 모든 것을 판단해야 한다. 문제의 텍스트를 잘 읽을 필요가 있다.
예를 들어, '극댓값'과 '최댓값'은 엄연히 다른 개념이고, '극값'과 '극댓값'도 엄연히 다른 개념이다. 나중에 문제를 다 풀었는데 답이 2개가 나오는 아름다운 광경이 연출될 것이다. 이때, 내가 이러한 조건을 놓치지 않았는지 다시 한 번 꼭 확인해야 한다.
답이 나왔다고 툭 하고 넘어가면 안 된다. 함수의 개형 추론 문제의 경우야 개형이 하나로 정해지지만, 이러한 문제는 조건을 만족하는 수가 여러 개가 존재할 수 있기 때문에 절대 유의해야 한다.

정답 및 해설

001. ③

각의 이등분선 정리에 의해

$$\overline{CD}=\overline{BC}\times\frac{n}{2+n}$$

이다. 이때,

$$\overline{BC}=\sqrt{4+n^2}$$

이므로,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n-a_n)&=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n\sqrt{4+n^2}}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n+2-\sqrt{4+n^2}\right)}{n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n+2)\left(n+2+\sqrt{4+n^2}\right)}\\&=2\end{aligned}$$

002.. 12

원의 넓이를 이등분하는 모든 직선은 원의 중심을 지난다. 원의 중심은 ①점 Q_n에서 l_n에 수직인 직선과 ②$\overline{P_nQ_n}$의 수직이등분선의 교점으로 구할 수 있다.

$y=x^2$을 미분하면 $y'=2x$이므로

P_n에서의 접선의 기울기는 $4n$이다.

따라서 Q_n에서 l_n에 수직인 직선의 기울기도 $4n$이다.

이 직선이 $Q_n(0,\,2n^2)$을 지나므로

① : $y=4nx+2n^2$

임을 얻는다.

직선 ②의 방정식을 구하자. P_n과 Q_n의 중점은 $(n,\,3n^2)$이고, $\overline{P_nQ_n}$의 기울기가

$$\frac{4n^2-2n^2}{2n-0}=n$$

이므로 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{n}$이다. 따라서

② : $y=-\frac{1}{n}x+(3n^2+1)$

임을 얻는다. ①과 ②를 같다고 두고, 교점을 구하면

$$4nx+2n^2=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$$

$$x=\frac{n^2+1}{4n+\frac{1}{n}}$$

이고, 이를 ①에 대입하면

$$y=\frac{12n^3+3n}{4n+\frac{1}{n}}$$

이다. 따라서

$$a_n=\frac{y}{x}=\frac{12n^3+3n}{n^2+1}$$

이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=12$이다.

003. 5

$$f'(x)=3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$$

에서 $f'(x)=0$일 때, 극값을 갖는다.

$$3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3=0$$

$$x=\frac{(3n^2+n)\pm\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

이다. $\pm$의 부호가 $-$일 때의 근을 x_1, $+$일 때의 근을 x_2이라 하자. $x=x_1$일 때 극대이고, $x=x_2$일 때 극소이다.

다시 말해,

$$a_n=\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

이다. 한편,

삼차함수의 길이 관계에 의해

$$b_n=x_2+\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{3x_2-x_1}{2}$$

이므로,

$$b_n=\frac{(3n^2+n)+2\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$$

이다. 따라서

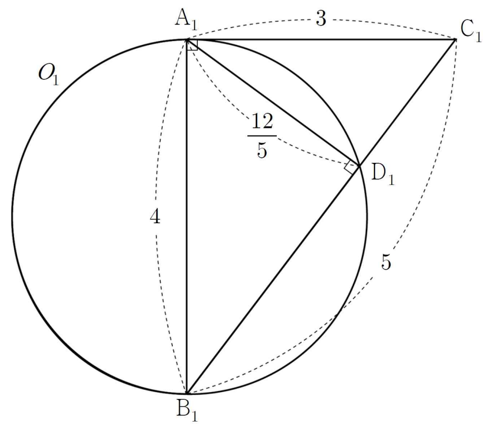
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{9n^3}{3n\left(3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}\right)}=\frac{1}{2}\ \text{(유리화)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{3}{2}$$

이므로 $p+q=5$이다.

