

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{3\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

- ① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

2. 함수 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 + a_4 + a_6 = 30, \quad a_8 + 2a_{11} = 75$$

일 때, $a_7 + a_9$ 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x \leq 1) \\ x^3+k & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서 그은 접선은 $y=3x-1$ 이다.

곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점 $(2, 4f(2))$ 에서 그은 접선 $y=g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은? [3점]

- ① -12 ② -8 ③ -4 ④ 4 ⑤ 8

7. 첫째항이 $\frac{1}{3}$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^5 \left(k^2 + \frac{1}{a_k}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① 140 ② 142 ③ 144 ④ 146 ⑤ 148

6. 상수 θ ($0 < \theta < \pi$)에 대하여 $32\sin^2\theta = 9\tan\theta$ 일 때,

$$(\sin\theta + \cos\theta + 2)(\sin\theta + \cos\theta - 1)$$

의 값은? [3점]

- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{11}{16}$ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

8. $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_p(t) = 6t^2 + 2t + 4, v_q(t) = 3t^2 + 14t + k$$

이다. $t > 0$ 에서 두 점 P, Q가 한 번만 만나도록 하는 실수 k 의 최솟값은? [3점]

- ① -5 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

9. 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1 & (a_n \leq 12) \\ \sqrt{a_n} & (a_n > 12) \end{cases}, a_n < 1000$$

를 만족시키고 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_4 = 5$ 일 때, a_1 의 최솟값 m , 최댓값 M 에 대하여 $4m + M$ 의 값은?

[4점]

- ① 14 ② 71 ③ 143 ④ 166 ⑤ 257

10. 양의 상수 a, b 와 열린구간 $(0, \frac{3}{b}\pi)$ 에서 정의되는 두 함수

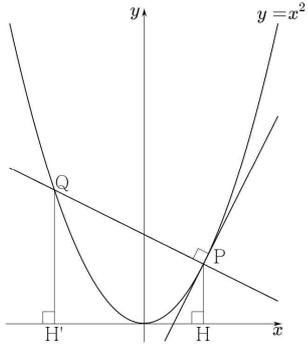
$$f(x) = a \sin bx + a, g(x) = a \cos bx$$

에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 두 교점을 지나는 직선 $y=mx+n$ 가 $y=f(x)$ 또는 $y=g(x)$ 와 만나는 네 점을 x 좌표가 작은 순서대로 A, B, C, D라 하자. 점 $E(0, a)$ 에 대하여 $\angle DAE=90^\circ$ 이고 삼각형 BDE의 넓이가 2일 때, $a^2+m^2+n^2$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

11. 그림과 같이 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $P(t, t^2)$ 에서 그은 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 곡선 $y = x^2$ 와 만나는 또다른 점을 Q라 하자. 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H'라 할 때, $\overline{PH} \times \overline{QH'}$ 를 $f(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ 의 값은?

[4점]



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

12. 각각 곡선 $y = 3^x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 위에 있고 x좌표가 양수인 두 점 A, B가 있다. 점 C가 다음 조건을 만족시킨다.

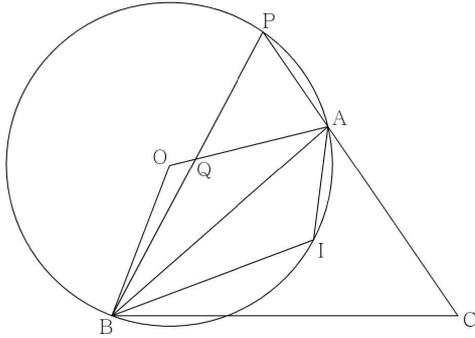
- (가) 사각형 AOBC는 정사각형이다.
 (나) 점 C에서 직선 $y = x$ 에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{AH} + \overline{BH} = 6\sqrt{3}$ 이다.

사각형 AOBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{113}{4}$ ② $\frac{115}{4}$ ③ $\frac{117}{4}$ ④ $\frac{119}{4}$ ⑤ $\frac{121}{4}$

13. 그림과 같이 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$, $\cos(\angle ACB)=\frac{9}{16}$ 인 삼각형

ABC의 내심을 I라 하자. 삼각형 ABI의 외접원과 직선 AC가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 이 외접원의 중심을 O라 하자. 선분 BP와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하자.



$\overline{AC}=2k$ 라 할 때, 다음은 선분 OQ의 길이를 구하는 과정이다.

