P PL

M ATH

L AB

주 간 지

2주차

지수함수와 로그함수

PPL 수학연구소

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 '팀장 오성원 dhtjddnjs0327@naver.com '으로 부탁드립니다.

제작 | PPL 수학연구소

오성원	홍익대학교 수학교육과
김재식	한양대학교 미디어커뮤니케이션학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
김대현	건국대학교 수학과
강현식	홍익대학교 수학교육과
박상우	건국대학교 교육공학과
박다빈	중앙대학교 건설환경플랜트공학과
신동하	성균관대학교 수학교육과
이경민	서울대학교 수학교육과
안정인	경희대학교 응용물리학과

주간지 소개

PML 주간지는 수많은 기출문제들 중 PPL 수학연구소에서 엄선한 교육청, 사관학교, 평가원의 기출문제들과 수능특강, 수능완성의 변형 문제들로 구성된 주간지입니다.
많은 학생들에게 도움이 되길 바랍니다.

각 주차별로 정해진 단원마다 두 가지의 난이도로 구성되어 있습니다.
STEP 1 : 어려운 3점 - 쉬운 4점 난이도의 문항
STEP 2 : 일반 4점 - 준킬러 4점 난이도의 문항

STEP 1

1.

함수 $f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\geq 3) \end{cases}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값을 구하시오.

[2022학년도 고3 3월 19번]

2.

함수 $f(x)=\log_5 x$이고 $a>0$, $b>0$일 때, 〔보기〕에서 항상 옳은 것을 모두 고르시오.

< 보 기 >

ㄱ. $\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2$

ㄴ. $f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$

ㄷ. $f(a)<f(b)$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2008학년도 6월 나형 27번]

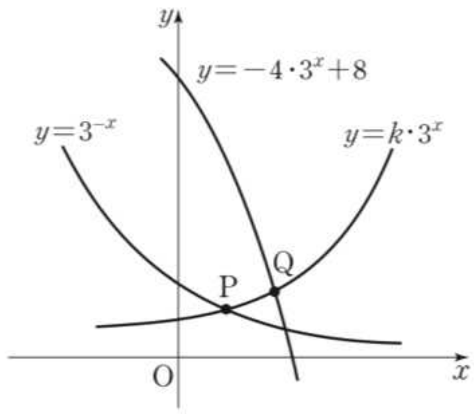
3.

$y=10^{x}$의 그래프를 x축 방향으로 k만큼, $y=\log_{10}x$의 그래프를 y축 방향으로 k만큼 평행이동 하였더니 두 함수의 그래프가 두 점에서 만났다. 이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값을 $a+b\log 3$꼴로 나타냈을 때 $a+b$의 값을 구하시오.

[2006학년도 고3 4월 가형 14번]

4.

$y=k\cdot 3^{k}$ $(0<k<1)$의 그래프가 두 함수
$y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^{x}+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점Q의 x좌표의 비가 $1:2$일 때, $35k$의 값을 구하시오.



[2007학년도 대수능 나형 25번]

5.

함수 $f(x)=\log_2 x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$를 이은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a^2b의 값을 구하시오.

[2009학년도 고3 7월 나형 26번]

6.

함수

$$f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$$

가 닫힌구간 $[0, 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

[2021학년도 6월 가형 9번]

7.

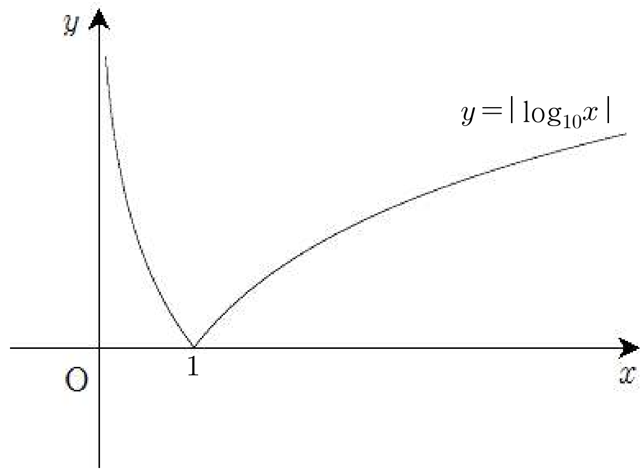
함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은? 〔4점〕

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[2016학년도 6월 A형 15번]

8.

아래 그림은 함수 $y=|\log_{10}x|$의 그래프이다. x에 대한 방정식 $|\log_{10}x|=ax+b$의 세 실근의 비가 $1:2:3$일 때, 세 실근의 합은? 〔4점〕



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

[2008학년도 대전 10월 가형 15번 나형 16번]

9.

두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔3점〕

< 보 기 >

ㄱ. $f^{-1}(5)\times\{g(5)+1\}=20$이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2009학년도 9월 공통 15번]

10.

두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$이 다음 조건을 만족시킨다. 〔3점〕

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

(나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$)

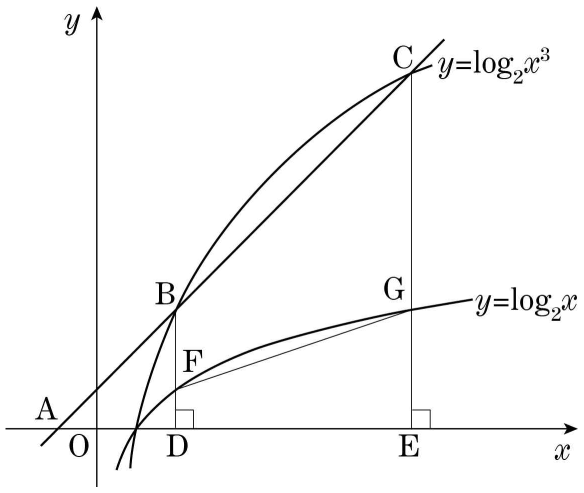
① 1　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{11}{8}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[2009학년도 대수능 7번]

STEP 2

11.

그림과 같이 x축 위의 한 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$과 서로 다른 두 점 B, C에서 만나고 있다. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 선분 BD, CE가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 F, G라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 사각형 BFGC의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 0보다 작다.) [4점]



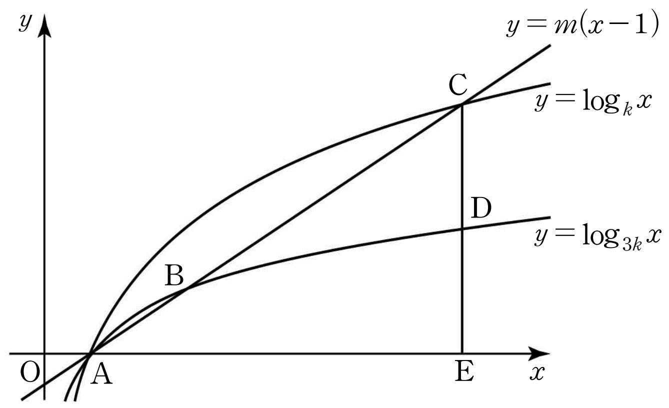
[2013학년도 고3 3월 나형 29번]

12.