004. ③



원 O_1의 반지름의 길이가 2이므로 반원의 넓이는 2π

직각삼각형 $C_1A_1B_1$에서 $\overline{A_1C_1}=3$, $\overline{A_1B_1}=4$이므로

$$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

선분 A_1B_1은 원 O_1의 지름이므로 $\angle A_1D_1B_1=\frac{\pi}{2}$

삼각형 $C_1A_1B_1$에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{A_1C_1}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}\times\overline{A_1D_1}$$

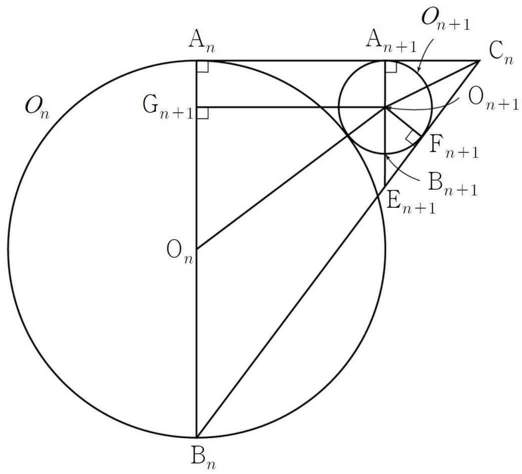
이므로 $\overline{A_1D_1}=\frac{12}{5}$

직각삼각형 $B_1D_1A_1$에서 $\overline{B_1D_1}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$

삼각형 $B_1D_1A_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{96}{25}$

그러므로 $S_1=2\pi+\frac{96}{25}$이다.

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



두 원 O_n과 O_{n+1}의 중심을 각각 O_n과 O_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 각각 r_n과 r_{n+1}이라 하자.

직선 $A_{n+1}B_{n+1}$이 선분 B_nC_n과 만나는 점을 E_{n+1},

원 O_{n+1}과 직선 B_nC_n이 접하는 점을 F_{n+1}이라 하자.

$\overline{A_{n+1}C_n}=a_n$이라 하면 $\overline{F_{n+1}C_n}=a_n$이고

삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}E_{n+1}C_n$은 서로 닮음이므로

$\overline{A_{n+1}C_n}$: $\overline{E_{n+1}C_n}=3$: 5에서 $\overline{E_{n+1}C_n}=\frac{5}{3}a_n$이고

$\overline{E_{n+1}F_{n+1}}=\overline{E_{n+1}C_n}-\overline{F_{n+1}C_n}=\frac{2}{3}a_n$이다.

삼각형 $A_{n+1}E_{n+1}C_n$과 삼각형 $F_{n+1}E_{n+1}O_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{O_{n+1}F_{n+1}}$: $\overline{E_{n+1}F_{n+1}}=3$: 4에서 $a_n=2r_{n+1}$이다.

점 O_{n+1}에서 선분 A_nO_n에 내린 수선의 발을 G_{n+1}이라 하면

$$\overline{O_{n+1}G_{n+1}}=\overline{A_nC_n}-\overline{A_{n+1}C_n}=\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}$$

$$\overline{O_nG_{n+1}}=r_n-r_{n+1},\ \overline{O_nO_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$$

이므로 직각삼각형 $O_nG_{n+1}O_{n+1}$에서

$$(r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\left(\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}\right)^2$$

$$(4r_{n+1}-r_n)(4r_{n+1}-9r_n)=0$$

$r_n>r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\frac{1}{4}r_n$

원 O_n과 원 O_{n+1}의 닮음비가 $4:1$이면 넓이비는 $16:1$

따라서 S_n은 첫째항이 $2\pi+\frac{96}{25}$이고 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

005. 18

삼각형의 내각의 크기의 합은 π이므로

$$\alpha+(\alpha+\beta)+\frac{2}{3}\pi=\pi$$

$$\beta=\frac{\pi}{3}-2\alpha$$

이다. 한편,

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan2\alpha}=\frac{\sqrt{3}-\tan2\alpha}{1+\sqrt{3}\tan2\alpha}\ \cdots ㉠$$

에서

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\tan2\alpha=\sqrt{\sec^2 2\alpha-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 2\alpha}-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이므로

$$㉠=\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

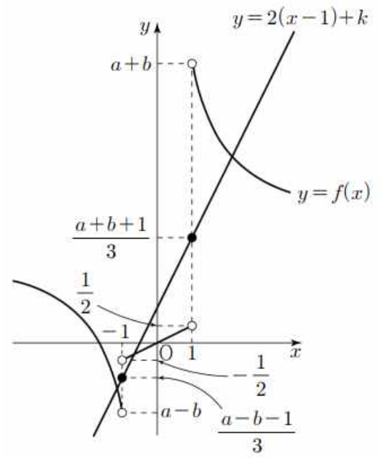
이다. 따라서 $54\sqrt{3}\times\tan\beta=18$

006. 13

c_m은 $y=f(x)$와 $y=2(x-1)+m$의 그래프의 교점의 개수이다.

