[2022학년도 고3 3월 모의고사 수학 (미적분)]
#1 거듭제곱근이나 지수 연산은 일단 다 지수 형태로 전환 후 밑을 통일하면 좋다. 여기선 3으로 밑이 통일되어있으니 sqrt3만 3^(1/2)로 바꾸어 지수 법칙을 적용하면 된다.

#2 f(x)가 미분가능하니 f'(x) 구해 x=-1 대입

#3 a_7과 a_19를 a_4를 기준으로 표현하자, 공차 d로 잡으면 d 결정 후 a_1도 알 수 있음

#4 눈 똑바로 뜨고 바라보자 / 극한은 함숫값과 무관히 어디로 가까워지는지에 대한 개념이다. 자세한 것은 입실론-델타 논법을 알아보자 (사실 이것도 극한값 존재 여부나 존재한다면 어떤 값일지는 수학2에서 훈련해온 직관과 추측으로 알아낸 후 그것이 옳음을 증명할 때 사용하는 논리이긴 하다만, 말로만 풀어내서 추상적이라 느낄 수 있는 부분을 수식으로 풀어뒀기에 조금 더 낫더라 개인적으로는)

#5 theta가 제2사분면의 각임을 확인 후 [sin(x)]^2+[cos(x)]^2=1 또는 tan(x)=sin(x)/cos(x)를 활용하려 들자. 여기선 sin값을 줬으니 직각삼각형 그려 cos값과 tan값 찾으면 되겠지? pdf파일을 확인하자

#6 계산해서 a값 찾고 2f'(a) 값 구하자

#7 이차함수 넓이 공식. 대충 바라보면 integrate (이차함수)-(접선) dx from 0 to 3 했을 때 이 (이차함수)-(접선) 식이 (x-3)^2으로 결정될 것임을 알 수 있다. 그럼 적분값은 integrate x^2 dx from 0 to 3과 같으므로 답은 9

#8 sin함수의 대칭성을 생각하면 (cos함수는 본질적으로 sin함수와 같다, 평행이동하면 겹쳐지기에) a값 결정 가능

#9 위치가 같다는 건 변위가 0이라는 것. 변위는 속도를 적분함으로써 구할 수 있다. 그렇게 a값 결정 후 이동거리는 속력을 적분함으로써 구하면 된다. 속력은 속도에 절댓값 씌운 것 / 혹은 이차함수 넓이 관계 생각해 잘 쳐다보면 대충 a=-12일 것 같다. 그럼 이동거리도 넓이 공식으로 팍팍 해보면 32가 두 덩이 있으니 답은 64

#10 f는 x=-1까지 감소하다 이후로 다시 증가한다. 이때 g'(x)=6(x-1)(x-2)이고 g(2)=2이므로 g(f(x))의 최솟값이 2려면 우리는 f가 -1/2 밑으로 가면 안됨을 알 수 있다. 따라서 f(-1)>=-1/2을 사용하면 k에 대한 정보도 얻을 수 있겠죠!

#11 기울기가 -1인 직선 위의 두 점 사이 거리가 2sqrt2면 걔네들의 x좌표와 y좌표 차도 각각 2일 것이다. 점 A와 B의 x좌표가 k로 주어졌으니 점 C의 x좌표는 k-2로 잡아보자. 우리가 모르는 것은 (미지수) a와 k 두 가지인데 점 B와 C의 y좌표 차가 2이고 점 A와 B의 y좌표 차가 8임을 알고 있으므로 알고있는 정보도 두 가지이다. 따라서 a와 k는 결정되었다

#12 (가) 확인 후 f(x)가 x=2에서 불연속이면 h(x)도 불연속일 것이다. 따라서 연속, a=3/2. f(x) 식 줬으니 (가)에서 h(x)도 그에 따라 작성해보면 실수 전체 집합에서 연속이기 위해 g(x)=(x-1)(x-3/2)(x-k)일 것임을 알 수 있다. (나)에서 k=3이므로 f(x), g(x), h(x) 결정되었으니 끝

#13 등차수열의 합은 상수항 없는 이차함수를 자연수 정의역으로 끊어둔 것이다. S_n=an^2+bn (a=/0) 정도로 잡고 생각을 해보자. 첫째항이 양수려면 이차함수가 (0, 0)을 지나 제1사분면으로 가야한다는 뜻이므로 a<0. |S_11|-3=|S_3|>=0이므로 |S_11|>=3이다. 이제 차분히 경우 나눠 그래프 위에 점 찍어보거나 식 연립하면 된다, 자세한 것은 pdf 참고

#14 pdf 참고

#15 pdf 참고

#16 로그 연산도 지수 연산과 마찬가지로 밑 통일 후 성질 적용이 핵심이다.

