2024학년도 대학수학능력시험 대비

2024-3MO 자가 진단 키트 (미적분)

이거 만든 놈 후기

일단 후배 여러분 3모 보느라 수고했습니다! 3모가 수능 성적 아니라는 건 일단 누구나 하는 말이라 별로 하고 싶지 않고, 그냥 총평 + 상위권들이 풀면서 하는 생각들 올려 놓은 거니까 잘 활용해보세요! 풀이 안 보고 쓰는거라 공식 풀이가 더 발상은 좋을 수 있어요. <u>그런데 저는 그냥 효율이고 뭐고 원래 제가 가진 루틴(조금 오래 걸려도 모든 문제를 확실하게 풀 수 있는 것) 가지고 푼 거라 적당히 거르면서 보심 되겠습니다!</u> 저는 가능하면 스킬 이것저것 담아가는 거 싫어해서 진짜 공식 루틴으로 굳어진 거 몇 개만 가지고 풀려고 노력했어요ㅜㅜ

문항 총평

작년에 비해 킬러는 상당히 평이했다. 다만, 준킬러 문제가 다소 어렵게 계산이 복잡하게 출제되어 다소 까다롭게 여겨졌을 수는 있다. 개인적으로는 좋은 문제도 많았지만, 일부 문제는 너무 더러웠다. 교육청이 교육청 했다 생각하기 쉽지만, 수능을 대비한다는 느낌보다 어려운 내신 푸는 느낌이 들었던 문제도 일부 있었다. 수능 문제였다면 86~88 정도가 1컷일 것으로 예상

대표 문항 Comment

번 호	Comment	추천도
009	9번 치고는 조금 어려울 수 있지만 그래도 좋은 문제. 상상력의 중요성	★★☆
010	전형적인 등차수열 문제. 절댓값 씌운 것까지 정말 흔한 문제	★★
011	고1 문제 푸는 느낌. 특수각을 너무 주는 바람에 난잡하게 느껴짐	★☆
012	도형에서 극한 구하는 전형적인 문항. 좌표 분석만 잘 하면 쉽게 느껴질 듯	★★
013	특별한 발상 없이도 꼼꼼하게 풀면 풀리는 문제. 깔끔하고 좋음	★★☆
014	진짜 이게 맞나 싶을 정도로 계산이 더러웠음. 계산 연습하기엔 좋을 듯	★
015	케이스를 조금 과하게 나누는 감이 있었지만 수열 문제 종특이라 인정	★★
020	그래프는 괜찮은 걸로 냈지만, 계산이 너무 과하게 더러움	★☆
021	식 잘 세우고 하라는 거 꼼꼼하게 다 하면 클리어. 다만 계산량이 조금 많음.	★★☆
022	특수 케이스에서 내긴 했지만 그래도 극한을 꼼꼼해야 분석해야 할 필요성을 제공	★★★
028	식 잘 세우면 풀리는 전형적인 문제. 루트 그냥 벗기면 안 된다는 게 교훈	★★☆
029	범위 내의 정수 개수 구하는 유명한 문제. 수능이었으면 3점 난이도	★★☆
030	킬러 치고는 무난한 문제. 그래프 그리는 연습이 부족하면 틀리기 쉬움.	★★

REAL-TIME Solution

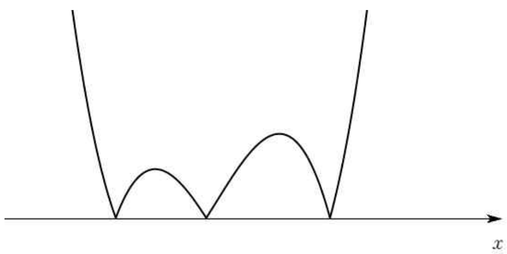
009 2023학년도 3월 학력평가

$f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은?
(단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.) [4점]

[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- 우리가 구하는 것은 실수 p의 값이다.
- 두 점에서 극대라고 했으니까 일단 그래프를 그려야 한다.