함수 $y=f(x)$, $y=2(x-1)+k$의 그래프가

서로 다른 5개의 점에서 만나기 위한 개형은 다음과 같다.



두 점 $\left(-1, \dfrac{a-b-1}{3}\right)$, $\left(1, \dfrac{a+b+1}{3}\right)$을

직선 $y=2(x-1)+k$이 모두 지나므로 두 점 사이를 잇는 직선의 기울기가 2이기 위해 $b=5$이다.

한편, 위의 그림에서 $x=-1$일 때,

$$a-b<\frac{a-b-1}{3}<-\frac{1}{2}$$

이므로 $b=5$를 대입하면

$$a-5<\frac{a-6}{3}<-\frac{1}{2} \quad \cdots ㉠$$

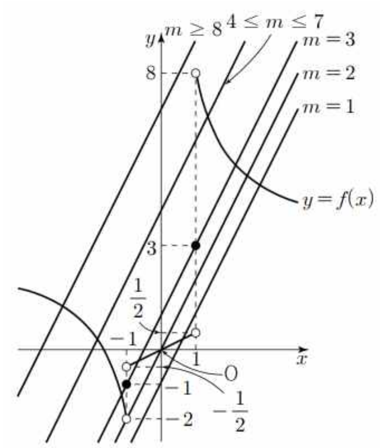
이다.

한편, 직선 $y=2(x-1)+k$는 점 $(1, k)$을 지나고,

$k=\dfrac{a+b+1}{3}$이 자연수이기 때문에 a는 3의 배수이다.

이 중 ㉠을 만족하는 $a=3$이 유일하다.

따라서 $k=3$이다.



$m=1$일 때, $c_m=2$, $m=2$일 때, $c_m=2$

$m=3$일 때, $c_m=5$, $4 \leq m \leq 7$일 때, $c_m=2$

$m \geq 8$일 때, $c_m=1$

이므로

$$\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)=1+1+4+1\times4=10$$

이고, 따라서

$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)=3+10=13$$

이다.

007. ①

$\angle \mathrm{AOP}=\pi-2\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)\to\theta$$

이다.

한편,

$$\angle \mathrm{QPR}=\theta,\ \angle \mathrm{PQR}=\frac{\frac{\pi}{2}-\angle \mathrm{POB}}{2}=\frac{\pi}{4}-\theta$$

에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구하자.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\cos2\theta}-1$$

이므로

$$g(\theta)=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}^2\sin(\angle \mathrm{QPR})\sin(\angle \mathrm{QPR})}{2\sin(\angle \mathrm{PRQ})}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1-\cos2\theta}{\cos2\theta}\right)^2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\theta}{2\sin\dfrac{3\pi}{4}}$$

$$\to\frac{\left(\dfrac{(2\theta)^2}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\theta}{2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=2\theta^5$$

이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}=2$$

008. 17

$$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x$$

이므로 극댓점에서

$$\frac{2t\ln g(t)}{g(t)}-2g(t)=0$$

이고, 정리하면

$$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2 \quad \cdots ㉠$$

이다. 이때, $g(\alpha)=e^2$이므로 ㉠에 대입하면 $\alpha=\dfrac{e^4}{2}$이다.

양변을 미분하면

$$\ln g(t)+\frac{tg'(t)}{g(t)}=2g(t)g'(t)$$

인데, α, $g(\alpha)$의 값을 각각 대입하면

$$\ln e^2+\frac{\dfrac{e^4}{2}\times g'(\alpha)}{e^2}=2e^2g'(\alpha)$$

$$2+\frac{e^2g'(\alpha)}{2}=2e^2g'(\alpha)$$

$$g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$$

이다. 따라서

$$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$$

이므로 $p+q=17$이다.

삼각형의 한 변의 길이와 나머지 각만 알고 있을 때

삼각형 ABC에서 $a=\overline{BC}$라 할 때, 넓이 S는 $$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$ 으로 나타난다.

009. 11

두 그래프가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$라 하자. $(\alpha(t)<\beta(t))$

이때, 두 점 모두 $y=x+t$ 위에 놓이므로

$$f(t)=\sqrt{2}(\beta(t)-\alpha(t))$$
$$f'(t)=\sqrt{2}\{\beta'(t)-\alpha'(t)\}$$

이다.