$k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
>
> (나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. [4점]



[2021학년도 고3 7월 가형 27번]

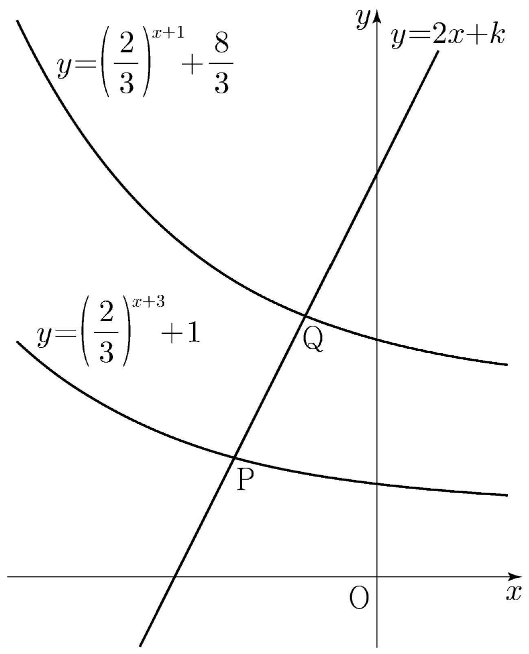
13.

직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

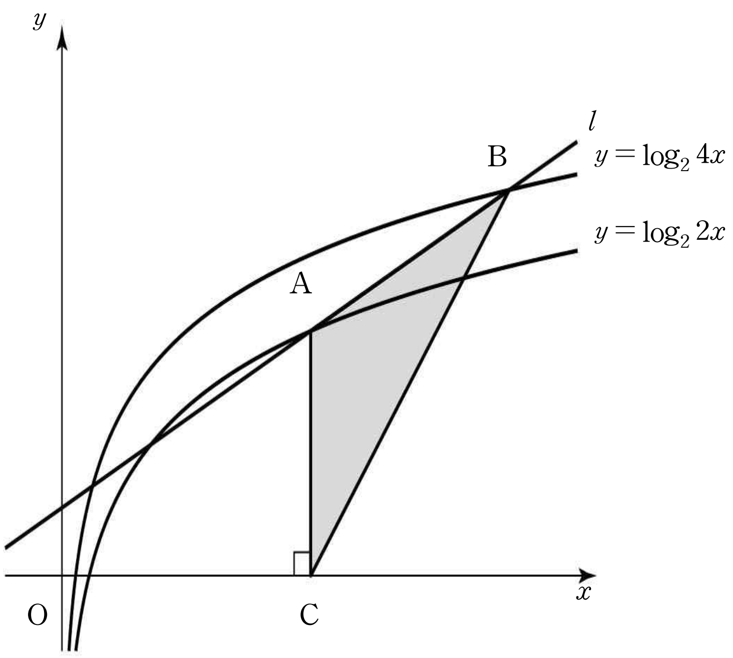


[2023학년도 대수능 9번]

14.

기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는? [4점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



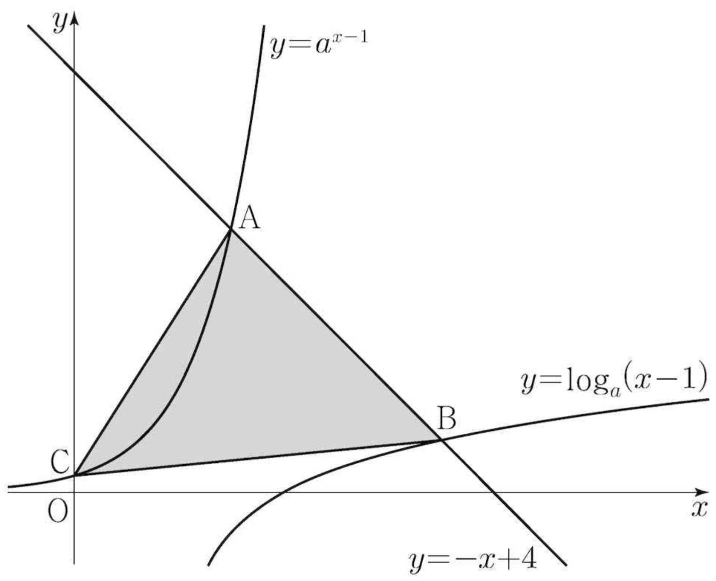
[2023학년도 고3 7월 11번]

15.

$a>1$인 실수 a에 대하여 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



[2022학년도 9월 21번]

16.

두 함수 $f(x)=x^2-6x+11$, $g(x)=\log_3 x$가 있다. 정수 k에 대하여 $k<(g\circ f)(n)<k+2$를 만족시키는 자연수 n의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(0)+h(3)$의 값은?

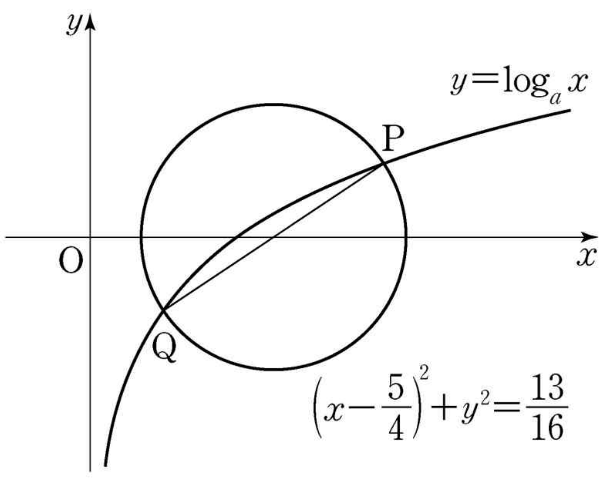
① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

[2021학년도 고3 4월 가형 16번]

17.

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와

원C : $(x-\frac{5}{4})^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q 라 하자. 선분PQ 가 원 C의 지름일 때, a의 값은?