$\angle ACB=2\theta$ 라 하면 내심의 성질에 의하여
 $\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \theta$ 이므로 $\angle BPC = \angle CBP = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이고,
 삼각형 BCP는 $\overline{BC} = \overline{CP}$ 인 이등변삼각형이다.
 $\angle AOB = \pi - 2\theta$ 이므로 코사인법칙에 의하여
 $\overline{OA} = \boxed{(가)}$ 이다.
 현 BP의 수직이등분선은 점 O를 지나고 각 ACB를 이등분하므로 세 점 O, C, I는 한 직선 l 위에 있다.
 두 점 Q, A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H'라 하자.
 $\overline{BP} = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$ 이므로 $\cos\theta = \boxed{(나)}$ 이다.
 두 삼각형 PHC, AH'C의 닮음과
 두 삼각형 OHQ, OH'A의 닮음에 의하여
 $\overline{AH'} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{OH'} = \frac{3}{2\sqrt{2}}k$, $\overline{HH'} = \frac{5}{4\sqrt{2}}k$ 이다.
 $\overline{OH} = \overline{OH'} - \overline{HH'} = \frac{1}{4\sqrt{2}}k$ 이고
 $\overline{QH} = \boxed{(다)}$ 이므로
 삼각형 OHQ에서 OQ의 길이는 $\sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{QH}^2}$ 로 구할 수 있다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) + \left\{g\left(\frac{15}{p}\right)\right\}^2$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{29}{4}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ 8 ⑤ $\frac{33}{4}$

14. 최고차항의 계수가 2인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 x 에 대한 방정식 $\{f(x)\}^2 = t^2$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

- (가) $f'(0) = f'(5) = 0$, $f(0) = 125$
 (나) 함수 $g(t)$ 는 $t = f(0)$, $t = f(5)$ 에서 각각 연속이다.

- ① 129 ② 131 ③ 133 ④ 135 ⑤ 137

15. 모든 항이 서로 다른 정수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \sum_{i=1}^n a_{2i} = n(16-n)$$

$$(나) a_n + a_{n+2} = k - 2a_{n+1}$$

$\sum_{i=1}^{2n} (a_i - i) \geq 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 8일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

- ① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38

단답형

16. $\log_3\left(\tan \frac{\pi}{3}\right) - \log_3\left(\tan \frac{\pi}{6}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 12x + 9$ 이고 $f(1) = 5$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $|f(x)+f(-x)|$ 가 $x=-3, x=1$ 에서 각각 미분가능하지 않다. $f'(-1)-f'(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 세 상수 a, b, k 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} a-x & (x \leq k) \\ x^2+ax+b & (x > k) \end{cases}$$

와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)-f(0) = \int_k^x g(t)dt$$

을 만족시킨다. $\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $k \neq 0$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

20. 함수 $f(x) = ax^2 - 5ax + 2a - 6$ ($-4 < a < 0$)와 양수 p 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} p(x-1)^2 - 2 & (|f(x)| < 2) \\ 2 \times \frac{f(x)}{|f(x)|} & (|f(x)| \geq 2) \end{cases}$$

의 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 서로 다른 실수 p 의 값이 p_1, p_2 뿐일 때, $a+(p_1+p_2)^2$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

21. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_n - 2^n) \left(\log_2 a_n - \frac{n}{b_n} \right) = 0$$

이고 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$\sqrt{a_n}$ 은 자연수가 아니고, $\log_2 b_n$ 은 자연수이다.

$a_m + a_{m+16} = 40$ 을 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 이차함수 $f(x)$ 와 상수 $k(k > 0)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x |f'(t)| dt & (x < k) \\ \int_0^x f(t) dt & (x \geq k) \end{cases}$$

가 양의 상수 α 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 극대이다.
 (나) $0 \leq x \leq \alpha$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $(2x - \alpha)\{\alpha g(x) - xg(\alpha)\} \leq 0$ 이다.