이때, 두 식을 서로 같다고 두면

$$\ln(1+e^{2\alpha(t)}-e^{-2t})=\alpha(t)+t \ \cdots \ ㉠$$

이다.

㉠의 양변을 미분하면

$$\frac{2\alpha'(t)e^{2\alpha(t)}+2e^{-2t}}{1+e^{2\alpha(t)}-e^{-2t}}=\alpha'(t)+1 \ \cdots \ ㉡$$

이다. $t=\ln 2$을 ㉠에 대입하면

$$\ln(1+e^{2\alpha(\ln 2)}-e^{-2\ln 2})=\alpha(\ln 2)+\ln 2$$
$$\ln\left(1+e^{2\alpha(\ln 2)}-\frac{1}{4}\right)=\ln\left(2e^{\alpha(\ln 2)}\right)$$
$$e^{2\alpha(\ln 2)}+\frac{3}{4}=2e^{\alpha(\ln 2)}$$
$$e^{2\alpha(\ln 2)}-2e^{\alpha(\ln 2)}+\frac{3}{4}=\left(e^{\alpha(\ln 2)}-\frac{3}{2}\right)\left(e^{\alpha(\ln 2)}-\frac{1}{2}\right)=0$$

이다.

$\beta(t)$에 대해서도 식은 동일하게 나오므로, 두 실근 중 작은 것이 $\alpha(t)$가 되고, 나머지 하나는 $\beta(t)$가 된다. 즉,

$$\alpha(\ln 2)=\ln\frac{1}{2},\ \beta(\ln 2)=\ln\frac{3}{2}$$

각각의 값을 ㉡에 대입하면

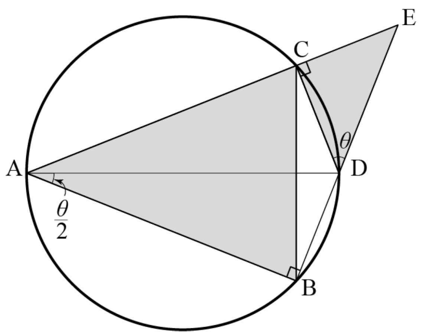
$$\alpha'(\ln 2)=-1,\ \beta'(\ln 2)=\frac{5}{3}$$

임을 얻는다. 따라서

$$f'(t)=\sqrt{2}\{\beta'(\ln 2)-\alpha'(\ln 2)\}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이고 $p+q=11$

010. ②



$\angle ABD=\frac{\pi}{2}$이므로,

$\angle ACD=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{AD}$는 지름이다.

반지름의 길이가 5이므로 $\overline{AD}=10$이다.

$$\overline{AC}=\overline{AD}\cos\frac{\theta}{2}=10\cos\frac{\theta}{2}$$

이다. 따라서

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\left(10\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\sin\theta\to 50\theta$$

이다. 이제, $g(\theta)$를 구하자

$$\overline{CD}=\overline{AD}\sin\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}$$

이고,

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}^2\times\tan(\angle CDE)$$
$$=\frac{1}{2}\left(10\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\tan\theta\to\frac{25}{2}\theta^3$$

이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\frac{1}{4}$$

011. 15

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$h(0)=\lim_{x\to 0-}h(x)=\lim_{x\to 0+}h(x)$에서

$h(0)=0$이고 $f\left(g^{-1}(0)\right)=0$

$g^{-1}(0)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$

$f(\alpha)=0$에서

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$ …… ㉠

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$h(1)=\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1+}h(x)$에서

$h(1)=0$이고 $f\left(g^{-1}(1)\right)=0$

$g(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$이고 $f(0)=0$이므로

$f\left(g^{-1}(1)\right)=0$은 성립한다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ 에서

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f\left(g^{-1}(x)\right)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x}=1$$

$$f'\left(g^{-1}(0)\right)\left(g^{-1}\right)'(0)=1$$

$g^{-1}(0)=\alpha$이고 $\left(g^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{g'(\alpha)}$ 이므로

$$f'(\alpha)\times\frac{1}{g'(\alpha)}=1$$
$$f'(\alpha)=g'(\alpha)$$
$$3\alpha^2-1=3a\alpha^2+2\alpha+b \ \cdots\cdots \ ㉡$$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 도함수의 좌극한과 우극한이 같기 위해

$$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f\left(g^{-1}(x)\right)}{x-1}$$

$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}$에서 $x-1=t$라 하면

$$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0-}\frac{-\sin\pi t}{\pi t}=-1$$

$\lim_{x\to1+}\frac{f\left(g^{-1}(x)\right)}{x-1}=-1$에서

$$f'\left(g^{-1}(1)\right)\left(g^{-1}\right)'(1)=-1$$

$g^{-1}(1)=0$이고 $\left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{g'(0)}$이므로

$$f'(0)\times\frac{1}{g'(0)}=-1$$

$f'(0)=-1$이므로 $g'(0)=b=1$

삼차함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 가지고

$g'(0)=1>0$이므로 증가함수이다.