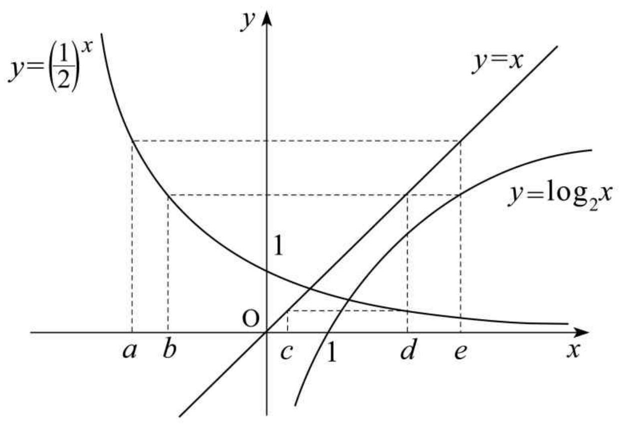


① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[2018학년도 9월 가형 16번]

18.

다음 그림은 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. 옳은 것을 〔보기〕에서 모두 고른 것은?
(단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



< 보 기>

ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^d=c$

ㄴ. $a+d=0$

ㄷ. $ce=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2008학년도 고3 10월 나형 6번]

19.

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$에 대하여 두 양수 a, b $(a<b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

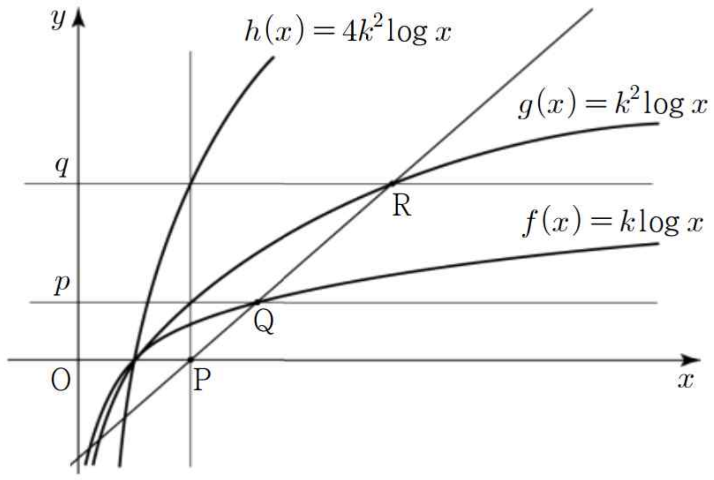
(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다.
(나) $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

[2021학년도 고3 4월 나형 20번]

20.

그림과 같이 세 로그함수 $f(x)=k\log x$, $g(x)=k^2\log x$, $h(x)=4k^2\log x$의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점의 y좌표를 각각 p, q라 하자. 직선 $y=p$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{Q}(a,\ p)$, 직선 $y=q$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{R}(b,\ q)$라 하자. 세 점 P, Q, R이 한 직선 위에 있을 때, 두 실수 a, b의 ab의 값을 구하시오. (단, $k>1$)



[2016학년도 고3 7월 A형 28번]

21.

$\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2021학년도 대수능 가형 13번]

22.

$0<a<1<b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(bx-1),\quad g(x)=\log_b(ax-1)$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점이 곡선 $y=g(x)$의 점근선 위에 있도록 하는 a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 옳게 나타낸 것은?

① $b=-2a+2$ $\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

② $b=2a$ $\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

③ $b=2a$ $\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

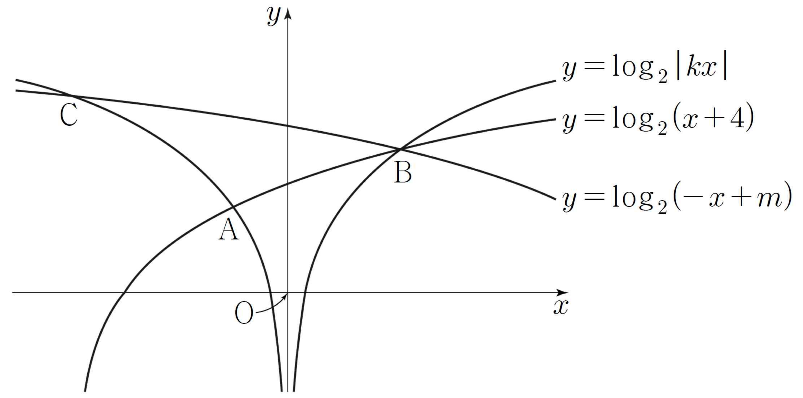
④ $b=2a+1$ $\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

⑤ $b=2a+1$ $\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

[2015학년도 6월 A형 20번 B형 19번]

23.

그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$이고, m은 실수이다.)



< 보 기 >

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. ${x_2}^2=x_1x_3$

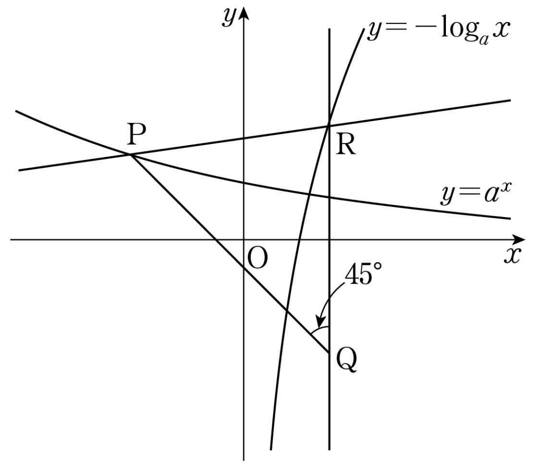
ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2021학년도 고3 4월 15번]

24.

그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x\,(0<a<1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 R에 대하여 $\angle PQR=45°$이다. $\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

[2020학년도 고3 10월 가형 15번]

25.

두 함수 $f(x)=4^{x-2}+2$, $g(x)=-4^{-x+2}+2$가 있다. 상수 k에 대하여 직선 $x=k$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 선분 PQ의 길이가 최소일 때 두 점 P, Q의 위치를 각각 A, B라 하자. 두 점 A와 B, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 C, 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB의 중점과 선분 CD의 중점은 일치한다.

(나) 직선 CD의 기울기는 직선 AC의 기울기의 $\frac{4}{3}$배 이다.

사각형 ADBC의 넓이는?
(단, 점 C의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

26.

곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x+a$와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<4$이고, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[2019학년도 고3 10월 가형 14번]

27.

함수 $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x+3}$ 에 대하여 점 $(p,\ q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이면 실수 p의 값에 관계없이 점 $(2a-p,\ a-q)$도 항상 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다. 다음은 상수 a의 값을 구하는 과정이다.