#17 |f(x)|와 같은 것은 f(x)값이 음수일 때와 음수가 아닐 때로 나누어 절댓값 기호를 구간 별로 풀어주면 된다

#18 등비수열 합 공식, 자연수 거듭제곱 합 공식 활용

#19 k를 우변으로 넘겨 결정된 3x^4-4x^3-12x^2와 -k를 비교해도 되고 아님 한 번에 가도 된다. 도함수 부호 통해 개형 결정하고 잘 바라봐보자

#20 귀납적으로 정의된 수열은 차근차근 대입해서 알아보면 된다. 혹은 a_(n+1)이 a_n을 통해 결정된다는 관점에서 바라보면 a_(n+1)을 f(x)로, a_n을 x로 바라보아 그래프를 그려볼 수도 있다. pdf 참고

#21 (가)에서 a, b, k에 관한 관계식 하나 얻고 (나)에서 a, b, k에 관한 관계식 하나 얻으니 미지수 3개에 대해 우리가 알고 있는 서로 다른 정보는 2개입니다. 다시 말해 a, b, k를 결정할 수 없습니다. 그럼 발문에 점 A가 유일하다는 정보까지 활용했을 때 a, b, k가 결정되겠죠! / 로그함수를 y=x에 대칭한 함수와 주어진 지수함수의 교점이 오직 1개 (정확히는 로그함수와 지수함수를 각각 평행이동한 함수이긴 합니다) / 직관적으로 바라볼 때 x=-2와 y=2 고정된 상태에서 x=-k와 y=k 움직일 건데 뭔가 대칭일테니 대충 k=-2 혹은 k=2로 찍어볼 수도 있겠죠 ㅋㅋㅋㅋ / 엄밀하게는 y=2^(x+k)-2와 y=4^(x+k)+2가 접하는 상황이니 지수함수 미분법을 활용해야합니다. 원래 이래서 수1 지수로그함수 문제들이 그래프를 통해 직관적으로 파악한 상황을 엄밀히 바라볼 때 미적분 내용을 갖고와야할 때가 있어요. 특히 교육청 모의고사나 사관학교 기출문항!

#22 정적분으로 정의된 함수는 적절한 수 대입해 구간 0 만들고 양변 미분해보는 것이 기본 아이디어. 곱함수의 미분법과 절댓값 함수의 미분법, 방정식에서 서로 다른 실근의 의미와 그래프의 교점의 의미, 합성방정식 해석 정도가 들어가 있네요! 자세한 것은 pdf파일과 수업 시간에 피드백

#23 lim 분배해야하는데 2^n보다 3^n이 압도적으로 빨리 가니 분모 분자를 3^n으로 나눠보자.각각이 수렴하고 분모가 0으로 안 가니 분배 가능

#24 lim (n->inf) 1/n 이 0으로 수렴하니 양변에 곱해주고 lim 분배 / a_n은 대충 5n/3이다

#25 무한대-무한대 꼴에 루트 있고 비슷한 속도로 무한대로 갈 듯하니 유리화해보자

#26 a_n은 등차수열이고 1/b_n도 등차수열이다

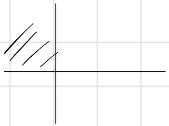
#27 a_n에 관한 이차부등식이니 정리하면 a_n 범위가 잡히겠다. 이후는 lim 걸어서 샌드위치 쓰면 되겠지? '부등식에 lim 취하면 등호 들어간다'

#28 미적분 문제지만 사실 수1 수열 문제라고 봐야한다. 규칙성 찾은 후 lim만 분배해주자

#29 등비수열의 극한을 떠올려보면 함수 f(x)는 결정된다. 그래프 잡고 y=tx-2에서 t를 움직여보자

#30 차분히 각 점들, 각 방정식들을 작성한 후 f(n)-g(n)을 구하려해보자. 문제가 길긴 한데 쉽다. 이것도 28번과 비슷한 맥락에서 미적분 문제지만 사실 수1 수열 문제다. N에 따른 f(n)-g(n) 식을 작성해준 후 lim만 분배하면 끝

#5



$\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$.