$g(\alpha)=0$, $g(0)=1$이므로 $\alpha<0$

㉠에 의하여 $\alpha=-1$, ㉡에 의하여 $a=1$이다.

$$g(x)=x^3+x^2+x+1$$

따라서 $g(a+b)=g(2)=15$

012. 586

조건 (가)에서

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(x)}{10}$$

이므로 $f'(0)=0$ 또는 $f(0)=10$인데, 이미 주어진 함수에서 $f'(0)=0$임을 말하고 있으므로, 우리가 가져갈 수 있는 정보는 '극솟값'에 대한 것이다.

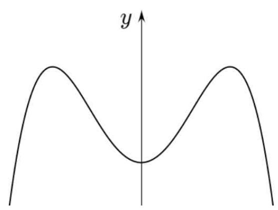
$f(x)$의 최고차항의 계수가 0보다 크기 때문에, $f'(x)$는 $x=0$ 주변에서 (-)에서 (+)으로 바뀐다. 따라서 $g'(x)$도 $x=0$에서 극소이기 위해서 $x=0$ 주변에서 (-)에서 (+)으로 바뀌어야 하기 때문에 $0<f(0)<10$이다.

조건 (나)에서 $g(x)$는 $f'(x)=0$이거나 $f(x)=10$일 때 극값을 가진다. 따라서 $g(x)$에는 3개의 극점이 존재한다.

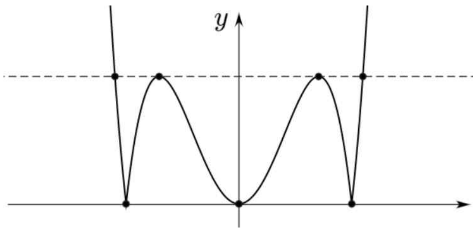
$$\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$$

이고 $g(x)=g(-x)$이므로 $y=g(x)$는 y축 대칭이다.

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같은 모양으로 나타난다.



이때, $h(t)$가 불연속인 점이 7개가 되기 위해서는 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같이 $x=0$에서 x축에 접하는 경우밖에 없다.



따라서 $g(0)=0$이므로

$$\ln f(0)-\frac{1}{10}\{f(0)-1\}=0$$

$$f(0)=1$$

이다. 따라서 $f(x)=ax^2+1$로 두자.

$$\begin{aligned}&\int_0^a e^x f(x)\,dx\\&=\int_0^a e^x(ax^2+1)\,dx\\&=\left[e^x(ax^2+1)\right]_0^a-\int_0^a 2axe^x dx\\&=\left[e^x(ax^2+1)\right]_0^a-\left(\left[2axe^x\right]_0^a-\int_0^a 2ae^x dx\right)\\&=\left[e^x(ax^2+1)\right]_0^a-\left[2axe^x\right]_0^a+\left[2ae^x\right]_0^a\\&=e^a(a^3+1)-1-2a^2e^a+2ae^a-2a\\&=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-(2a+1)\end{aligned}$$

이므로

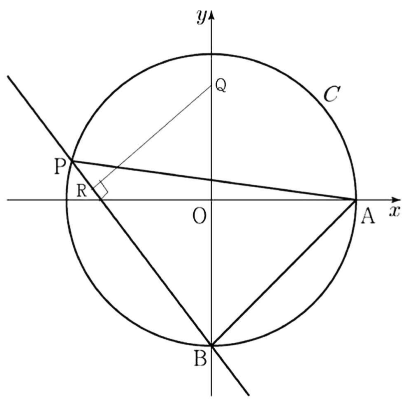
$$(a^3-2a^2+2a+1)e^a-(2a+1)=me^a-19$$

에서, a가 자연수이므로 $2a+1=19$이고 $a=9$이다.