점 $(2a-p,\ a-q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3}=a-\boxed{(가)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다. ㉠은 실수 p의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$p=0 일 때,\ \frac{3^{2a}}{3^{2a}+3}=a-\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이고,

$$p=1 일 때,\ \frac{3^{2a}}{3^{2a}+\boxed{(나)}}=a-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이다. ㉡, ㉢에서

$$\left(3^{2a}+3\right)\left(3^{2a}+\boxed{(나)}\right)=24\times 3^{2a}$$

이므로

$$a=\frac{1}{2} 또는 a=\boxed{(다)}$$

이다. 이때, ㉢에서 좌변이 양수이므로 $a>\dfrac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a=\boxed{(다)}$ 이다.

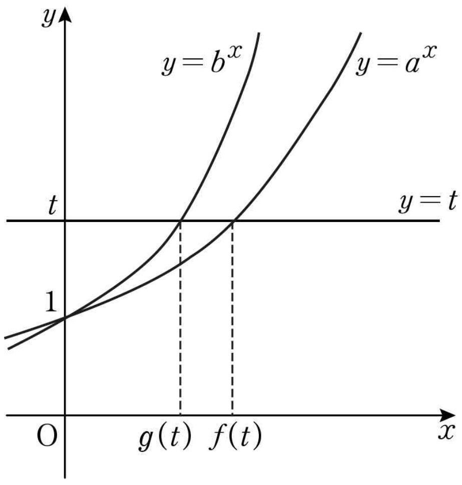
위의 (가)에 알맞은 식을 $g(p)$라 하고 (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 $m,\ n$이라 할 때, $(m-n)\times g(2)$의 값은?

① 4 ② $\dfrac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\dfrac{11}{2}$ ⑤ 6

[2019학년도 고3 10월 A형 16번]

28.

그림과 같이 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x\ (1<a<b)$가 직선 $y=t\ (t>1)$과 만나는 점의 x좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $2f(a)=3g(a)$가 성립한다. $f(c)=g(27)$을 만족시키는 실수 c의 값은?

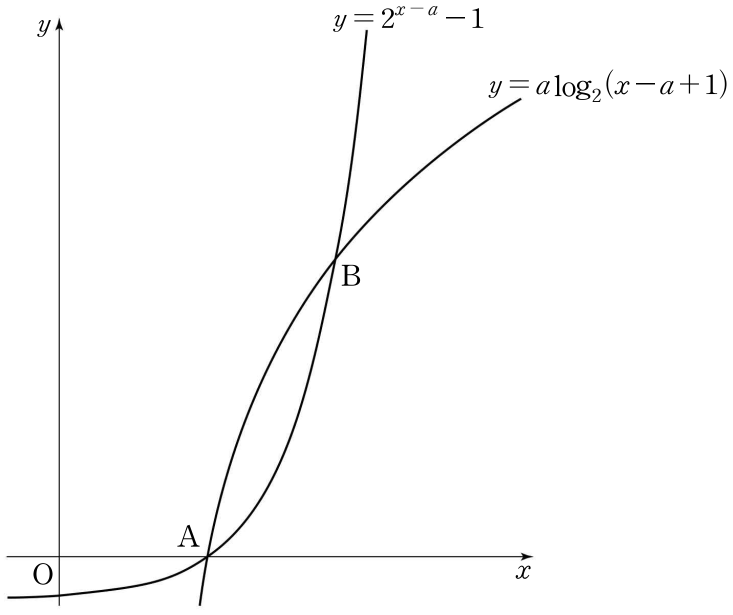


① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

[2015학년도 고3 3월 B형 16번]

29.

그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$과 $y=2^{x-a}-1$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A가 x축 위에 있고 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{7}{2}a$일 때, 선분 AB의 중점은 $\mathrm{M}(p, q)$이다. $p+q$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

[2019학년도 고3 4월 A형 14번]

30.

지수함수 $y=a^x(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 B(4, 0)에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a값의 곱은? (단, O는 원점이다.)

① $3^{\frac{1}{3}}$ ② $3^{\frac{2}{3}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

[2020학년도 대수능 가형 15번]

정답 및 해설

빠른 정답

문항	답	문항	답	문항	답
1번	-5	11번	24	21번	③
2번	⑤	12번	12	22번	⑤
3번	11	13번	④	23번	③
4번	20	14번	⑤	24번	⑤
5번	1	15번	192	25번	②
6번	④	16번	③	26번	④
7번	④	17번	③	27번	⑤
8번	②	18번	⑤	28번	②
9번	③	19번	①	29번	⑤
10번	①	20번	88	30번	②

1. -5

$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\ge 3)\end{cases}$ 에서,

(ⅰ) $x<3$일 때, $0<f(x)<8$
정수인 $f(x)$값은 7개다.

(ⅱ) $x\ge 3$일 때, 정수인 $f(x)$값이 $23-7=16$개이므로,
$-8<f(x)\le 8$이어야 한다.

즉, 점근선의 방정식 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이

$-8\le y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$이어야 한다.

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le 16 \Leftrightarrow -2\le a+3<-\log_4 15<-1$

$\therefore a=-5$ (a는 정수)

2. ⑤

ㄱ.

$\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{a}{5}\right)^2=(\log_5 a-1)^2$

$=(1-\log_5 a)^2=\left(\log_5\frac{5}{a}\right)^2=\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}$ (참)

ㄴ.

$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-1}>\frac{f(a+2)-f(a+1)}{(a+2)-(a+1)}$이고,

$f(x)=\log_5 x$에서, x값이 커질수록 함숫값의 증가 폭이 줄어들고 있으므로, 성립한다. (참)

ㄷ.

$f(a)<f(b)$이면, $a<b$이고, $f^{-1}(x)=5^x$이므로,

$f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$도 성립한다. (참)

3. 11

$y=10^x$의 그래프를 x축 방향으로 k만큼 평행이동한 함수와, $y=\log_{10}x$의 그래프를 y축 방향으로 k만큼 평행이동한 함수는 서로 역함수 관계이므로, 교점은 $y=10^{x-k}$와 $y=x$의 교점과 같다.

두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이고, $\Delta x:\Delta y=1:1$이므로,

한 교점의 좌표를 $\mathrm{P}(p, p)$라 한다면, 다른 한 교점을 $\mathrm{Q}(p+1, p+1)$라고 표현할 수 있다.

$p=10^{p-k}$, $p+1=10^{p+1-k}=10p$이므로,

$p=\frac{1}{9}$이고, $k-\frac{1}{9}=\log 9$, $k=\frac{1}{9}+2\log 3$이다.