$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

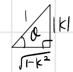
$= -\cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{5}{6}\sqrt{3}$

$\sin\theta = k$ $\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 에 따라

부호는 몰라도 절댓값은 결정 가능



어차피 비율 얘기에 (삼각비)

$|\cos\theta| = \sqrt{1-k^2}$, $\quad |\tan\theta| = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$.

#7

$l: y = mx + n$

$(x^2-4x+6) - (mx+n) = x^2 - (m+4)x - n + 6$

$= (x-3)^2$

$\because \; m = (x^2-4x+6)'\big|_{x=3}$, $\; n = x^2-4x+6\big|_{x=3}$

$$\int_0^3 (x-3)^2\,dx = \int_{-3}^0 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = 9$$

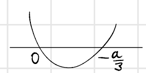
#9

$x(6) - x(0) = \int_0^6 u(t)\,dt = 0$

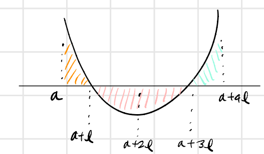
$\Rightarrow \int_0^6 t(3t+a)\,dt = 0$

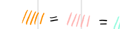
$a \geq 0$ 라면 $t \geq 0$ 에서 $u(t) \geq 0$ 이라 $\int_0^6 u(t)\,dt \geq 0$

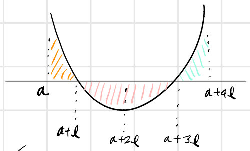
$a < 0$ 이므로



이때 이차함수 넓이 성질을 떠올려보자.







pf) $y=k(x-p)(x-q) \quad (k>0,\ q>p)$

$$\int_p^q k(x-p)(x-q)\,dx = k\int_p^q \left[(x-p)^2+(p-q)(x-p)\right]dx$$

$$= k\left[\frac{1}{3}(x-p)^3 + \frac{1}{2}(p-q)(x-p)^2\right]_p^q$$

$$= -\frac{k}{6}(q-p)^3$$

$$\int_q^{q+\frac{q-p}{2}} k(x-p)(x-q)\,dx = \sim = k\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}(q-p)\right)^3-\frac{1}{3}(q-p)^3+\frac{1}{2}(p-q)\left(\frac{3}{2}(q-p)\right)^2+\frac{1}{2}(q-p)^3\right]$$

$$= \frac{k}{6}(q-p)^3$$

$$\int_{p-\frac{q-p}{2}}^{p} k(x-p)(x-q)\,dx = \sim = \frac{k}{6}(q-p)^3$$

$$\int (x-\alpha)^n\,dx = \int \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \cdot x^r \cdot (-\alpha)^{n-r}\,dx$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \cdot \frac{x^{r+1}}{r+1}\cdot(-\alpha)^{n-r} + C$$

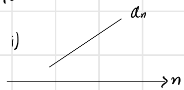
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_{n+1}C_{r+1} \cdot \frac{x^{r+1}}{n+1}\cdot(-\alpha)^{n-r} + C$$

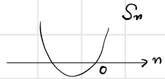
$$= \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1} + C$$

이후에 미적분에서 치환적분법 공부하면
이항 정리 없이 더 편하게 설명 가능

#13

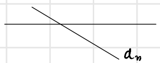
i)

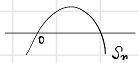




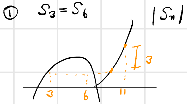
$S_n < S_{n+1}$ 이므로 모순

ii)





① $S_3 = S_6$



$S_n = kn(n-9)$

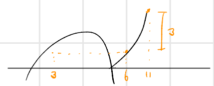
$-S_{11} = -22k$.

$-22k - (-18k) = 3$.

$\Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$

$a_1 = S_1 = -\frac{3}{4}\cdot(-8) = 6$

② $S_3 \neq S_6$ $(S_3 + S_6 = 0)$



$S_n = an^2 + bn$에 대해 $S_3 + S_6 = 0$ 에서 $b = -5a$.

