#1 로그의 성질

#2 등차수열 {a_n}에 대해 a_p-a_q=(p-q)d 입니다. (단, d는 공차. 증명은 쉬워요)

#3 y=sin(4x)의 그래프와 y=1/2의 그래프를 그린 후 대칭성 활용

#4 기함수 우함수 성질, 다항함수 적분

#5 눈을 똑바로!

#6 연속의 정의를 적용해봅시다. lim (x->3-) f(x)를 바라볼 때 a와 b에 관한 정보가 하나 나오고 lim (x->3+) f(x)과 값을 비교할 때 정보가 하나 더 나와 a, b를 결정할 수 있습니다.

#7 차분히 n=1, 2, 3, ... 대입해보면 a_n의 형태를 파악할 수 있습니다. 가볍고 예쁘게 나열해보면 자연수 거듭제곱에 시그마 씌운 공식을 활용할 수 있음을 알 수 있습니다.

#8 삼차함수의 그래프를 그려두면 M이 극댓값이고 m이 극솟값임을 알 수 있습니다.

#9 삼차함수 넓이 공식 / 혹은 접선의 방정식을 구해보려 하니 f(x)에 관한 정보가 충분하지 않아 어렵습니다. f(x)-g(x)를 한 번에 -3x(x-2)^2로 작성 후 적분하시면 됩니다. (pdf 참고)

#10 차분히 잘 계산해보시면 됩니다, 크게 어려운 빈칸 찾기 문항은 아닙니다.

#11 원이 보이면 원의 중심을 기준으로 생각해보면 좋습니다. S_1은 부채꼴 O'AB에서 부채꼴 OAB의 넓이를 빼준 후 S_2를 더해주면 됩니다. 다시 말해 S_1-S_2는 부채골 O'AB에서 부채골 OAB의 넓이를 빼준 것이기 때문에 주어진 각의 크기를 활용해 계산해보시면 됩니다.

#12 극한의 성질을 이용해 lim 분배하시다 보면 해결됩니다.

#13 복잡해보이지만 지수함수의 그래프를 활용한 상태이므로 그래프 그려 생각해보시면 됩니다.

#14 (pdf 참고) g(x)애 ㅣf'(x)ㅣ를 박아뒀지만 별 의미가 없습니다. (가), (나), (다) 조건으로 f(x) 확정하면 끝나서...

#15 미적분에서 '삼각함수의 덧셈정리'를 공부하면 주어진 각 ABC의 정보를 각 ABE의 정보로 직접적으로 바꿀 수 있지만 우선은 수1 내의 풀이부터. 각의 이등분선이 주어졌으니 a:b:=c:d 비율 관계부터 써볼 필요가 있겠죠! ㄱ은 삼각형 ABC의 세 정보 (길이, 길이, 각)을 알기 때문에 cos법칙 돌려주면 참임을 알 수 있습니다. ㄴ은 원이 주어졌으니 원주각과 호의 길이, 나아가 현의 길이의 관계를 떠올려볼 수 있습니다. ㄷ은 cos법칙과 할선 정리 (혹은 방멱 정리. 교과 외지만 닮음으로 유도 가능하기에 수능 간접 출제 범위라고 할 수 있습니다. 닮음은 중학교 수학에서 학습하죠!) 를 통해 거짓임을 확인 가능 (pdf 참고)

#16 곱미분

#17 이차부등식은 판별식 활용해보시면 됩니다. D<0면 실근을 갖지 않을테니 최고차항의 계수가 양수인 이차함수에 대해서는 (이차함수)>0이 실수 전체의 집합에서 성립하겠죠?

#18 integrate f(x) dx from -3 to 2 = integrate f(x) dx from -3 to 0 + integrate f(x) dx from 0 to 2 계산해주면 k값 나올텝니다

#19 a_n=S_n-S_(n-1) (n>=2)를 활용해 주어진 관계식을 정리해봅시다. (pdf 참고)

#20 ㅣx-1ㅣ를 x=1 기준으로 풀어주고 g(x) 구한 후 곱함수의 연속성 적용해주시면 됩니다. (pdf 참고) 이후는 차분히 n=1, 2, 3, .. 대입해 S_5 값을 찾아보시면 되겠습니다.