4. 20

두 점 P, Q의 x좌표의 비가 $1:2$이므로, a, $2a$라 한다면,

점 P에서, $3^{-a}=k\times 3^a$

점 Q에서, $4\times 3^{2a}+8=k\times 3^{2a}$

$3^{-a}=k\times 3^a \Leftrightarrow 3^{2a}=\frac{1}{k}$

$4\times\frac{1}{k}+8=k\times\frac{1}{k}=1$, $k=\frac{7}{4}$

$35k=35\times\frac{4}{7}=20$

5. 1

함수 $f(x)=\log_2 x$의 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$를 이은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a^2b의 값을 구하시오.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로, 내분점의 y좌표는 $\frac{2f(a)+f(b)}{3}=\frac{2\log_2 a+\log_2 b}{3}=\frac{\log_2 a^2b}{3}=0$이다.

$\therefore a^2b=1$

6. ④

함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$의 밑은 1보다 작다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 -4, $x=12$에서 최솟값 m을 갖는다.

$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}k=-2\log_2 k=-4$

$\log_2 k=2$

따라서 $k=2^2=4$

그리고

$m=f(12)=2\log_{\frac{1}{2}}(12+4)=2\log_{\frac{1}{2}}16=-2\log_2 2^4=(-2)\times 4=-8$

그러므로

$k+m=4+(-8)=-4$

7. ④

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_3(x-a)+2 \cdots$㉠

그러므로

$f(x)=\log_3(x-a)+2$

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$는 ㉠에서 x대신 y를, y대신 x를 대입하면 되므로

$x=\log_3(y-a)+2$

$x-2=\log_3(y-a)$

$3^{x-2}=y-a$

$\therefore y=3^{x-2}+a$

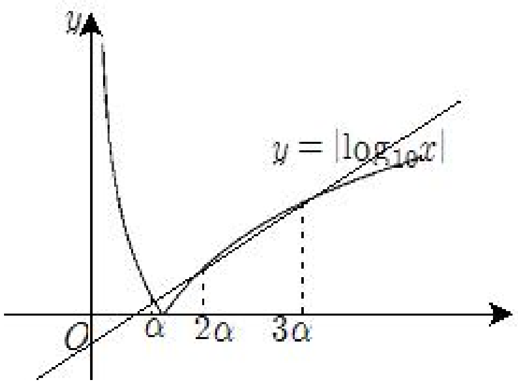
$\therefore f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$

이 때, $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$이므로

$a=4$

8. ②

함수 $y=|\log_{10}x|$와 $y=ax+b$의 그래프를 방정식 $|\log_{10}x|=ax+b$의 세 실근의 비가 $1:2:3$가 되도록 그려보면 아래와 같다.



세 실근의 비가 $1:2:3$이므로

세 실근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ $(\alpha>0)$라 하자.

α는 $y=-\log_{10}x$와 $y=ax+b$의 교점의 x좌표이고,

2α와 3α는 $y=\log_{10}x$와 $y=ax+b$의 교점의 x좌표들이다.

따라서 $-\log_{10}\alpha=a\alpha+b\cdots$①,

$\log_{10}2\alpha=2a\alpha+b\cdots$②,

$\log_{10}3\alpha=3a\alpha+b\cdots$③을 얻을 수 있다.

②-① : $\log_{10}2\alpha^2=a\alpha\cdots$④

③-① : $\log_{10}3\alpha^2=2a\alpha\cdots$⑤

④와 ⑤에서 $2\log_{10}2\alpha^2=\log_{10}3\alpha^2$을 얻을 수 있다.

따라서 $4\alpha^4=3\alpha^2$이 된다.

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$이 된다.

$\therefore$세 실근은 $\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로, 그 합은 $3\sqrt{3}$ 이다.

9. ③

$f(x)$의 역함수를 구하면, $x=2^{y-2}+1$에서

$2^{y-2}=x-1$

$y-2=\log_2(x-1)$

$\therefore y=\log_2(x-1)+2$

따라서, $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)+2$이고

$g(x)=f^{-1}(x)$

ㄱ. $f^{-1}(5)=\log_2(5-1)+2=4$이므로

$f^{-1}(5)\{g(5)+1\}=f^{-1}(5)\{f^{-1}(5)+1\}=4(4+1)=20$ 〈참〉

ㄴ. $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 〈참〉

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 그러므로 $y=2^x$의 그래프 위의 점 $(0, 1)$은 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 2)$로 평행이동한다. 이 때, 점 $(2, 2)$는 직선 $y=x$위의 점이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$의 그래프는 만난다. 그러므로 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 만난다. 〈거짓〉

10. ①

$f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로, $f(2)=g(2)$가 성립한다.

따라서, $a^{2b-1}=a^{1-2b}$에서 $2b-1=1-2b$, $4b=2$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

$f(4)=g(0)$, $g(4)=f(0)$이므로

$f(4)+g(4)=g(0)+f(0)=\frac{5}{2}$

$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

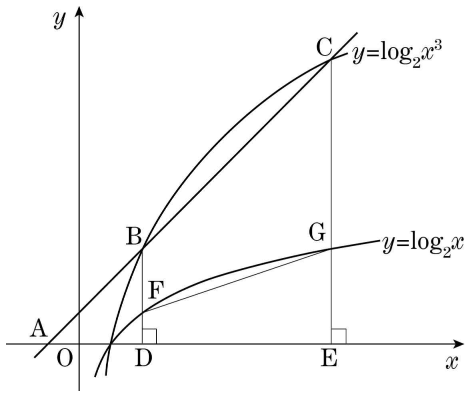
$2a^2-5a+2=0$

$(a-2)(2a-1)=0$

$0<a<1$이므로, $a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

11. 24



$\log_2 x^3-\log_2 x=3\log_2 x-\log_2 x$

$=2\log_2 x$

이므로 두 점 F, G는 두 선분 BD, CE를 각각 2 : 1로 내분하는 점이다.