$f(0) = 0$ 일 때, $\left| 12\alpha \times \frac{g(5)}{f(1)} \right|$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n + \log_2 3} - 3^n}{2^{2n - \log_2 3} + 4^n}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{9}{5}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 9

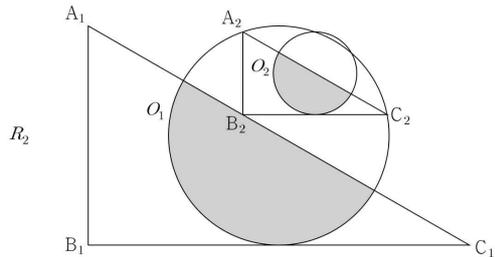
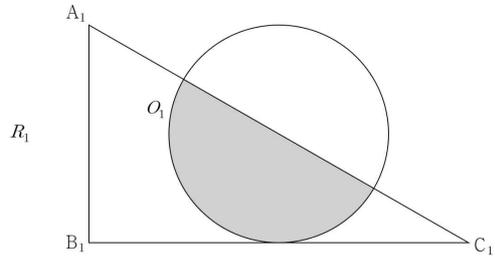
24. 두 직선 $x=3y$, $y=3x$ 가 이루는 예각 θ 에 대하여 $\sin\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

25. 곡선 $x^2 + 2xy - 3y^2 = 5$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서 그은 접선의 기울기는? [3점]

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1} = 2$, $\overline{B_1C_1} = 2\sqrt{3}$ 이고 각 $\angle A_1B_1C_1$ 가 직각인 삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 선분 A_1C_1 의 중점을 중심으로 하고 선분 B_1C_1 에 접하는 원 O_1 을 그린다. 삼각형 $A_1B_1C_1$ 와 원 O_1 의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 라 하자. 그림 R_1 에서 원 O_1 위의 두 점 A_2, C_2 와 선분 A_1C_1 위의 점이 $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : \sqrt{3}$ 이고 $\angle A_2B_2C_2 = 90^\circ$ 인 삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그린다. 삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 색칠된 부분에 포함되지 않고, 선분 B_1C_1 과 선분 B_2C_2 는 평행하다. 선분 A_2C_2 의 중점을 중심으로 하고 선분 B_2C_2 에 접하는 원 O_2 를 그린다. 삼각형 $A_2B_2C_2$ 와 원 O_2 의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{13}{24}\pi$ ② $\frac{7}{12}\pi$ ③ $\frac{2}{3}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{11}{12}\pi$

27. 함수 $f(x)$ 와 음의 상수 p 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & (x \leq p) \\ f'(x) & (x > p) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 k 의 값은? [3점]

(가) $f''(x) = e^x$
 (나) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{x + g(-x)\} = k$

- ① -1 ② $\ln 2 - 1$ ③ $-\ln 2 + 1$
 ④ $\ln 2$ ⑤ 1

28. 반지름이 t 인 원 C 가 곡선 $y = e^x$ 와 x 축에 접한다. 원 C 와 곡선 $y = e^x$ 의 접점의 y 좌표를 $f(t)$ 라 하자. $f'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 의 값은?

[4점]

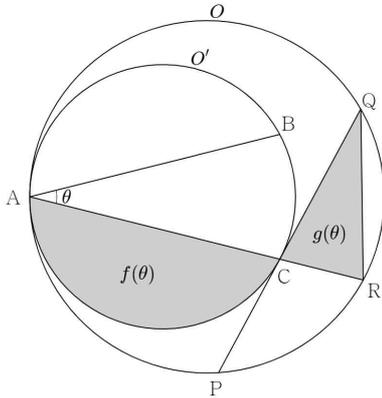
- ① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{10}{9}$ ⑤ $\frac{11}{10}$

단답형

29. 그림과 같이 반지름이 4인 원 O 위의 점 A 에서 반지름이 3인 원 O' 이 내접한다. 원 O' 위에 두 점 B, C 를 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 가 되도록 잡고, $\angle BAC = \theta$ 라 하자. 직선 AC 가 원 O 와 만나는 점을 R 라 하고, 원 O' 위의 점 C 에서 그은 접선이 원 O 와 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. 직선 AC 와 원 O' 로 둘러싸인 부분 중 더 작은 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CQR 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{(\pi - \theta)^3} = a \text{ 일 때, } 100a \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, $0 < \theta < \pi$ 이고, 선분 BQ 는 직선 AR 과 만나지 않는다.) [4점]



30. 자연수 m 에 대하여 두 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $g(x) = mx - x^2$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 연속인 함수

$$h(x) = \int_0^x f(t)\{|g(t)| + g(t)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $x^2 h(m) - 2m \int_0^x h(t)dt$ 가 $x = \alpha$ 에서 극값을 가지는 서로 다른 모든 실수 α 의 값의 합은 35이다.

$m + \pi^3 h(m)$ 의 값을 구하시오. (단, m 은 상수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.