2024학년도 대학수학능력시험 대비

2024학년도 우주설 전승원 모의고사 3월 대비 1회 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 정답

1	①	2	④	3	②	4	③	5	⑤
6	①	7	⑤	8	③	9	④	10	②
11	④	12	①	13	②	14	②	15	⑤
16	4	17	32	18	108	19	46	20	19
21	11	22	55						
미적분									
23	④	24	①	25	⑤	26	②	27	③
28	②	29	4	30	64				

공통 영역

1. [정답] ①

$(2^{1+\sqrt{3}})^{1-\sqrt{3}}=2^{1-3}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

2. [정답] ④

$f(x)=x^2+2x+C$

$f(-1)=-1+C,\ f(1)=3+C$

$\therefore C=1$

$f(2)=4+4+1=9$

3. [정답] ②

θ가 3사분면에 위치하므로 $\sin\theta=-\frac{12}{13},\ \cos\theta=-\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{7}{13}$

4. [정답] ③

$\lim_{x\to 1+}\{f(3-x)+f(x)\}=2+1=3$

5. [정답] ⑤

n이 홀수일 때 $|n-3|-2$가 음수이면 n제곱근 중 음의 실수가 존재

n이 짝수일 때 $|n-3|-2$가 양수이면 n제곱근 중 음의 실수가 존재

그러므로 가능한 n은 3, 6, 8이다.

$\therefore 17$

6. [정답] ①

구하는 것은 곡선 $y=x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 넓이와 같다.

이차함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $\frac{|k|(\beta-\alpha)^3}{6}$을

이용하면 $\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}$이다.

7. [정답] ⑤

$x<k$에서는 직선 $y=-2x+n$이 곡선 $y=2^x$보다 위에 있다.

$\Rightarrow\ -2+n>2$

$x>k$에서는 직선 $y=-2x+n$이 곡선 $y=2^x$보다 아래에 있다.

$\Rightarrow\ -6+n<8$

$\therefore 4<n<14$, 9개

8. [정답] ③

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 역함수가 존재하기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax+2a$에서 판별식을 사용하여

$\frac{D}{4}$: $a^2-3\times 2a\leq 0$

$\Rightarrow\ 0\leq a\leq 6$, 7개

9. [정답] ④

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(-1)}{h}=8$에서 (분모)$\to 0$이고 극한값이 8이므로

$f(3)=f(-1),\ f'(3)=8$이다.

$f(0)=0$임을 통해 $f(x)=2x(x-2)$를 구할 수 있다.

$\therefore f(3)=6\times 1=6$

10. [정답] ②

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라고 하면

$a^2r=ar^2+2ar$

$a=r+2$

$a_1+a_2=a(1+r)=(r+2)(r+1)$

$r=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

(a가 0일 때는 0이 나오므로 최솟값이 되지 않는다.)

11. [정답] ④

원주각에 의하여 $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 ABC에서

$\sin(\angle\mathrm{BAC})=\frac{\sqrt{5}}{5}$를 사용하여 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{5}$를 얻는다.

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$를 이용하여 삼각형 ADC에서

코사인법칙을 사용하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CD}}^2&=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\\&=20+9-2\times 2\sqrt{5}\times 3\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\\&=5\end{aligned}$$

이므로, $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{5}$이다.

$\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{DE}}$이므로,

$\overline{\mathrm{DE}}=\frac{6}{5}\sqrt{5}$

12. [정답] ①

모든 실수 k에 대해 성립하므로 $f(k)=0$인 k도 성립한다.

다음 조건을 유리화하면

$\lim_{x\to k}\frac{x(x-1)}{-f(x)}\times(1+\sqrt{f(x)+1})$이다.

$f(k)=0$인 k가 존재한다면 k는 0 또는 1이어야 한다.

($f(x)$는 중근을 가질 수 없다.)