  ⇒ **개념 노트 :** 극대/극소 조건 나오면 $f'=0$ 쓰는 것이 우선, 만약 쓸 수 없으면 그래프 그려.
- 절댓값 그래프는 $x=0$을 기준으로 뒤집은 것이니까



이런 모양이겠네.

⇒ **개념 노트 :** 그래프 몇 번 그리면서 조건을 만족하는 개형을 찾아보자.
단순히 숫자 계산하는 게 문제 푸는 것의 전부가 아니다.
그래프의 모양 찾기도 풀이의 일부이다.

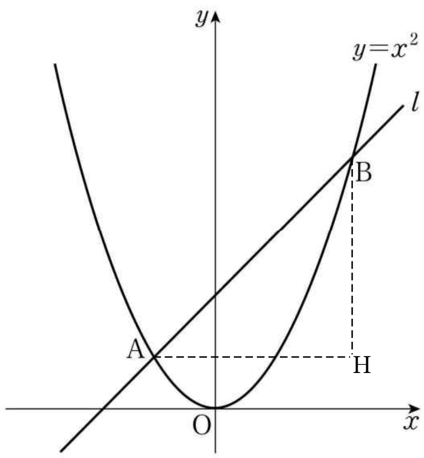
[2단계] 식으로 해석하기

$f(a)=f(b)$인데, 위의 그래프에서 두 점에서 $f'=0$일테니까 절댓값 벗기고 미분해도 $f'=0$
$(x^3-3x^2+p)'=3x^2-6x$이니까 $x=0, 2$에서 극값 갖고 $a=0$, $b=2$이겠네.
그럼 $f(a)=f(0)=|p|$이고, $f(b)=f(2)=|-4+p|$인데 두 값이 같다.
절댓값 안의 값은 부호만 반대일테니까 $p=-(-4+p)$이고, $p=2$겠네.

⇒ **개념 노트 :** 극대와 극소의 중앙 y좌표가 0이라는 느낌으로 해석해줄 수도 있다.
미적분을 배웠다면 그래프의 변곡점은 극대점과 극소점의 중앙에 위치한다는 것을
안다. $f''(1)=0$이므로 $x=1$에서 변곡점이며, 그럼 $f(1)=0$이라는 점을 통해
p를 구할 수도 있다.

012 2023학년도 3월 학력평가

곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}$의 값은? [4점]



[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- 기울기 주어진 거 보니 일단 x좌표나 y좌표 차이 같은 거 이용하는 문제겠고만.
- AB의 길이가 $2t$라고 했으니 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{2}t$이겠고, 점 A, B의 x좌표를 α, β라 하면 $|\beta-\alpha|=\sqrt{2}t$

(이 정도의 발상은 기출 학습을 통해 바로바로 떠올라야 합니다.)

[2단계] 식으로 해석하기

- 어쨌든 y절편을 구해야 하니까 l 전체를 구해야 한다. 그러니까 $l:y=x+k$라고 두자.
- α, β는 방정식 $x^2-(x+k)=0$의 해이지.

$|\beta-\alpha|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$임을 이용하자. 대입하면 $|\beta-\alpha|=\sqrt{1+4k}=\sqrt{2}t$이므로 양변 제곱하면

$1+4k=2t^2$이고, 정리하면 $g(t)=k=\frac{2t^2-1}{4}$이므로 $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\frac{1}{2}$

013 2023학년도 3월 학력평가

두 함수

$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\sin x$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

(가) $\{g(a\pi)\}^2=1$

(나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

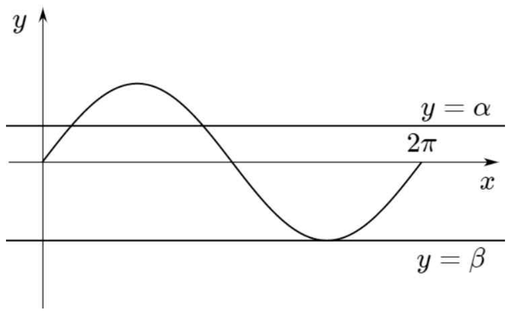
- (가), (나) 조건을 순서대로 해석해봐야지.
- $g(a\pi)=\pm1$이 되어야 하겠지. $0 \le a \le 2$이랬으니까 $a=\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$이지.