$\therefore\ \square\mathrm{BFGC}=\dfrac{2}{3}\times\square\mathrm{BDEC}$

$=\dfrac{2}{3}(8\times\triangle\mathrm{ADB})=\dfrac{16}{3}\times\dfrac{9}{2}=24$

12. 12

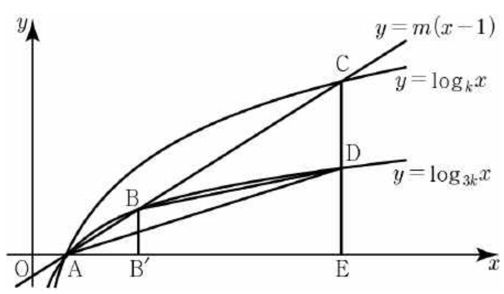
조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AB}}$이고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB'}}=\mathrm{a}$라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\mathrm{a}$이므로

$\mathrm{B}(\mathrm{a}+1,\ \log_{3\mathrm{k}}(\mathrm{a}+1))$, $\mathrm{C}(4\mathrm{a}+1,\ \log_{\mathrm{k}}(4\mathrm{a}+1))$,

$\mathrm{D}(4\mathrm{a}+1,\ \log_{3\mathrm{k}}(4\mathrm{a}+1))$ 이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1)$

$\dfrac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\dfrac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$

$\log_k 3k=2$에서 $k^2=3k$이므로 $k=3$

세 점 A, B, C가 직선 $y=m(x-1)$ 위에 있으므로

$m=\dfrac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\dfrac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}$에서

$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1)$

$(a+1)^2=4a+1$

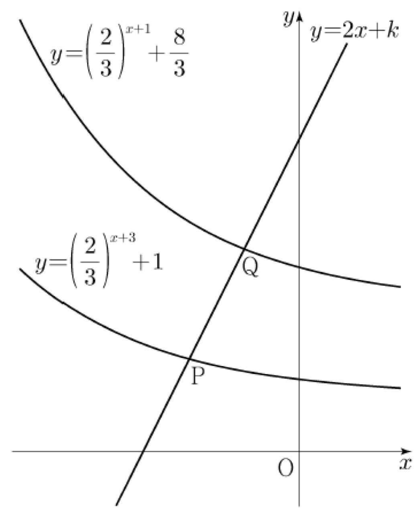
$a^2-2a=0$

$a>0$이므로 $a=2$

$m=\dfrac{\log_9 3}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\dfrac{k}{m}=12$

13. ④



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, $q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$, $\mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$ 로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2a-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로

$q-p=1$

즉, $q=p+1$

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+\dfrac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\dfrac{17}{3}$

14. ⑤

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,\log_2 2a)$, $\mathrm{B}(b,\log_2 4b)\ (a<b)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{\log_2 4b-\log_2 2a}{b-a}=\dfrac{1}{2}$에서

$\log_2 4b - \log_2 2a = \dfrac{1}{2}(b-a)$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2} = \sqrt{(b-a)^2 + \dfrac{1}{4}(b-a)^2}$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times (b-a) = 2\sqrt{5}$

$b - a = 4$ ……㉠

$\log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 \dfrac{2b}{a} = 2$, $b = 2a$ ……㉡

두 식 ㉠,㉡을 연립하면 $a=4$, $b=8$

$\mathrm{A}(4, 3)$, $\mathrm{B}(8, 5)$, $\mathrm{C}(4, 0)$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

15. 192

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다. 즉 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이다. 점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$라 하면 $\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(-k+\dfrac{5}{2}\right)^2 = 2$에서

$k = \dfrac{3}{2}$

즉 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$이므로

$\dfrac{5}{2} = a^{\frac{3}{2}-1}$

$a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{2}$

$a = \dfrac{25}{4}$

이때, 점 C의 좌표는 $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$이므로 $\mathrm{C}\left(0, \dfrac{4}{25}\right)$이다. 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$사이의 거리와 같다.

$\overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{\left|\,0+\dfrac{4}{25}-4\,\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{48}{25}\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$S = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{48}{25}\sqrt{2} = \dfrac{96}{25}$

이므로 $50 \times S = 50 \times \dfrac{96}{25} = 192$

16. ③

정수 k에 대하여 $k < \log_3 f(n) < k+2$ 및 3이 1보다 크므로 $3^k < (n-3)^2 + 2 < 3^{k+2}$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.

(ⅰ) $k=0$인 경우

$1 < (n-3)^2 + 2 < 9$, $-1 < (n-3)^2 < 7$에서 $n=1, 2, 3, 4, 5$이므로 $h(0)=5$

(ⅱ) $k=3$인 경우

$27 < (n-3)^2 + 243 < 9$, $25 < (n-3)^2 < 241$에서 $n=9, 10, \cdots, 18$이므로 $h(3)=10$

따라서 $h(0)+h(3)=15$

17. ③

$\mathrm{P}(p, \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q, \log_a q)$ $(p>q)$로 놓으면 선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\dfrac{5}{4}, 0\right)$이므로 $\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{5}{4}$, $\dfrac{\log_a p + \log_a q}{2} = 0$에서

$p+q = \dfrac{5}{2}$, $pq=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$t^2 - \dfrac{5}{2}t + 1 = 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$(2t-1)(t-2) = 0$

$t = \dfrac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉 $p=2$, $q=\dfrac{1}{2}$

이때, $\mathrm{P}(2, \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2}, -\log_a 2\right)$이고, 선분 PQ의 길이가 원의 지름 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$이므로 $\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \{\log_a 2 - (-\log_a 2)\}^2 = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

정리하면 $(\log_a 4)^2 = 1$

$a>1$이므로 $\log_a 4 = 1$에서 $a=4$

18. ⑤

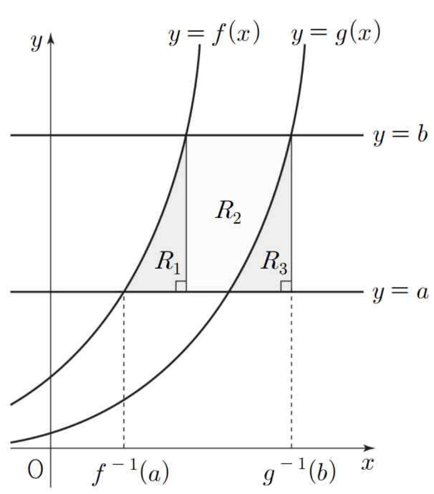
ㄱ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^d = c$ (참)

ㄴ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a = e$ 에서 $a = -\log_2 e$, $d = \log_2 e$ $\therefore a+d=0$ (참)

ㄷ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^d = c$, $\log_2 e = d$ 에서 $2^d = e$ $\therefore ce = 1$ (참)

19. ①

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는 다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $S_1=S_3$ 조건 (가)에서