$S_n = an(n-5)$ 에서 $-S_{11} = -66a$

$-66a + 6a = 3$, $a = -\frac{1}{20}$.

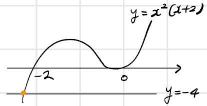
$a_1 = S_1 = -\frac{1}{20}\cdot(-4) = \frac{1}{5}$

#14

ㄱ. $k=0,\quad x^3+6+2x^2-2=0$

$\Leftrightarrow\ x^3+2x^2+4=0.$

$\Leftrightarrow\ x^2(x+2)=-4$



ㄴ. $x^3-kx+6-(2x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow\ \underbrace{x^3-2x^2-kx+8}=0$

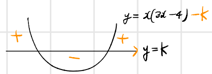
$\quad\ \overset{\shortparallel}{y},\quad \dfrac{dy}{dx}=3x^2-4x-k \ \text{vs}\ 0$

$\Leftrightarrow\ x(3x-4)\ \text{vs}\ k$

삼차방정식의

서로 다른 실근의 개수가 2개 이상이려면

일단 삼차함수의 도함수가 서로 다른 두 실근을 가져야



이제 $3x^2-4x-k=0$ 의 해 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+3k}}{3}$ 에 대해

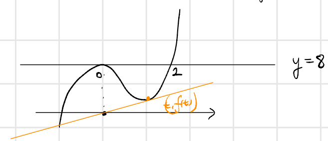
$y\Big|_{x=\frac{2+\sqrt{4+3k}}{3}}=0$ or $y\Big|_{x=\frac{2-\sqrt{4+3k}}{3}}=0.$

딱 봐도 계산하기 싫게 생김.

$x^3-2x^2+8=kx$

$\Leftrightarrow\ x^2(x-2)+8=kx$

$y=x^2(x-2)+8$



$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$\Leftrightarrow\ y=(3t^2-4t)(x-t)+t^3-2t^2+8$

$\Rightarrow\ 0=-3t^3+4t^2+t^3-2t^2+8$

$\Leftrightarrow\ 2t^3-2t^2-8=0$

$\Leftrightarrow\ t^2(t-1)=4$

직관적으로 $t=2.\quad f'(2)=4=k$

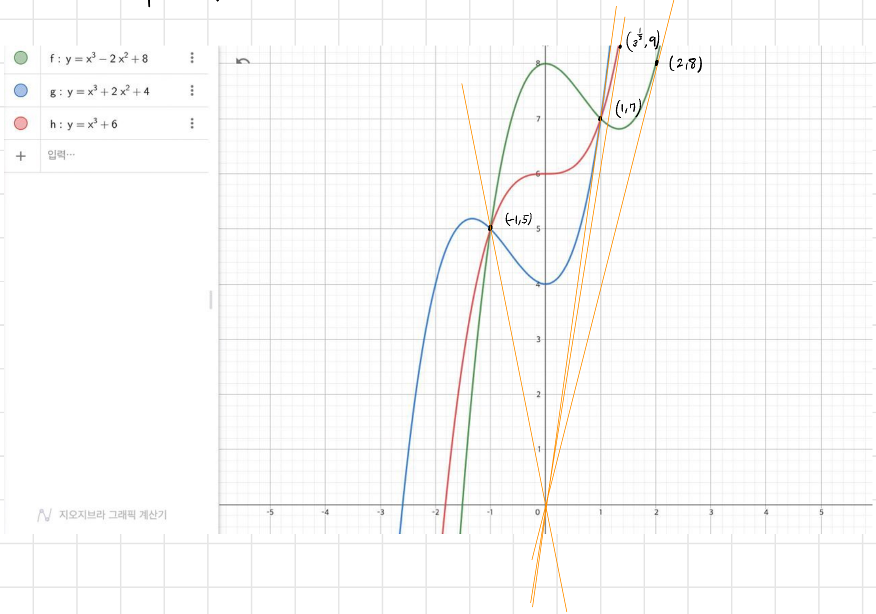
삼차방정식의 근의 공식 아니면 조립제법으로 첫 근 찾기는 찍기

ㄷ. $y=g(x)$ 그려두고 $y=|f(x)|$ 그려서 기워 맞춰도 되는데 현장에서는 안 보이면 고달플 수도

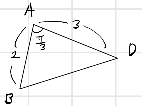
방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$라 할때