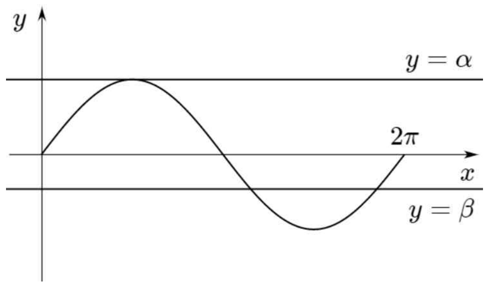
⇒ **개념 노트 :** 가능한 경우가 2~3개만 나오는 경우에는 케이스를 나누는 게 좋지.

- $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하자. 그럼 $g(x)=\alpha$, $g(x)=\beta$의 해를 생각해보면 되겠네.

⇒ **개념 노트 :** 삼각함수에서 해의 합은 보통 대칭성을 이용해 쉽게 구할 수 있는 경우가 많다.

$y=\sin x$와 $y=\alpha$, $y=\beta$의 교점의 x좌표 합이 $\frac{5}{2}\pi$인 경우는 다음 경우밖에 없어.





다시 말해, α, β 중 하나는 1 아니면 -1의 값을 갖는다.

⇒ **개념 노트 :** 모든 문제에서는 항상 특이 케이스를 염두해두자. (접하는 경우)

[2단계] 식으로 해석하기

- $a=\frac{1}{2}$이면 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{4}$에 대해 대칭이므로 해 하나가 1이면 나머지 한 해는 $-\frac{3}{2}$이지.

그런데 $-1 \le \sin x \le 1$이므로 패스.

그럼 해 하나가 -1이면 나머지 한 해는 $\frac{1}{2}$이지. 이 경우는 가능!

⇒ **개념 노트 :** 사실 답 구했으면 여기서 치고 빠져야 하는게 맞긴 해.

- $a=\frac{3}{2}$인 경우도 마찬가지로 대칭성 이용해서 나머지 해 구해보면 안 되는 거 알 수 있어.

015 2023학년도 3월 학력평가

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- 귀납적으로 정의된 수열 문제에서는 케이스 나누고, 반복성 확인하는 것이 좋지.
  그런데 모양 보니 모든 항이 자연수라고 했으니 반복성은 안 나올 것 같다.
  ⇒ **개념 노트 :** 문제가 양수, 음수로 나누면 너도 양수, 음수로 나누고
  문제가 홀수, 짝수로 나누면 너도 홀수, 짝수로 나누자.
- a_1은 이미 정해져 있으니 a_2가 홀수일 때, a_2가 짝수일 때로 나눠보자.

[2단계] 식으로 해석하기

- $a_2=2n+1$이면 : $a_3=n+1$이고, $a_2+a_3=3n+2$이라 n이 홀수냐/짝수냐에 따라 달라지겠지.

n이 홀수이면 - a_2+a_3은 홀수이므로 $a_4=3n+2$, $a_5=4n+3$, $a_6=\frac{7n+5}{2}$으로 결정이 된다.

→ $\frac{7n+5}{2}=34$이려면 $n=9$이면 가능. 따라서 $a_2=19$에서 OK!

n이 짝수이면 - a_2+a_3은 짝수이므로 $a_4=\frac{3n+2}{2}$이고, $a_3+a_4=\frac{5n+4}{2}$인데,

- n이 4의 배수이면

$\frac{5n+4}{2}$가 짝수이므로 $a_5=\frac{5n+4}{4}$, $a_6=\frac{11n+8}{4}$ or $\frac{11n+8}{8}$

$\frac{11n+8}{4}=34$이면 n이 자연수 X, $\frac{11n+8}{8}=34$이면 $n=24$.

이때, $a_2=49$이고 a_4+a_5이 짝수여서 $a_6=\frac{11n+8}{8}$ 되는 것도 성립하지.