$S_1 + S_2 = S_3 + S_2 = 2 \times (b-a) = 6$

$b - a = 3$ …… Ⓐ

조건 (나)에서

$f^{-1}(a) = p$, $g^{-1}(b) = q$ (p, q는 실수) 라 하면

$2^p = a$, $2^{q-2} = b$

$p = \log_2 a$, $q = \log_2 b + 2 = \log_2 4b$

$q - p = \log_2 4b - \log_2 a = \log_2 \dfrac{4b}{a} = \log_2 6$

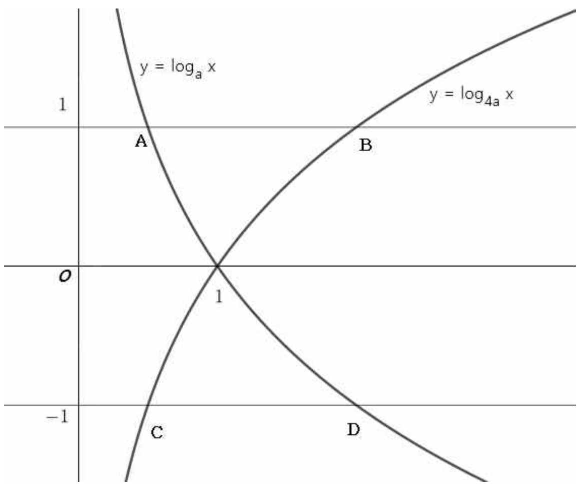
$3a = 2b$ …… Ⓑ

Ⓐ, Ⓑ를 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$
$a+b=15$

20. 88
직선 $x=2$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 y좌표가 p이므로 $p=k^2\log 2$ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q의 y좌표가 p이므로 $k^2\log 2=k\log a$를 정리하면 $a=2^k$ 직선 $x=2$와 곡선 $y=h(x)$의 만나는 점의 y좌표가 q이므로 $q=4k^2\log 2$ 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 R의 y좌표가 q이므로 $4k^2\log 2=k^2\log b$를 정리하면 $b=2^4$ 세 점 $\mathrm{P}(2,0)$, $\mathrm{Q}(2^k,\ k^2\log 2)$, $\mathrm{R}(2^4,\ 4k^2\log 2)$가 한 직선 위에 있으므로 $\dfrac{k^2\log 2}{2^k-2}=\dfrac{4k^2\log 2}{14}$를 정리하면 $2^k=\dfrac{11}{2}$

$a=\dfrac{11}{2}$, $b=16$ 따라서 $ab=88$

21. ③



ㄱ. $\mathrm{A}(a,\ 1)$, $\mathrm{B}(4a,\ 1)$이므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,1)$이다. 〈참〉
ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 C, 점 B와 D는 x축에 대하여 대칭이고 x좌표가 각각 같다. 즉

$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{4a},\ -1\right)=(a,\ -1)$

이다. $4a^2=1$이고 $\dfrac{1}{4}<a<1$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$ 〈참〉

ㄷ. $\mathrm{A}(a,\ 1)$, $\mathrm{B}(4a,\ 1)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{4a},\ -1\right)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{a},\ -1\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=3a$, $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{3}{4a}$

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $3a<\dfrac{3}{4a}$에서 $4a^2<1$이고, $\dfrac{1}{4}<a<1$이므로

$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$ 〈거짓〉

22. ⑤
곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $x=\dfrac{1}{a}$이고 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점은 $\left(\dfrac{2}{b},\ 0\right)$이므로 만족하는 관계식은 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}$ $\therefore\ b=2a$

이때, $0<a<1<b$이고 $b>1$이므로 $2a>1$ $\therefore\ \dfrac{1}{2}<a<1$

따라서 구하는 정답은 $b=2a$ $\left(\dfrac{1}{2}<a<1\right)$

23. ③

ㄱ. $\log_2|kx_1|=\log_2(x_1+4)$에서 $x_1<0$이므로

$-kx_1=x_1+4$, $x_1=\dfrac{-4}{k+1}$

$\log_2|kx_2|=\log_2(x_2+4)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=x_2+4$, $x_2=\dfrac{4}{k-1}$

$x_2=-2x_1$에서

$\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{8}{k+1}$, $k+1=2k-2$, $k=3$ (참)

ㄴ. $\log_2|kx_2|=\log_2(-x_2+m)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=-x_2+m$,

$m=(k+1)x_2=\dfrac{4(k+1)}{k-1}$

$\log_2|kx_3|=\log_2(-x_3+m)$에서 $x_3<0$이므로

$-kx_3=-x_3+m$,

$x_3=\dfrac{-m}{k-1}=\dfrac{-4(k+1)}{(k-1)^2}$

그러므로

$x_1x_3=\dfrac{-4}{k+1}\times\dfrac{-4(k+1)}{(k-1)^2}=\left(\dfrac{4}{k-1}\right)^2={x_2}^2$ (참)

ㄷ. ${x_2}^2=x_1x_3$에서 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_3}{x_2}$

$\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{-k-1}{k-1}=-1-\dfrac{2}{k-1}<-1$

$\dfrac{x_2}{x_1}=r(r<-1)$이라 하면 $x_2=x_1r$, $x_3=x_1r^2$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면
두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

$=\dfrac{\log_2|kx_2|-\log_2|kx_1|}{x_1(r-1)}+\dfrac{\log_2|kx_3|-\log_2|kx_1|}{x_1(r^2-1)}$

$=\dfrac{\log_2\left|\dfrac{x_2}{x_1}\right|}{x_1(r-1)}+\dfrac{\log_2\left|\dfrac{x_3}{x_1}\right|}{x_1(r^2-1)}$

$=\dfrac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)}+\dfrac{2\log_2(-r)}{x_1(r^2-1)}=0$

에서 $1+\dfrac{2}{r+1}=0$, $r=-3$

$x_2=x_1r$에서

$\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{12}{k+1}$, $k+1=3k-3$, $k=2$이고,

$m=\dfrac{4(k+1)}{k-1}=12$이므로 $m+k^2=16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

24. ⑤
점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ a^t)\ (t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 $(a^t,\ t)$이다.
$\angle\mathrm{PQR}=45^\circ$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.
즉 점 R의 좌표는 $(a^t,\ -t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\dfrac{1}{7}$이므로 $\dfrac{a^t+t}{t-a^t}=\dfrac{1}{7}$에서

$a^t = -\frac{3}{4}t$ ⋯ ㉠

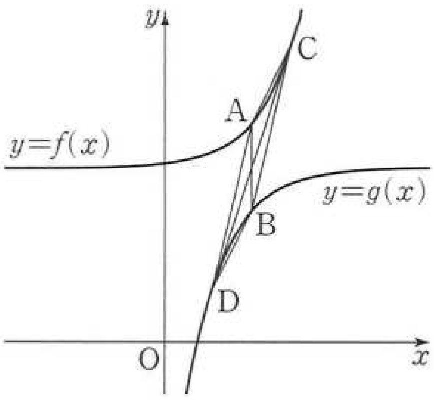
$\overline{\mathrm{PR}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2 + (a^t + t)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$a^{2t} + t^2 = \frac{25}{4}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $t^2 = 4$이고 $t < 0$이므로 $t = -2$

㉠에 대입하면 $\frac{1}{a^2} = \frac{3}{2}$이고 $a > 0$이므로 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$

25. ②
$\mathrm{P}(k,\ 4^{k-2}+2)$, $\mathrm{Q}(k,\ -4^{-k+2}+2)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}} = 4^{k-2} + 4^{-k+2} \geq 2\sqrt{4^{k-2} \times 4^{-k+2}} = 2$
(단, 등호는 $4^{k-2} = 4^{-k+2}$, 즉 $k=2$일 때 성립한다.)