$$|f(x)|=g(x) \longrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) & (f(x)\ge 0) \\ f(x)+g(x)=0 & (f(x)<0) \end{cases} \iff \begin{cases} x^3-2x^2+8=kx & (x^3+6\ge kx) \\ x^3+2x^2+4=kx & (x^3+6<kx) \end{cases}$$

$$h(k)=\begin{cases} 0 & (k<-5) \\ 1 & (k=-5) \\ 2 & (-5<k<4) \\ 3 & (k=4) \\ 4 & (4<k) \end{cases}$$

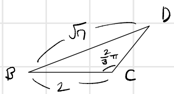


#15



$\overline{BD}^2 = 2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \overline{BD}=\sqrt{7}$



$\sqrt{7}^2 = \overline{CD}^2+2^2-2\cdot2\cdot\overline{CD}\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$

$\Leftrightarrow \overline{CD}^2+2\overline{CD}-3=0$

$\Leftrightarrow (\overline{CD}-1)(\overline{CD}+3)=0$

$\Rightarrow \overline{CD}=1$

$\triangle EAB \backsim \triangle ECD$ 에서

$\overline{EB}:\overline{ED}=\overline{EA}:\overline{EC}$

$\Rightarrow \overline{EA}\cdot\overline{ED}=\overline{EC}\cdot\overline{EB}$

$\Leftrightarrow (\overline{ED}+3)\overline{ED}=(\overline{EB}-2)\cdot\overline{EB}$

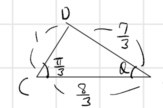
$\overline{AB}:\overline{CD}=2:1$

$\overline{ED}=\frac{7}{3}$, $\overline{EB}=\frac{14}{3}$

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$ (원에 내접하는 사각형)

$\angle BCD + \angle DCE = \pi$ (직선)

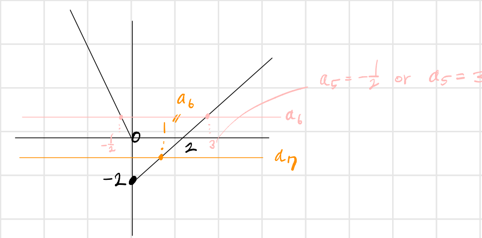
$\rightarrow \angle ECD = \frac{\pi}{3}$



$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$

#20

$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n<0) \\ a_n-2 & (a_n\geq 0)\end{cases} \longrightarrow y = \begin{cases} -2x & (x<0) \\ x-2 & (x\geq 0)\end{cases} \longrightarrow$



#21

$y = 2^{x-k} - 2$ 와 $y = 4^{x+k} + 2$ 를 비교.

방정식 $4^k \cdot (2^x)^2 - 2^{-k} \cdot 2^x + 4 = 0$ 이 오직 한 근.

$$2^x = \frac{2^{-k} \pm \sqrt{4^{-k} - 4^{k+2}}}{2 \cdot 4^k} \longrightarrow \underbrace{2^x = \frac{2^{-k} + \sqrt{4^{-k} - 4^{k+2}}}{2 \cdot 4^k}}_{\alpha}$$ 와 $$\underbrace{2^x = \frac{2^{-k} - \sqrt{4^{-k} - 4^{k+2}}}{2 \cdot 4^k}}_{\beta}$$ 에서

$\begin{cases} ① \ \alpha \le 0, \ \beta > 0 \quad (\text{모순}) \\ \text{or} \\ ② \ \alpha = \beta \quad (k=-1) \end{cases}$