$f\left(\frac{1}{3}\right)$의 최솟값을 구하는 것이므로 방정식 $f(x)=0$가

서로 다른 두 실근을 가질 때 최솟값을 갖는다.

$f(x)=px(x-1)$ (p는 양수)이다. 이때,

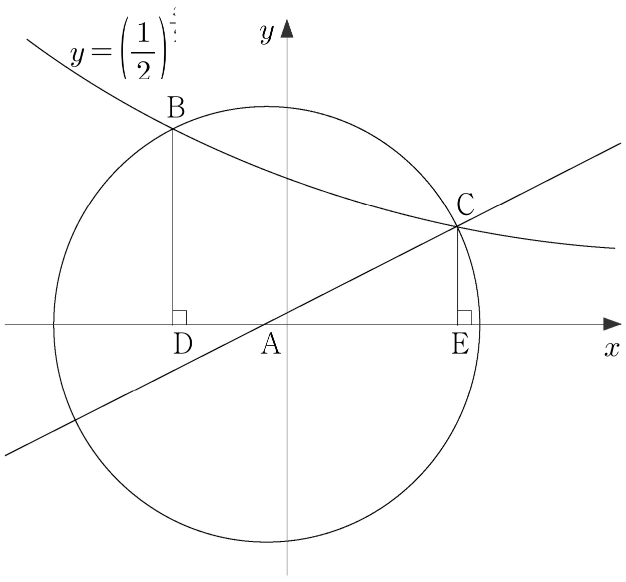
$\sqrt{\ }$ 안에 있는 $f(x)+1$이 0이상이어야 하므로

$f(x)\geq -1$ 이다.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{p}{4}\geq -1,\ \therefore p\leq 4$

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2p}{9}\geq -\frac{8}{9}$

13. [정답] ②



점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

점 B의 x좌표를 α라고 하면, 점 C의 x좌표는 $\alpha+2$이다.

이를 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$에 대입하면 점 B의 y좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$

점 C의 y좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha+2}{2}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$이므로

$\overline{BD}=2t,\ \overline{CE}=t$라 하자.

이때, 직선 AC의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\overline{AE}=2t$이고, 삼각형 BDA과 삼각형 ACE는 빗변의 길이가 반지름으로 같은 합동관계이다.

그러므로 $\overline{DA}=t$이고,

$\overline{DE}=3t,\ 3t=2,\quad t=\frac{2}{3}$이다.

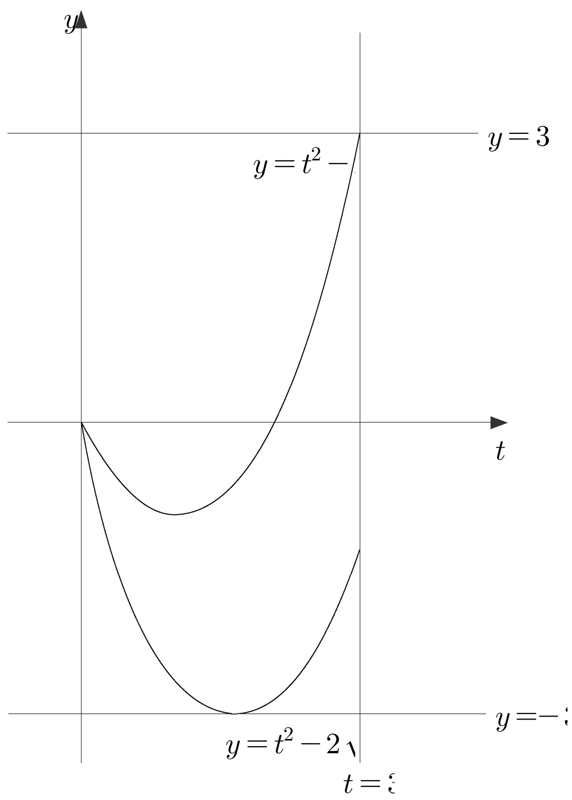
삼각형 BAC가 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인

직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{10}\,t=\frac{2\sqrt{10}}{3}$ 이다.