#21 선분 AC와 BD가 평행하므로 서로 크기가 같은 두 쌍의 각을 확인할 수 있습니다. 이에 따라 선분 AD와 선분 BC의 교점을 E라 할 때 삼각형 ACE와 DBH는 닮음이며 닮음비는 1:2라고 볼 수 있습니다. 이후 주어진 식을 sin법칙을 활용해 선분 AD와 BC에 관한 정보로 단순히 표현한 후 sin법칙 활용 과정에서 각 CAB와 ABD를 활용했음을 떠올려 삼각형 ABC와 ABD에서 이 두 각을 중심으로 cos법칙을 적용해봅시다. 앞서 얻은 선분 AD, BC에 관한 정보를 사용하면 cos(CAB)를 k에 대한 식으로 작성 가능하고 이때 삼각형 ACH에서 cos(CAB)=cos(CAH)를 활용하면 k^2=15. (개인적으로 너무 끼워맞추는 문제라고 생각합니다. 물론 누군가는 이것을 좋은 문제라 생각할 수도 있지만... 제가 느끼기에는 sin법칙을 활용해 주어진 R, r, cos값에 관한 정보를 두 선분의 길이의 관계를 나타내는 상황으로 바꾸는 것까지가 공부할 만하다고 생각합니다. 그렇지만 문제는 가리지 말고 푸셔야합니다! 저는 가르치는 입장이니 평가를 하지만 공부할 때는 되는 대로 모두 학습하는 것이 좋습니다.)

#22 정적분으로 정의된 함수이니 대입하고 미분해봅시다. (pdf 참고)

#23 분모 분자를 각각 n^3으로 나눠주면 lim 분배 가능

#24 등비수열의 수렴하려면 -1<(공비)<=1

#25 a_n=r^n 대입하면 a_n 결정 가능

#26 각 항에 시그마 씌워주면 샌드위치 정리

#27 차분하게 식 정리해주시면 됩니다. (pdf 참고)

#28 피타고라스의 정리로 선분 BC의 길이 작성할 수 있고 각의 이등분선 정리에 따라 BD:CD=2:n 활용하시면 a_n 작성 가능합니다. 이후 lim 분배 위한 작업

#29 차분히 l_n의 식을 작성한 후 원 C_n의 중심을 잡아 P_n, Q_n과 연결해줍시다. 원에 어떤 직선을 그려 원의 넓이를 이등분하려면 그 직선은 원의 중심을 지나야합니다. 깡 연립 해주면 원의 정보를 파악할 수 있긴 하지만 그러면 쉽지 않으니... '현의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다'를 활용해주도록 합시다. (pdf에는 없음)

#30 f'(x)를 통해 a_n을 구하고 비율 관계를 통해 b_n을 구해 lim 분배 과정에서 유리화 한 번 해주시면 되겠습니다. 혹은 삼차방정식에서 실근의 합이 상수항과 무관히 삼차항과 이차항의 계수로 결정된다

는 점에서 근과 계수의 관계를 활용해 b_n을 a_n에 대해 표현해봐도 좋겠습니다. 첨언하자면 삼차방정식에 상수항을 더하는 것은 기존의 삼차방정식을 f(x)=0 꼴이라 할 때 f(x)를 y축 방향으로 평행이동하는 것과 같습니다. 마찬가지 맥락에서 f(x)=f(a_n) 꼴의 방정식은 함수 y=f(x)와 y=f(a_n)을 비교한다 생각하셔도 좋습니다. 이렇듯 킬러 문항에서 방정식의 근을 그래프의 교점의 x좌표로 생각하는 사고과정은 잘 쓰이니 익숙하게 만들어두시면 좋겠습니다.

#9

$$f(x)-g(x) = -3x(x-2)^2$$

$$\left|\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx\right| = \frac{|-3|}{12}\cdot 2^4 = 4 \quad (\text{넓이 공식})$$

or

$$= \left|\int_0^2 -3(x-2+2)(x-2)^2\,dx\right| = \left|-3\int_0^2 ((x-2)^3+2(x-2)^2)\,dx\right| \quad (\text{약간의 식 조작})$$

or

$$= \left| -x(x-2)^3\Big|_0^2 + \int_0^2 (x-2)^3\,dx \right| \quad (\text{부분적분법})$$