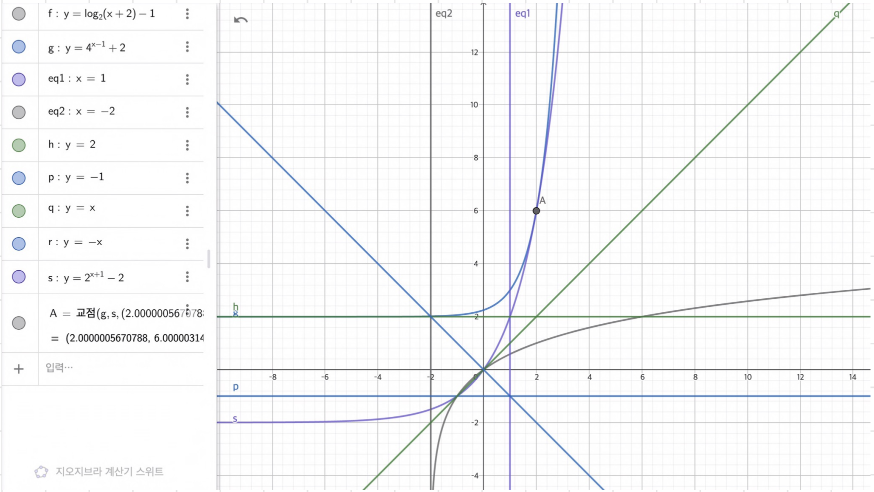
〈엄밀하게〉

$y = \log_2(x+2) + k$ 를 $y = x$ 에 대칭이동한 함수와 $y = 4^{x+k} + 2$ 가 접함

접점의 x좌표를 u라 하자 $\longrightarrow$ $\left(2^{x-k} - 2\right)'\Big|_{x=u} = \left(4^{x+k} + 2\right)'\Big|_{x=u}$

$\Leftrightarrow \ 2^{u-k} \cdot \ln 2 = 4^{u+k} \cdot \ln 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + 3k + 1 = 0 \\ 2^{u-k} - 2 = 4^{u+k} + 2 \end{cases} \longrightarrow u = 2, \ k = -1$



〈지수·로그함수 미분법〉

$y = a^x$ $(0<a<1$ or $1<a)$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

$y = \log_a x$ $(0<a<1$ or $1<a)$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_e a} \cdot \frac{1}{x}$ $\quad \left(e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$

#22

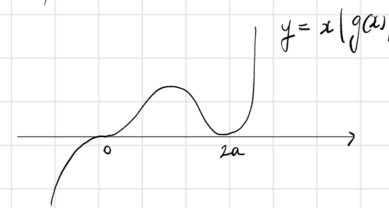
$$\begin{cases} \forall a,\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\ g(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b\text{는 상수}) \end{cases}$$

(가) $x=2a$, $2a\cdot|g(2a)| = 0 \iff g(2a)=0 \ (\because a>0)$

$x|g(x)|$가 미분 가능 $\longrightarrow$ $g(b)=0$ 이면 $(b\neq 0)$ $g'(b)=0$ $\longrightarrow$ $g(x) = x(x-2a)^2$

$g(b)=0$ 이면 $(b=0)$ 문제 X

$$x|g(x)| = \begin{cases} x^2(x-2a)^2 & (x\geq 0) \\ -x^2(x-2a)^2 & (x<0) \end{cases}$$

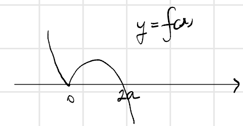


양변 x에 대해 미분, $\frac{d}{dx}(x|g(x)|) = \frac{d}{dx}\left(a\int_{2a}^{x} f(t)dt - \int_{2a}^{x} tf(t)dt\right)$

$= (a-x)f(x)$

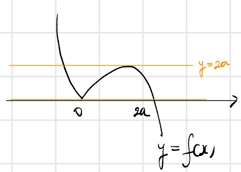
$$\iff (a-x)f(x) = \begin{cases} 4x(x-a)(x-2a) & (x\geq 0) \\ -4x(x-a)(x-2a) & (x<0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -4x(x-2a) & (x\geq 0) \\ 4x(x-2a) & (x<0) \end{cases}$$



(나) $g(f(x)) = 0 \iff g(t)=0$ 을 만족하는 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ (n은 자연수) 에 대해 $f(x) = t_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 의 해

$g(x) = x(x-2a)^2$ 이므로 $f(x)=0$ or $f(x)=2a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4개. $\iff$ $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=0$, $y=2a$의 그래프와의 교점 개수가 4개



$f(a) = 2a$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ $(\because a>0)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 4x(x-1)dx + \int_{0}^{1} -4x(x-1)dx$$