- n이 4의 배수가 아니면

$\frac{5n+4}{2}$가 홀수이므로 $a_5=\frac{5n+4}{2}$, $a_6=4n+3=34$이므로 n이 자연수 X

- $a_2=2n$이면 : $a_3=2n+1$, $a_4=4n+1$, $a_5=3n+1$이라 a_6은 홀수냐/짝수냐에 따라 달라지겠지.

n이 홀수이면 - $a_6=7n+2=34$이므로 n이 자연수 X

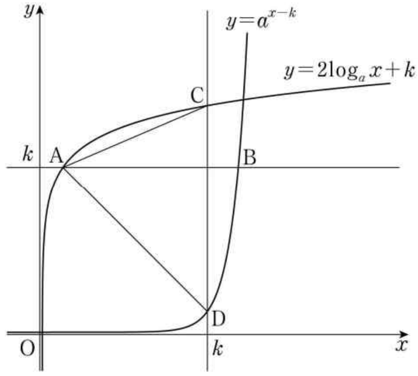
n이 짝수이면 - $a_6=\frac{7n+2}{2}=34$이므로 n이 자연수 X

⇒ **개념 노트 :** 더 좋은 방법이 있을 수도 있겠지만 사실 케이스 세분화해서 푸는 게 가장 확실하다. 아이디어가 빠르게 떠오른다면 좋겠지만, 그럴 베짱이 없다면 그냥 케이스 여러 개 나누는 게 편하다. (그렇다고 케이스가 과하게 많다면 그건 식 정리가 아직 덜 된 것)

a_2로 가능한 것의 합은 $19+49=68$이 되겠다.

021 2023학년도 3월 학력평가

그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- 이런 문제는 사실 식 빨리 세우는 게 진짜 장땡이다.
  CD와 AB의 교점을 P라 하자. 삼각형 CAD의 넓이가 35이므로 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CD}}=70$이라는 의미겠지.
  그럼 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=14:3$이겠지. 일단 정보 하나를 알았으니 식을 세울 수 있다.
  $\mathrm{A}(1,\ k)$이므로 $\mathrm{P}(1+14t,\ k)$, $\mathrm{B}(1+17t,\ k)$이겠다. 이때, $k=1+14t$이지.
  B의 좌표 대입하면 $a^{1+17t-k}=a^{3t}=k$ $\cdots$ ㉠이지.

[2단계] 식으로 해석하기

- $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=17t\times(2\log_a k+k-1)=85$인데, ㉠에서 $\log_a k=3t$이고 $k=1+14t$이므로 대입하면
  $17t(6t+k-1)=85 \rightarrow 20t^2=5$이고, $t=\dfrac{1}{2}$이다.
- $k=1+14t=8$, $a^{3/2}=8$이므로 $a=4$이다. 따라서 $a+k=12$.

022 2023학년도 3월 학력평가

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to 4+}h(t)=5$

(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- '~에서만' 키워드 나온 것부터 수상하다. 특이 케이스 의심부터 하고 들어가자.

  ⇒ **개념 노트 :** 사차함수에서 특이 케이스라 함은 두 극솟값이 같은 W자 모양 그래프 또는 $(x-a)^3(x-b)$ 꼴의 그래프를 의미한다.

- $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재할만한 곳을 의심해본다. 대표적으로 $g(x)$가 뒤집히는 지점(뾰족점)이나 $g'=0$이 되는 지점이 되겠다. 놀랍게도 둘 다 주어진 극한값이 존재하게 하지.

  (**이유 설명 :** 뾰족점에서 $g(k)=0$이므로 $f(k)=t$이고,

  $$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k}\left|\frac{f(x)-t}{x-k}\right|=\left|\lim_{x\to k}\frac{f(x)-t}{x-k}\right|$$의 값이 존재.