$$\int_\alpha^\beta k(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx = k\cdot\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta k\cdot\frac{n}{m+1}\cdot(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\,dx$$

$$= \cdots = k\cdot\frac{m!\,n!\,(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\cdot(-1)^n$$

or

$$\int_\alpha^\beta k(x-\alpha)^m(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta k\cdot(x-\alpha)^m\cdot(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx$$

$$= k\int_\alpha^\beta ((x-\alpha)^{m+1}+(\alpha-\beta)\cdot(x-\alpha)^m)\,dx$$

$$= k\cdot\frac{(x-\alpha)^{m+2}}{m+2}\Big|_\alpha^\beta + k(\alpha-\beta)\cdot\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}\Big|_\alpha^\beta$$

$$= k\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{m+1}}{(m+1)(m+2)}\cdot((m+1)(\beta-\alpha)+m+2)$$

<부분적분법>

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \longrightarrow \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

<치환적분법>

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x) \longrightarrow \int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f'(g(x))\,d(g(x)) = f(g(x)) + C$$

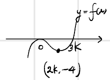
#14

$$g(x) = \begin{cases} f(x)+f'(x) & (f'(x) \geq 0) \\ f(x)-f'(x) & (f'(x) < 0) \end{cases}$$

(가) $f'(0) = 0$. $f(x) = x^2(x-3k)$

(나) $k>0$

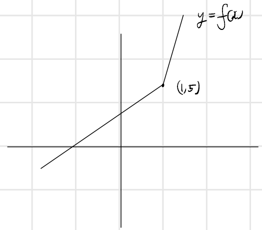
(다)



$\longrightarrow$ $k=1$

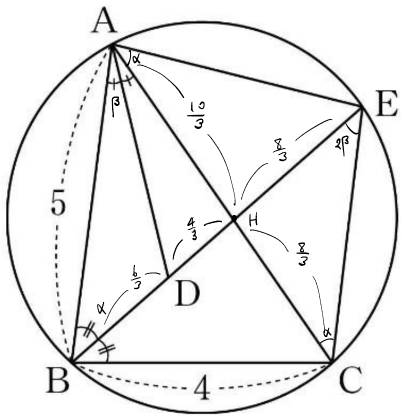
#19

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & (x \geq 1) \\ x+4 & (x<1) \end{cases}$$



$\longrightarrow$ $g(x) = \begin{cases} 1 & (x<1) \\ 0 & (1 \leq x < 3) \\ 1 & (3<x) \end{cases}$ $\longrightarrow$ $h(x) = (x-1)(x-3)$

#15



ㄱ. $\triangle ABC$에서 cos 법칙. $\overline{AC}^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{1}{8}$, $\overline{AC} = 6$

ㄴ. $\angle ABE = \angle EBC \xrightarrow{\sin \text{ 법칙}} \overline{AE} = \overline{EC}$

ㄷ. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AH} : \overline{HC}$ 이므로 $\overline{AH} = \frac{10}{3}$

$\triangle ABC$에서 cos 법칙. $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot \cos(\angle BAC)$, $\cos(\angle BAC) = \frac{3}{4}$

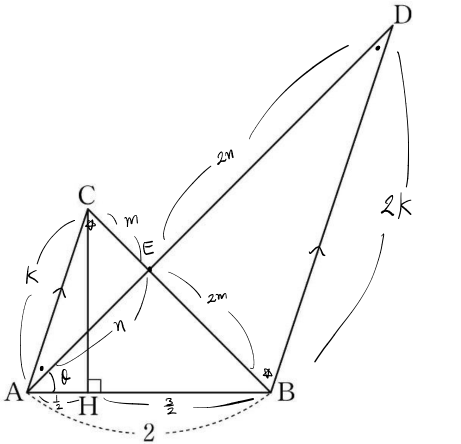
$\triangle ABH$에서 cos 법칙. $\overline{BH}^2 = 5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2\cdot 5\cdot \frac{10}{3}\cdot \frac{3}{4}$, $\overline{BH} = \frac{10}{3}$

$\triangle ABH$에서 $\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{BD} : \overline{DH}$ 이므로 $\overline{DH} = \frac{4}{3}$.