#24

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n-5n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3a_n}{n}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3a_n}{n}-5\right)+\lim_{n\to\infty}5=\lim_{n\to\infty}0+\lim_{n\to\infty}5$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3a_n}{n}-5+5\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{5}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{a_n}{n}}{4}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{a_n}{n}}{\lim_{n\to\infty}4}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot2\cdot\frac{5}{3}$$

$$=\frac{5}{6}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 일 것. $\infty-\infty$에서

$$\begin{cases}\infty-\infty & (X)\\ \infty-\infty & (O) \longrightarrow a_n\sim\frac{5}{3}n.\\ \infty-\infty & (X)\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot\frac{5}{3}n}{4n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{3}}{4}$$

$$=\frac{5}{6}$$

28

$A_1\ (0,0)$

$A_2\ (a,0)$

$A_3\ (a, a+1)$

$A_4\ (2a, a+1)$

$A_5\ (2a, 2(a+1))$

$\vdots$

$A_{2n-1}\ ((n-1)a, (n-1)(a+1))$

$A_{2n}\ (na, (n-1)(a+1))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2a^2+(n-1)^2(a+1)^2}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{a^2+\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot(a+1)^2}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty}a^2+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}\cdot\lim_{n\to\infty}(a+1)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2+2a+1}$$

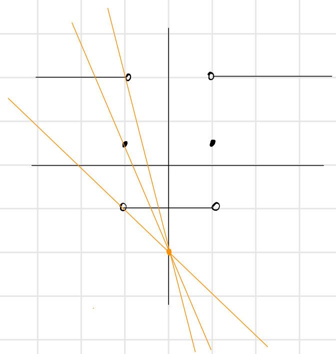
$$= \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ a=\frac{3}{2}\quad(a>0)$$

29

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (x<-1 \text{ or } x>1) \\ \frac{1}{2} & (x=\pm 1) \\ -1 & (-1<x<1) \end{cases}$$



$y=f(x)$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t\le -4) \\ 2 & (-4<t<-2.5) \\ 3 & (t=-2.5) \\ 2 & (-2.5<t\le -1) \\ 1 & (-1<t<0) \\ 0 & (t=0) \\ 1 & (0<t\le 1) \\ 2 & (1<t<2.5) \\ 3 & (t=2.5) \\ 2 & (2.5<t<4) \\ 1 & (t\ge 4) \end{cases}$$

$a_1=-4$

$a_2=-2.5$

$a_3=-1$

$a_4=0$

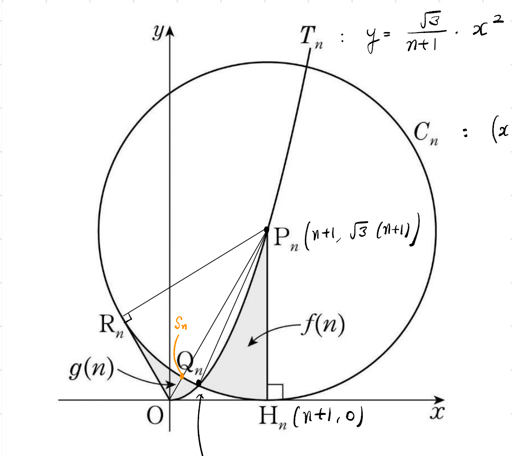
$a_5=1$

$a_6=2.5$

$a_7=4$

$m=7,\ a_m=4$

#30



T_n : $y = \dfrac{\sqrt{3}}{n+1}\cdot x^2 \ (x \geq 0)$

C_n : $(x-(n+1))^2 + (y-\sqrt{3}(n+1))^2 = 3(n+1)^2$

☆ : $\overline{OH_n}$, T_n, C_n 으로 둘러싸인 부분의 넓이

$P_n(\alpha,\beta)$, $\begin{cases} \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2(n+1) \\ \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{n+1}\alpha^2 \end{cases} \longrightarrow \alpha = n+1,\ \beta = \sqrt{3}(n+1)$

$$f(n) - g(n) = (f(n) + ☆) - (g(n) + ☆) = \int_0^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{n+1} x^2\, dx - 2(\triangle OH_nP_n - \text{부채꼴 } P_nH_nS_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(n+1)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1)^2\cdot\theta\right) \qquad \left(\theta = \angle OP_nH_n = \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$