14. [정답] ②

ㄱ. 닫힌구간 $[0,3]$에서 $-3\leq v(t)\leq 3$을 만족시키도록 a값을 서서히 증가시키면서 $v(t)=t^2-at$의 그래프를 그려보면,



$a=2$일 경우 구간 $[0,3]$에서 $v(3)\leq 3$을 만족시키기 시작한다.

$a=2\sqrt{3}$일 경우 구간 $[0,3]$에서 $v\left(\frac{a}{2}\right)=-3$을 만족시킨다.

따라서 $2\leq a\leq 2\sqrt{3}$이다.

ㄴ. $x(6)\leq 9$인지 알아보기 위해 $x(6)$의 최댓값을 구해보자.

$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^6 v(t)dt$ 인데

$\int_0^3 v(t)\,dt$가 최대가 되기 위해서는 $a=2$이어야 하고,

($\because \int_0^3 v(t)\,dt$가 최대이기 위해서는 구간 $[0,3]$에서 $v(t)$가 최대)

이차함수 정적분의 비율 관계를 사용하면

$\int_0^3 (t^2-2t)\,dt=0$ 이다.

$\int_3^6 v(t)\,dt$가 최대가 되기 위해서는 구간 $[3,6]$에서

$v(t)=3$이어야 한다.

그러므로 $\int_0^6 v(t)dt$의 최댓값은 $\int_0^3 (t^2-2t)\,dt+\int_3^6 3\,dt=9$이다.

$\therefore x(6)\leq 9$

ㄷ. $x(6)\leq -9\sqrt{3}$이면, $x(6)=-9\sqrt{3}$인 경우가 존재한다.

$\int_0^6 v(t)dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^6 v(t)dt$ 인데

$\int_0^3 v(t)\,dt$가 최소가 되기 위해서는 $a=2\sqrt{3}$이어야 한다.

(∵ $\int_0^3 v(t)\,dt$가 최대 이기위해서는 구간 $[0, 3]$에서 $v(t)$가 최소)

$\int_0^3 v(t)dt = 9-\frac{9a}{2}$에 $a=2\sqrt{3}$를 대입하여

$\int_0^3 v(t)dt = 9-9\sqrt{3}$를 얻는다. $x(6) \le -9\sqrt{3}$이려면

$\int_3^6 v(t)dt \le -9$이어야 한다. 이를 만족시키는 유일한 경우는

$v(t)=-3$으로 $\int_3^6 v(t)dt=-9$인 경우인데

이 경우 $v(t)$가 연속함수라는 조건에서 모순이
발생하기 때문에
$x(6)=-9\sqrt{3}$를 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

15. [정답] ⑤

$a_1<0$이므로 $f(a_1)=a_2$이고 $|a_1|=a_2>0$이다.
양수인 항의 종류가 하나만 나오는 경우는
다음과 같다.
$f(x)=x$의 교점은 $x=0, x=5$이다
(1) 양수인 항이 5인 경우(고정점 $x=5$)
$f(a_1)=-a_1=a_2$
$f(a_2)=a_2=5$이면 되므로 $a_1=-5$

(2) 양수인 항이 $\frac{10}{3}$인 경우(고정점 $x=0$인 경우)
$f(a_1)=-a_1=a_2$
$f(a_2)=a_3=0$
$a_2=\frac{10}{3}$이므로 $a_1=-\frac{10}{3}$

(3) 주기가 반복되는 경우
$f(a_1)=-a_1=a_2$
$f(a_2)=-3a_2+10=a_3=a_1$
$10+3a_1=a_1$
$a_1=-\frac{5}{2}$
구하는 a_1의 값은 $\left(\left|\frac{5}{2}\right|+|5|+\left|\frac{10}{3}\right|\right)=\frac{65}{6}$

16. [정답] 4
$\log_2 80-\log_2 5=\log_2 16=4$

17. [정답] 32
$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 (분모)→0이고 극한값이 5이므로
$f(2)=3,\ f'(2)=5$이다.
$y=x^2 f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는
$2xf(x)+x^2 f'(x)$에 $x=2$를 대입하면 되므로
$4\times 3+4\times 5=32$이다.