따라서

$$m=a^3-2a^2+2a+1=586$$

013. ①



$\overline{QB}=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$이고 직각삼각형 QRB에서

$\angle QBR=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\overline{BR}=\overline{QB}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인 법칙에 의해 $\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}=2\times2$이므로 $\overline{BP}=4\sin\theta$

따라서

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\overline{BP}-\overline{BR}\\&=4\sin\theta-2(1+\cos\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)\,d\theta&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2-2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\\&=\left[-2\cos\theta-\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\left(-2\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)-\left(-2\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)\\&=\left(-1-\frac{3}{4}\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\end{aligned}$$

014. 24

$$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$$

에서 (가)에 의해 $x=a$에서 $g'(a)=0$이므로

$$f'(a)=0$$

임을 얻는다. $f(a)=6$이므로

$$f(x)=p(x-a)^2+6 \ \cdots \ ㉠$$

이라 하자. $g(x)$가 $x=b$, $x=b+6$에서 $g'(x)=0$인데 $f'(b)$와 $f'(b+6)=0$이 0이 될 수는 없으므로 $f(b)=f(b+6)=-3$이다.

대칭성에 의해 $b+3=a$이고, 이에 따라

$$f(a-3)=f(a+3)=-3$$

이므로 ㉠에 대입하면 $p=-1$이다.

따라서

$$f(x)=-(x-a)^2+6$$

이고 일반성을 잃지 않고 $\alpha<\beta$라고 할 때,

$$\alpha=a-\sqrt{6},\ \beta=a+\sqrt{6}$$

이므로 $(\alpha-\beta)^2=24$이다.

015. 115

조건 (가)에서 (분모)→0으로 가므로, (분자)→0이기 위해 $f(0)$은 정수이고 이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\times f(x))-\sin0}{x}=\pi f'(0)\cos f(0)=0$$

인데, $\cos f(0)\neq0$이므로 $f'(0)=0$이다.

따라서

$$f(x)=9x^3+ax^2+b \ \cdots \ ㉠$$

라 두자. (b는 정수)

조건 (나)에서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해 $\lim_{t\to1-}g(t)=g(1)$이므로 $f(0)=f(1)$이다.

따라서 ㉠에 대입하면 $b=9+a+b$이므로 $a=-9$이다.

$$f(x)=9x^3-9x^2+b$$

$$f'(x)=27x^2-18x$$

이므로 $x=0,\ \frac{2}{3}$에서 극값을 갖고 그 값은 각각

$b,\ -\frac{4}{3}+b$이므로 조건 (나)에 의해 $b\left(-\frac{4}{3}+b\right)=5$이다.

방정식을 풀면 $b=-\frac{5}{3}$ 또는 3이고,

b가 정수이므로 $b=3$이다. 따라서

$$f(x)=9x^3-9x^2+3$$

이고

$$\begin{aligned}&\int_0^5 x\,g(x)dx\\&=\int_0^1 x\,g(x)dx+\int_1^2 x\,g(x)dx+\cdots+\int_4^5 x\,g(x)dx\\&=\int_0^1 xg(x)dx+\int_0^1(x+1)f(x)dx+\cdots+\int_0^1(x+4)f(x)dx\\&=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx\\&=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1\\&=\frac{111}{4}\end{aligned}$$

이므로 $p+q=115$이다.

016. ③

삼각형 ABC에서 제2코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$$

이므로 $\overline{AC}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 $\angle BAC$의 이등분선이므로

$$\overline{\mathrm{BE}} = \frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}} \times \overline{\mathrm{BC}} = \frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

그러므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BE}} \times \sin(\angle \mathrm{CBA}) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}} \times \sin\theta \\ &= \frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}} \to \frac{\theta}{2} \quad \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle \mathrm{CDM} = \theta$, $\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{DFE}$

이다.

이때 $\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{FAC}$이므로 삼각형 AMF는 이등변삼각형이다.

점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{\mathrm{FM}} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AC}} = \frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$ 이고

$$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}} = 1,\ \overline{\mathrm{DM}} = \frac{1}{2}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{DF}} = \overline{\mathrm{FM}} - \overline{\mathrm{DM}} = \frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle \mathrm{FDC} = \pi - \angle \mathrm{CDM} = \pi - \theta$이므로

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \overline{\mathrm{DF}} \times \sin(\angle \mathrm{FDC}) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2} \times \sin(\pi-\theta) \\ &= \frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4} \times \sin\theta \\ &= \frac{4-4\cos\theta}{(\sqrt{5-4\cos\theta}+1)} \times \sin\theta \to \theta^3 \quad \cdots \text{㉡} \end{aligned}$$

따라서 ㉠, ㉡에 의해

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} = \frac{1}{2}$$

017. 14

조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)\,dx = \left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$$