이때 A(2, 3), B(2, 1)이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 M(2, 2)이다.
두 상수 c, d에 대하여
$\mathrm{C}(c,\ 4^{c-2}+2)$ $(c>2)$, $\mathrm{D}(d,\ -4^{-d+2}+2)$이라 하면
조건 (가)에서
$\frac{c+d}{2} = 2$, 즉 $c+d=4$ ⋯⋯ ㉠
직선 CD의 기울기와 직선 CM의 기울기가 같으므로
조건 (나)에서
$\frac{(4^{c-2}+2)-2}{c-2} = \frac{4}{3} \times \frac{(4^{c-2}+2)-3}{c-2}$

$4^{c-2} = \frac{4}{3}(4^{c-2}-1)$

$\frac{4^{c-2}}{4} = 1$

$c-2=1$, $c=3$
$c=3$을 ㉠에 대입하면
$3+d=4$에서 $d=1$
이므로 C(3, 6), D(1, −2)이다.
따라서
(사각형 ADBC의 넓이)
=(삼각형 ADB의 넓이)+(삼각형 ACB의 넓이)
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1$
$= 2$

26. ④
두 곡선 $y = \log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 $y = (\sqrt{2})^x + a$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AB는 직선 $y=x$에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(2t, t)$ $(t>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(t, 2t)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}t$이다.
선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}t, \frac{3}{2}t\right)$

삼각형 OAB는 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로
삼각형 OAB의 넓이는
$6 = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}t \times \frac{3\sqrt{2}}{2}t = \frac{3}{2}t^2$
이므로 $t=2$
즉 A(4, 2)가 곡선 $y = \log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로
$2 = \log_{\sqrt{2}}(4-a)$, $(\sqrt{2})^2 = 4-a$
따라서 구하는 상수 a의 값은 2이다.

27. ⑤
점 $(2a-p, a-q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(p) = q$, $f(2a-p) = a-q$에서
$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3} = a-q = a - \boxed{\frac{3^p}{3^p+3}}$ ⋯⋯ ㉠
이다. ㉠은 실수 p의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$p=0$일 때, $\frac{3^{2a}}{3^{2a}+3} = a - \frac{1}{4}$ ⋯⋯ ㉡
이고,
$p=1$일 때, $\frac{3^{2a}}{3^{2a}+\boxed{9}} = a - \frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉢
이다. ㉡, ㉢에서 ㉡−㉢을 정리하면
$\frac{6 \times 3^{2a}}{(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)} = \frac{1}{4}$에서
$(3^{2a}+3)(3^{2a}+9) = 24 \times 3^{2a}$
이므로 $3^{2a} = X$ $(X>0)$이라 하면
$(X+3)(X+9) = 24X$
$X^2 - 12X + 27 = 0$
$X=3$ 또는 $X=9$
$3^{2a} = 3$ 또는 $3^{2a} = 9$
$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = \boxed{1}$
이다. 이때, ㉢에서 좌변이 양수이므로 $a > \frac{1}{2}$이다.
따라서 $a=1$이다.
그러므로 $g(p) = \frac{3^p}{3^p+3}$, $m=9$, $n=1$
따라서 $(m-n) \times g(2) = (9-1) \times \frac{3^2}{3^2+3} = 6$

28. ②
$a^{f(t)} = t$이므로 $f(t) = \log_a t$
$b^{g(t)} = t$이므로 $g(t) = \log_b t$
$2f(a) = 3g(a)$이므로 $2\log_a a = 3\log_b a$에서
$\log_b a = \frac{2}{3}$ 즉, $\log_a b = \frac{3}{2}$
$f(c) = g(27) = \log_b 27 = \frac{\log_a 27}{\log_a b} = \frac{2}{3}\log_a 27 = \log_a 27^{\frac{2}{3}} = \log_a 9$
따라서 $c=9$

29. ⑤
곡선 $y = a\log_2(x-a+1)$이 x축과 만나므로
$a\log_2(x-a+1) = 0$에서 $x=a$
곡선 $y = 2^{x-a}-1$이 x축과 만나므로
$2^{x-a}-1=0$에서 $x=a$
∴ $\mathrm{A}(a, 0)$
점 B의 y좌표를 k $(k>0)$라 하면 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times k=\frac{1}{2}\times a\times k=\frac{7}{2}a$이므로 $k=7$

$2^{x-a}-1=7$이므로 $x=a+3$

$\therefore$ $\mathrm{B}(a+3,\ 7)$

점 B는 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$ 위의 점이므로

$a\log_2(a+3-a+1)=7$에서 $a=\frac{7}{2}$

$\therefore$ $\mathrm{A}\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{13}{2},\ 7\right)$

선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(5,\ \frac{7}{2}\right)$이므로

$p=5$, $q=\frac{7}{2}$

따라서 $p+q=\frac{17}{2}$

30. ②

$a^x=\sqrt{3}$에서

$x=\log_a\sqrt{3}$이므로

점 A의 좌표는 $(\log_a\sqrt{3}, \sqrt{3})$이다.

직선 OA의 기울기는

$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}$

직선 AB의 기울기는

$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}$

직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이므로

$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}=-1$

이어야 한다. 즉,

$(\log_a\sqrt{3})^2-4\log_a\sqrt{3}+3=0$에서

$(\log_a\sqrt{3}-1)(\log_a\sqrt{3}-3)=0$

$\log_a\sqrt{3}=1$ 또는 $\log_a\sqrt{3}=3$

$a=\sqrt{3}$ 또는 $a^3=\sqrt{3}$

따라서 $a=3^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=3^{\frac{1}{6}}$이므로

모든 a의 값의 곱은

$3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$