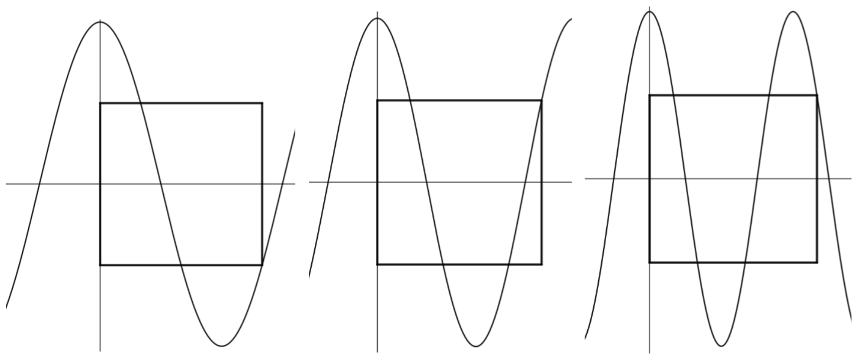
18. [정답] 108
$\sum_{n=1}^{10} a_n(a_n+2)$를 A, $\sum_{n=1}^{10}(a_n+n)$을 B라고 하면 $A-2B=-2$이다.
$A-2B=\sum_{n=1}^{10}(a_n)^2-110$이므로, $\sum_{n=1}^{10}(a_n)^2=108$이다.

19. [정답] 46
$f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+2f(1)x+C$ ………………㉠
$f(0)=2$이므로 $C=2$이다. ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=1+\frac{1}{2}+2f(1)+2$, 즉, $f(1)=-\frac{7}{2}$이다.
이를 이용하면 $f(4)=64+8-28+2=46$이다.

20. [정답] 19
$f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여
$f(x+1)+f(x)=x^2-2x$의 양변을 부정적분 하면
$F(x+1)+F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+c$
이때, $\frac{x^3}{3}-x^2=g(x)$라 하면
$F(x+1)+F(x)=g(x)+c$이고

(나)조건에서
$F(6)-F(5)-F(1)+F(0)=6$이다. 이때, $F(6)+F(5)=g(5)+c$,
$F(1)+F(0)=g(0)+c$ 이므로
$\{g(5)+c-F(5)\}-F(5)-\{g(0)+c-F(0)\}+F(0)=6$
$$\begin{aligned}-2\{F(5)-F(0)\}&=6+g(0)-g(5)\\&=6+0-\left(\frac{125}{3}-25\right)\\&=-\frac{32}{3}\end{aligned}$$
이므로 $F(5)-F(0)=\frac{16}{3}$이다.
따라서 $\int_0^5 f(x)dx=\frac{16}{3}$

21. [정답] 11



$t=\frac{2}{3}\pi$일 경우　$t=\frac{5}{6}\pi$일 경우　$t=\frac{7}{6}\pi$일 경우
따져야 할 주요 상황은 위 그림과 같다.
$p=\frac{2}{3}\pi,\ q=\frac{7}{6}\pi$를 얻는다.

22. [정답] 55

x에 대한 방정식 $f(f(x))=mf(x)+1$에 대해
$f(x)=t$라 하면 $f(t)=mt+1$을 만족하는 t에 대해
x에 대한 방정식 $f(x)=t$를 푸는 것과 같다.

$f(t)=mt+1$의 실근을 m에 따라 분류하자.