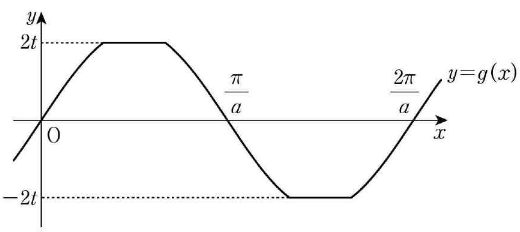
$\frac{2}{a} \ge \frac{1}{2}$이므로 $0 < a \le 4$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi} \{\,|f(x)+t| - |f(x)-t|\,\}\,dx = 0$$

$g(x) = |f(x)+t| - |f(x)-t|$라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -2t & (-1 \le \sin(ax) < -t) \\ 2\sin(ax) & (-t \le \sin(ax) < t) \\ 2t & (t \le \sin(ax) \le 1) \end{cases}$$



함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$0 < k < \frac{2\pi}{a}$인 모든 실수 k에 대하여

$\int_0^k g(x)\,dx > 0$이고, $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x)\,dx = 0$이다.

함수 $g(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이고 $\int_0^{3\pi} g(x)\,dx = 0$이므로

$3\pi = \frac{2\pi}{a} \times n$ (n은 자연수), $a = \frac{2}{3}n$

㉠에서 $0 < \frac{2}{3}n \le 4$이므로 구하는 모든 실수 a의 값은

$\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 2,\ \frac{8}{3},\ \frac{10}{3},\ 4$

이므로 그 합은 14이다.

018. 10

조건 (가)에서 $h(0) = g(f(0)) = g(0)$이고,

$f(0) = 0$이므로 $g(0) = f(0) - f^{-1}(0) = 0$이다.

따라서 $g(2) = f(2) - f^{-1}(2) = 0$이므로 $f(2) = f^{-1}(2)$

즉, $f(2) = k$일 때, $f(k) = 2$이다. 이때, $k = -2$이고

$$f(2) = \frac{8a-2b}{5} = -2$$

이므로

$4a - b = -10$ ⋯ ㉠

이다.

참조 : $k \ne -2$이면 $y=f(x)$가 원점 대칭이므로

$f(-2) = -k$이고

$$\frac{f(k)-f(-2)}{k-(-2)} = 1$$

이기 때문에 구간 $(-2,\ -k)$에서 증가하는 부분이 생긴다. 하지만 막상 $f(x)$는 역함수가 존재하는 감소함수이기 때문에 모순이 생긴다.

$f(x)$를 미분하면

$$f'(x) = -\frac{ax^4 + (3a-b)x^2 + b}{(x^2+1)^2} \quad \cdots ㉡$$

조건 (나)에서

$$g'(2) = f'(2) - \frac{1}{f'(-2)}$$

$$h'(2) = f'(2)g'(f(2)) = f'(2)\left(f'(-2) - \frac{1}{f'(2)}\right)$$

이므로 $g'(2) = -5h'(2)$로 두면

$$\frac{f'(2)f'(-2)-1}{f'(-2)} = -5(f'(2)f'(-2)-1)$$

$$f'(-2) = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } f'(2)f'(-2) = 1$$

이다. 이때, $f'(x) < 0$이고 $f'(x) = f'(-x)$이므로

$f'(-2) = -1$이다.

㉡에서

$$f'(-2) = -\frac{16a + 4(3a-b)+b}{(4+1)^2} = -\frac{28a-3b}{25}$$

(i) $f'(2) = -\frac{1}{5}$일 때, $-\frac{28a-3b}{25} = -\frac{1}{5}$이므로

$28a - 3b = 5$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하면 $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ 이다.

(ii) $f'(2) = -1$일 때, $-\frac{28a-3b}{25} = -1$이므로

$28a - 3b = 25$ ……㉣

㉠, ㉣을 연립하면 $a = 1$, $b = 1$이므로 모순.

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$4(b-a) = 4\times\left(3 - \frac{1}{2}\right) = 10$$

019. ②

$$g'(x) = f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\}$$

이므로

$$f'(x) = 0 \text{ 이거나 } \sin f(x) = \frac{3}{4}$$

일 때, 극점을 가진다.

I) $f'(x) = 0$일 때

$$f'(x) = 12\pi(x-1)$$

이므로 $x = 1$일 때, $f'(x) = 0$이다.