  $g'=0$이면 그냥

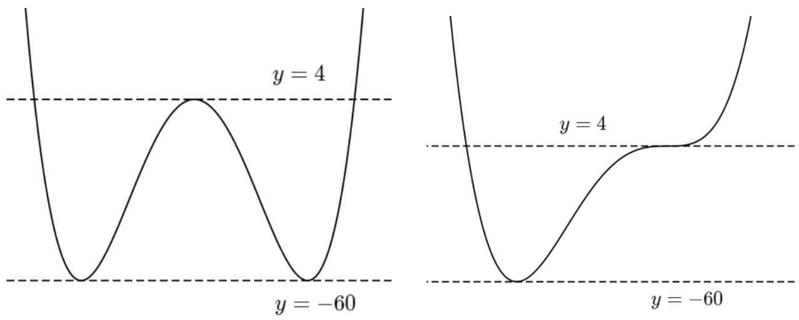
  $$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=-\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=0,\ \lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$$

  이므로 가능.)

[2단계] 조건 해석하기

- $|f(x)-t|$은 $f(x)$를 $y=t$ 지점에서 뒤집은거니까 $g'=0$인 점의 개수는 동일하지.

  즉, $g(x)$의 값이 달라지려면 뾰족점의 개수가 달라져야 해. 그러니까 다음 두 경우 생각 가능하지.



오른쪽 케이스의 경우 $y=4+$ 기준으로 뒤집었을 때, 뾰족점의 개수는 2개, $g'=0$인 지점도 2개이므로 $h(4+)=2+2=4$이라 안 되고, 왼쪽 케이스의 경우 마찬가지로 $y=4+$ 기준으로 뒤집으면 뾰족점의 개수는 2개, $g'=0$인 지점은 3개이므로 $h(4+)=2+3=5$이지. 그래서 $f(x)$는 왼쪽 케이스.

[3단계] 식으로 해석하기

우선 $f(x)=(x-a-k)^2(x-a+k)^2-60\ \ (k>0)$으로 두자.

극댓점은 대칭성에 의해 $x=a$일 때이므로 $f(a)=k^4-60=4$이고, $k=2\sqrt{2}$임을 얻는다.

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-a+2\sqrt{2})^2(x-a-2\sqrt{2})^2-60 \\ &=\{(x-a)^2-8\}^2-60 \end{aligned}$$

$f(2)=4$이므로 대입하면 $\{(2-a)^2-8\}^2=64$이며, 루트 씌우면 $|(2-a)^2-8|=8$이므로

방정식 풀면 $a=2,\ -2,\ 6$이 가능!

그래프 그려봤을 때, $f'(2)>0$인 것은 $a=-2$일 때야.

따라서 $f(x)=\{(x+2)^2-8\}^2-60$이고 $f(4)=724$이고,

$h(4)$의 경우 $t=4$일 때, $y=g(x)$의 뾰족점의 개수가 2개, $g'=0$인 지점이 3개이므로

$h(4)=2+2=5$이겠네.

따라서 답은 $724+5=729$이겠다!

027 2023학년도 3월 학력평가 (미적분)

$a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- S_n이 나왔다? 못 참는다. 구하면 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}=-\frac{6}{n(n+1)}$ $\cdots$ ㉠ $(n\geq 2)$이다.

  ⇒ **개념 노트 :** $a_n=S_n-S_{n-1}$인 거 너무 많이 쓰인다. 제발 까먹지 말자.

- a_n이랑 b_n을 구해야 하는데 a_n은 아무 정보도 없으니 일단 때려치우고 b_n 먼저 구하자.

  등차수열이랬으니까 $an+b$ 형태로 나오긴 할텐데..

  ⇒ **개념 노트 :** 등차수열은 일차함수의 일종

  ⇒ 마침 a_1과 a_2도 있겠다 b_1이랑 b_2도 구할 수 있겠네.

  $\sum_{k=1}^{1}\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_1}{b_1}=3$이므로 $b_1=1$ (**실수 주의 :** ㉠에 대입 절대 안 돼! $n\geq 2$ 아니다!)

  ㉠에 $n=2$ 대입하면 $b_2=4$이므로 $b_n=3n-2$.