$-\infty<m<\frac{15}{4}$일 때 $t_1>0$

$m=\frac{15}{4}$일 때 $t_1=-\frac{1}{2}, t_2=4$

$\frac{15}{4}<m<\frac{113}{4}$일 때 $-\frac{1}{2}<t_1<0,\ -4<t_2<-\frac{1}{2}, t_3>0$

$m=\frac{113}{4}$일 때 $t_1=-4, t_2=\frac{7}{2}-\frac{5}{\sqrt{2}}, t_3=\frac{7}{2}+\frac{5}{\sqrt{2}}$이다.

$m>\frac{113}{4}$일 때 $t_1<-4,\ -4<t_2<0, t_3>0$이다.

$-\infty<m<\frac{15}{4}$일 때, $t_1=f(x)$의 실근은 1개다.

$m=\frac{15}{4}$일 때 $t_1=f(x), t_2=f(x)$의 실근 개수는 4개다.

$\frac{15}{4}<m<\frac{113}{4}$일 때 $t_1=f(x),\ t_2=f(x),\ t_3=f(x)$의
실근개수는 7개다.

$m=\frac{113}{4}$일 때 $t_1=f(x),\ t_2=f(x),\ t_3=f(x)$의 실근개수는 6개다.

$m>\frac{113}{4}$일 때 $t_1=f(x),\ t_2=f(x),\ t_3=f(x)$의 실근개수는 5개다.

$M=1+4+7+6+5=23$,
$\alpha_1=\frac{15}{4}, \alpha_2=\frac{113}{4}$이고 $k=2$이다.

$\therefore M+\sum_{n=1}^{k}\alpha_n=23+32=55$

미적분 선택

23. [정답] ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{2n^2-1}\right)}{(2n^2+3n)-(2n^2-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{2n^2-1}\right)}{3n+1}=2\sqrt{2}$$

24. [정답] ①

${a_n}^2-b_n=p_n$ 이라 하면 $\lim_{n\to\infty}p_n=3$, $b_n={a_n}^2-p_n$ 이므로
$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{{a_n}^2-3b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2-p_n}{{a_n}^2-3({a_n}^2-p_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2-p_n}{-2{a_n}^2+3p_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{p_n}{{a_n}^2}}{-2+\frac{3p_n}{{a_n}^2}}=-\frac{1}{2}$$

25. [정답] ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{25^n+a^n}-5^n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\sqrt{25^n+a^n}+5^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{5}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{25}\right)^n}+1}$$

(i) $0<a<5$ 일 때 0 으로 수렴한다.
(ii) $a=5$일 때 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.
(iii) $a>5$ 일 때 발산한다.
따라서 구하는 자연수 a는 1, 2, 3, 4 ,5의 5개다.

26. [정답] ②

$y=a_nx$위의 점을 $(\alpha,\ a_n\alpha)$로 놓을 수 있다.
각이등분선이므로 점 $(\alpha,\ a_n\alpha)$와
두 직선 $y=nx,\ y=2nx$ 사이의 거리가
서로 같으므로 $\frac{|n\alpha-a_n\alpha|}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{|2n\alpha-a_n\alpha|}{\sqrt{4n^2+1}}$이다.
$\alpha>0,\ n<a_n<2n$이므로
$\frac{-n+a_n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n-a_n}{\sqrt{4n^2+1}}$에서
$\frac{a_n}{n}=\frac{2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{4}{3}$

27. [정답] ③

$\lim_{n\to\infty}S_n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}S_n - a_1$이고,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2} = \lim_{n\to\infty}S_n - a_1 - a_2$이다.

즉, 첫 번째 조건을 $3+(3-a_1)+(3-a_1-a_2)$라고 할 수 있다.