$\triangle ABH \backsim \triangle ECH$ (AA 닮음) 에서 $\overline{AH} : \overline{BH} = \overline{EH} : \overline{CH}$ 이므로 $\overline{AH}\cdot\overline{CH} = \overline{BH}\cdot\overline{EH}$ 에서 $\overline{EH} = \frac{8}{3}$.

$\overline{ED} = 4$

#21



$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 이므로 $\angle CAD = \angle ADB$, $\angle ACB = \angle CBD$

$\triangle ACE \sim \triangle DBE$ (AA 닮음), $\overline{AC} : \overline{BD} = 1:2$

$\angle DAB = \theta$라 할 때 $\sin(\angle CAB) = \sin(\bullet + \theta) = \sin(\pi - (\bullet + \theta)) = \sin(\angle ABD)$

sin 법칙에 의해 $2R \cdot \sin(\angle ABD) = \overline{AD}$. $2r \cdot \sin(\angle CAB) = \overline{BC}$.

$4(R^2 - r^2) \cdot \sin^2(\angle CAB) = (2R \cdot \sin(\angle CAB))^2 - (2r \cdot \sin(\angle CAB))^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$ 에서 $n^2 - m^2 = \frac{17}{3}$

$\triangle ACB$에서 cos 법칙. $(3m)^2 = K^2 + 2^2 - 2 \cdot K \cdot 2 \cdot \cos(\angle CAB) \cdots$ ㉠

$\triangle ABD$ 에서 cos 법칙. $(3n)^2 = 2^2 + (2K)^2 - 2 \cdot 2K \cdot 2 \cdot \cos(\angle ABD) \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ $\longrightarrow$ $9(m^2 - n^2) = -3K^2 - 12K \cdot \cos(\angle CAB)$ $(\because \angle ABD = \pi - \angle CAB)$

$\Leftrightarrow K^2 + 4\cos(\angle CAB) K - 17 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\angle CAB) = \frac{17 - K^2}{4K}$

이때 $\angle CAB = \angle CAH$ 이고 $\triangle CAH$ 에서 $\cos(\angle CAH) = \frac{\frac{1}{2}}{K} = \frac{1}{2K}$.

$\longrightarrow \frac{17 - K^2}{4K} = \frac{1}{2K}$, $K^2 = 15$

#19

$$a_{n+1} \cdot S_n = a_n \cdot S_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(S_{n+1} - S_n\right) S_n = \left(S_n - S_{n-1}\right) S_{n+1} \quad (n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow S_n^{\,2} = S_{n-1} \cdot S_{n+1} \quad (n \geq 2)$$

or

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} \quad (\forall n \in N)$$

#22

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = (x^2-4) \cdot \left(|f(x)| - a\right)$$

(가) $g'(x)$ 의 부호 변화 X $\longrightarrow |f(2)| = |f(-2)| = a \longrightarrow f(x) = \frac{a}{2}x$ or $f(x) = -\frac{a}{2}x$

(나) $5 = \int_0^2 (x^2-4) \cdot \frac{a}{2}(x-2)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^2 (x+2)(x-2)^2\,dx$

$$= \frac{a}{2}\int_0^2 \left((x-2)^3 + 4(x-2)^2\right)dx$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{4}(x-2)^4\Big|_0^2 + \frac{4}{3}(x-2)^3\Big|_0^2\right)$$

$$= \frac{10a}{3}, \quad a = \frac{3}{2}$$

$$g(0) - g(-4) = \int_{-4}^{0} (x^2-4)\left(-\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{3}{4}\int_{-4}^{0} (x-2)(x+2)^2\,dx$$

$$= -\frac{3}{4}\int_{-4}^{0} \left((x+2)^3 - 4(x+2)^2\right)dx$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \int_{-2}^{2} (x^3 - 4x^2)\,dx$$

$$= x^3\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 16$$

#27

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+3)!} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$-\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\frac{a_{n+1}}{n!} = 3\cdot\left(\frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$= -3\cdot\frac{n+2}{(n+3)!}$$