- ㉠에서 $a_n=-\frac{6b_n}{n(n+1)}=-\frac{6(3n-2)}{n(n+1)}$ 이므로

  $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}-\frac{6(3n-2)^2}{n(n+1)}=-54$

029 2023학년도 3월 학력평가 (미적분)

자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{na_n}-pn)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- 일단 꼴 보니 a_n을 직접 구하긴 해야겠구나. 이차부등식을 풀어야 할텐데 근의 공식 쓰기는 좀 애매하니까 일반형으로 만들어보자.
- $(x-2n)^2-4n^2-n<0$이므로

$$2n-\sqrt{4n^2+n}<x<2n+\sqrt{4n^2+n}$$

인데, 여기서 $2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$이니까 $\sqrt{4n^2+n}=2n.\times\times\times\cdots$으로 생각해보면 정수 x는 $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 4n$일 때 가능하지. 즉, $a_n=4n+1$이네.

⇒ **개념 노트 :** $n<\sqrt{n^2+2n}<n+1$인 것처럼 특정 값을 정수 범위로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 이 문제가 그러하다.

[2단계] 식으로 생각하기

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(4n+1)}-pn)$의 값을 생각해야 하는데,

$n\to\infty$이면 $\sqrt{n(4n+1)}\fallingdotseq 2n$이니까 $p=2$라는 건 금방 알 수 있을테고.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n(4n+1)}-2n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n(4n+1)}+2n}=\frac{1}{4}$$

이니까 $q=\dfrac{1}{4}$. 따라서 $100pq=50$이지.

030 2023학년도 3월 학력평가 (미적분)

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

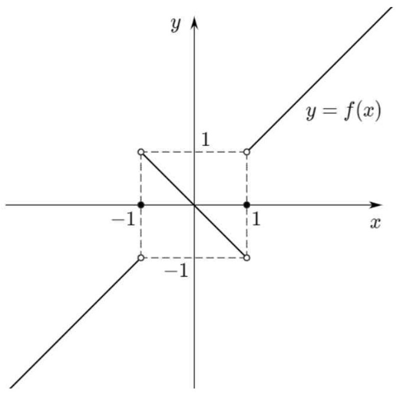
에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
>
> $$g(x)=(2k-1)\times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

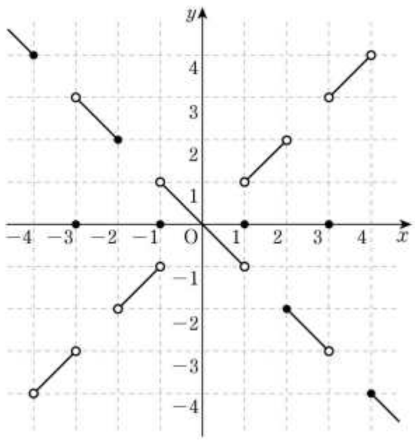
[1단계] 보자마자 무엇을 떠올려야 하는가?

- x^{2n}, x^{2n+1}이라... 유명하죠..? (안 유명하면 기출 분석 제대로 안 한 거ㅠㅠ)
- $x<-1$, $x=-1$, $-1<x<1$, $x=1$, $x>1$일 때 나눠서 그래프 그려보면 다음과 같네.



- $y=g(x)$는 범위별로 나눠서 그래프 그리면 규칙성 금방 파악합니다.

  ⇒ **개념 노트** : 함수 내의 변수를 상수로 나눈다고 해서 함수의 모양이 바뀌진 않는다.
  다시 말해, $f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$도 결국 직선 늘린 형태 그대로 유지된다는 뜻.



[2단계] 식으로 생각하기

$y=t$와 안 만나려면 $t=1, 3, 5, 7, 9$여야 하니까 총합은 25이겠네.

참조 : 아마 1부터 9까지 다 더해서 45 나온 학생 꽤 있을 겁니다.
약간 의심하셔야 합니다. 그렇게 되면 찍어서 맞는 학생도 생길텐데 문제를 그렇게 허술하게 내진 않았겠죠.