$9-2a_1-a_2 = 10-a_2$

$\therefore a_1 = -\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\{(n+2)a_{n+1} - na_n\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1} + \lim_{n\to\infty}(n+2)a_{n+1} - a_1$

$= \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1} - a_1 = 3-2a_1 = 4$ ($\because \lim_{n\to\infty}na_n = 0$)

28. [정답] ②

$f(x) - f\left(\frac{1}{n}\right) = x^3+3x^2 - \frac{1}{n^3} - \frac{3}{n^2}$

$= \left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x^2 + (3+\frac{1}{n})x^2 - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n}\right) = 0$

$\alpha_n + \beta_n = -3 - \frac{1}{n}$, $\alpha_n\beta_n = -\frac{1}{n^3} - \frac{3}{n^2}$이 성립한다

$\sqrt{(\alpha_n+\beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n} = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{\left(-3-\frac{1}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^2}\right)}$

$\beta_n - \alpha_n - 3 = \sqrt{\left(-3-\frac{1}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^2}\right)} - 3$

$= \dfrac{\frac{6}{n} + \frac{13}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{\sqrt{\left(-3-\frac{1}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^2}\right)} + 3}$

$\lim_{n\to\infty}n(\beta_n - \alpha_n - 3) = n\dfrac{\frac{6}{n} + \frac{13}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{\sqrt{\left(-3-\frac{1}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^2}\right)} + 3} = 1$

29. [정답] 4

$h_n(x) = \{(x+1)(kg(x))^{n-1}\}$라 하자

$g(x)$는 연속함수이므로 $f(1) = f(-2)$이다.

또한 $g(x)$의 최댓값은 $g(-3) = f(1)$이므로

$f(x) \le f(1)$이 $x=1$근방에서 성립하므로 $f'(1) = 0$이다.

$f(\sqrt{3}) = 0$이므로 $f(x) = -\frac{1}{4}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이다.

(1) $|k| < 2$인 경우는 $|kg(x)| < 1$이므로 모든 실수 x에 대하여 수렴한다.

(2) $k=2$인 경우는 $|kg(x)| \le 1$

등호는 $x \le -2$, $x=1, x=-1$에서 성립한다.

$x \le -2, x=1$인 경우는 $kg(x) = 1$이므로 모든 실수 x에 대하여 수렴하고 $x=-1$인 경우는 $kg(x) = -1$이지만 $h(-1) = 0$이므로 성립한다.

(3) $k=-2$인 경우는

$x=1$에서 $h(1) = 2(-1)^{n-1}$이므로 수렴하지 않는다

따라서 $-1 \le k \le 2$이므로 정수 k의 개수는 4개다.

30. [정답] 64

$f_n(x) = 0$의 근을 $\alpha_n < \cdots < \beta_n$이라 하자.

$f_n(x) = f_{n-1}(f(x)) = 0$이므로

다음이 성립한다

$\beta_{n-1} = f(\beta_n)$, $\beta_{n-1} = f(\alpha_n)$, $\alpha_n + \beta_n = -2 \cdots$ (A)

β_n의 극한값을 구하자.

$\beta_1 = 1$이고 $\beta_{n-1} = f(\beta_n)$에 의해 $\beta_n \ge 1$이므로

2이상인 자연수 n에 대해 $\frac{\beta_{n-1}+4}{2} - 1 = \beta_n$이 성립한다.

$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta$라 하면 $\frac{\beta+4}{2} - 1 = \beta = 2$

(A)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\alpha = -4$이므로 $\lim_{n\to\infty}16|\alpha_n| = 64$

문항별 출제자 안내

공통									
1	우주설	2	우주설	3	우주설	4	우주설	5	우주설
6	우주설	7	우주설	8	우주설	9	우주설	10	우주설
11	우주설	12	우주설	13	우주설	14	우주설	15	전승원
16	우주설	17	우주설	18	우주설	19	우주설	20	우주설
21	우주설	22	전승원						
미적분									
23	전승원	24	전승원	25	전승원	26	전승원	27	우주설
28	전승원	29	공동출제	30	전승원				

출제진 소개

우주설(정재민)

▷ 알티스 수능학원(분당) 원장

▷ 우주설 N제, 우주설 모의고사 저자

오류제보: 010-4800-1224 (우주설T)

전승원

▷ 대치 미강학원 출강

▷ 외대부고 및 8학군 팀수업 전문