이때, $x = 1$ 주변에서

$$g'(1-) = f'(1-)\{3 - 4\sin f(1-)\} < 0$$

$$g'(1+) = f'(1+)\{3 - 4\sin f(1+)\} > 0$$

이므로 $g(x)$는 $x = 1$에서 극소이다.

II) $\sin f(x) = \frac{3}{4}$일 때,

$0 < x < 2$에서

$$\sin 6\pi(x-1)^2 = \frac{3}{4}$$

이 되는 x의 개수는 $x > 1$에서 6개, $x < 1$에서 6개다.

$x = 1$이 극소이므로

$x > 1$에서 극대, 극소가 번갈아 반복되면서 극소가 3번 나타나고,

$x < 1$에서도 마찬가지로 극소가 3번 나타난다.

따라서 6개의 극소점이 추가로 나타난다.

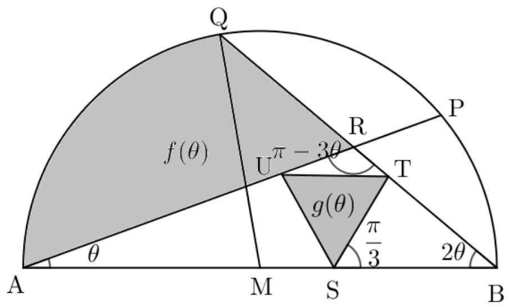
I)에서 1개, II)에서 6개의 극소점이 존재하므로

$0 < x < 2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 7개

020. 11

① $f(\theta)$ **구하기**

선분 AB의 중점을 M이라 하자.



$\angle AMQ = 2\times\angle ABQ = 2\times 2\theta = 4\theta$ 이므로,

(부채꼴 AMQ 넓이)$= \frac{1}{2}\times 1^2 \times 4\theta = 2\theta$

(ΔMBQ 넓이)$= \frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin 4\theta$

삼각형 RAB에서 $\angle ARB = \pi - 3\theta$이므로,

사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{BR}}{\sin\theta}$$

즉, $\overline{BR} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로,

$$(\Delta \text{RAB 넓이}) = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BR}\times\sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta$$

$$= \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

그러므로,

$$f(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \to \frac{8}{3}\theta \quad \cdots ㉠$$

② $g(\theta)$ **구하기**

정삼각형 STU의 한 변의 길이를 a라 하면

삼각형 AUS에서 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AS}}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}$$

삼각형 BST에서 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{SB}}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AS}}+\overline{\mathrm{SB}}=a\left\{\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}{\sin\theta}+\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}{\sin2\theta}\right\}=2$$

이다. 근사하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\theta}\right)=2$$

$$a=\frac{8\sqrt{3}}{9}\theta$$

이므로 $g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\rightarrow\frac{16\sqrt{3}}{27}\theta^2$ ⋯ ㉡

따라서, ㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로,

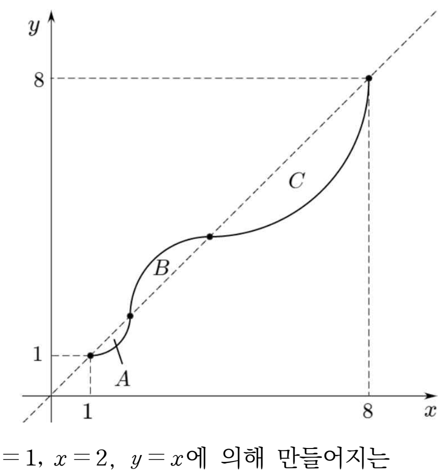
$p+q=9+2=11$

021. 143

조건 (나)에서

$f(2)=2,\ f(4)=4,\ f(8)=8$

임을 얻고, 이 성질 $g(2x)=2f(x)$는 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배 증가하는 아래와 같은 모양임을 알 수 있다.



x축, $x=1$, $x=2$, $y=x$에 의해 만들어지는

사다리꼴의 넓이가 $\frac{3}{2}$이고, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$이기 때문에

A의 넓이는 $\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$이다.

A와 B는 $1:2$ 닮음비로 같은 모양이므로

B의 넓이는 1, 마찬가지로 C의 넓이는 4이다.

한편, 구하는 식은

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_1^8 f^{-1}(x)dx$$

이므로 y축, $y=1$, $y=8$, $y=x$에 의해 만들어지는 사다리꼴의 넓이에다가 A의 넓이를 더하고, B의 넓이를 빼고, C의 넓이를 더하면 된다.

따라서 구하는 값은 $\frac{63}{2}+\frac{1}{4}-1+4=\frac{139}{4}$이고,

$p+q=143$이다.