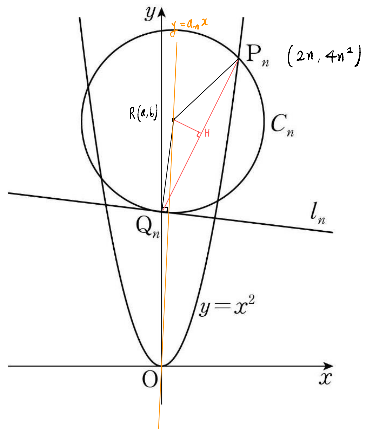
$$\Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{-3}{(n+1)(n+3)} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$a_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1 + n^2 a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2}{(n+1)(n+3)}$$

$$= -\frac{5}{2}$$

#29



$y=x^2$ 위 점 P_n 에서의 접선의 방정식 : $y = 4n(x-2n)+4n^2$

l_n 의 방정식 : $y = -\frac{1}{4n}x + 2n^2 \iff x + 4n \cdot y - 8n^3 = 0$

C_n의 중심을 $R(a,b)$, 반지름을 r 이라 하자.

$C_n : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$$\begin{cases} (2n-a)^2 + (4n^2-b)^2 = r^2 \\ a^2 + (2n^2-b)^2 = r^2 \\ r = \dfrac{|a+4n\cdot b-8n^3|}{\sqrt{4n^2+1}} \end{cases} \longrightarrow a = \frac{n^3+n}{4n^2+1},\ b = \frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1},\ r = \frac{16n^5+17n^3+n}{(4n^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_n = \frac{b}{a} = \frac{12n^3+6n}{n^2+1}$$

풀$_2$) $\overline{P_nQ_n}$ 의 수직이등분선이 R을 지남 $\longrightarrow$ R은 $\overline{Q_nR}$ 과 $\overline{HR}$ 의 교점

$$\left.\begin{aligned} \overline{Q_nR} &: y = 4n\cdot x + 2n^2 \\ \overline{HR} &: y = -\frac{1}{n}(x-n) + 3n^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow a = \frac{n^3+n}{4n^2+1},\ b = \frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$$

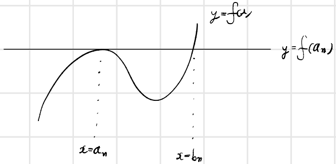
#30

$$f(x) = x^3 - (n+3n^2)x^2 + 3n^3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(n+3n^2)x + 3n^3$$

$$f''(x) = 6x - 2(n+3n^2) \longrightarrow c_n = \frac{n+3n^2}{3}$$

$$a_n = \frac{n+3n^2 - \sqrt{(n+3n^2)^2 - 3\cdot 3n^3}}{3} = \frac{n+3n^2 - n\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$$



에서 $0 = f(b_n) - f(a_n) = \int_{a_n}^{b_n} f'(x)dx$ 이므로 이차함수 넓이 관계에서 (어쨌든 1:2 비율 관계에 의해) $c_n - a_n : b_n - c_n = 1:2$ (c_n은 $f(x)$의 변곡점의 x좌표)

$f(x) = kx(x-2\alpha)$ 로 두고 $\int_0^{3\alpha} f(x)dx$ 해보시면 일반화 가능

미적분 내용이지만 $f(x)$가 선대칭이기 때문으로 설명 가능.

$$\Rightarrow b_n = 3c_n - 2a_n = 3\cdot\frac{n+3n^2}{3} - 2\,\frac{n+3n^2 - n\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$$

$$= \frac{n+3n^2+2n\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$$

$$a_nb_n = \frac{n+3n^2 - n\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}\cdot\frac{n+3n^2+2n\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{9n}\cdot\left(1+3n-\sqrt{9n^2-3n+1}\right)\left(1+3n+2\sqrt{9n^2-3n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{9n}\cdot\frac{(1+3n)^2-(9n^2-3n+1)}{1+3n+\sqrt{9n^2-3n+1}}\cdot\left(1+3n+2\sqrt{9n^2-3n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+3n+2\sqrt{9n^2-3n+1}}{1+3n+\sqrt{9n^2-3n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+3+2\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}+3+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

sol) $f(x)=0$ 의 실근의 합이나 $f(x)=f(a_n)$ 의 실근의 합이나 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ 에서 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 에 의해 $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$ 로 같음.

$\Rightarrow f(x) = x(x-n)(x-3n^2) \longrightarrow 0+n+3n^2 = n+3n^2$

$f(x)-f(a_n) = (x-a_n)^2(x-b_n) \longrightarrow a_n+a_n+b_n = 2a_n+b_n$

$\longrightarrow b_n = n+3n^2-2a_n$